**Лекція 1 Раціональні рівняння. Стандартні та нестандартні методи розв’язання.**

1. Класифікація.
2. Використання формул скороченного множення.
3. Метод заміни.
4. Метод оцінки.

***Використання формул скороченного множення. Метод заміни.***

**Задача 1**. .

**Розв’язання.** 



**Задача 2**. 

**Розв’язання.** 



**Задача 3 (самостійно)**. 

**Розв’язання.** 

**Задача 4.** 

**Розв’язання.** 



**Задача 5.** 

**Розв’язання.** 



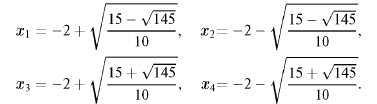
**Задача 6.** 

**Розв’язання.**  **-5\6, -3\2**

**Задача 7(дробово-раціональне).** 

**Розв’язання.** 



***Метод оцінки.***

**Задача 1.** 

**Розв’язання.** 

значить звідки Оскільки остання нерівність не має дійсних коренів, то і вихідне рівняння не має дійсних коренів.

**Задача 2.** 

**Розв’язання.** Ділимо чисельник і знаменник наЗаміна 

Оскількито маємо лише одне рівняння 

**Задача 3.** 

**Розв’язання.** звідки ліва частина не перевищує 2.Оцінимо праву частину 

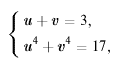
Відповідь. *х=0*.

**Лекція 2 Ірраціональні вирази та рівняння. Стандартні та нестандартні методи розв’язання.**

1. Метод введення змінних.
2. Використання десяткового запису числа.
3. Метод функціональної підстановки.
4. Застосування властивостей функцій.
5. Метод оцінки.

***Метод введення змінних.***

**Задача 1.** 

**Розв’язання.** Тоді рівняння заміниться системою 

де Так як то

 або 

Відповідь. (після перевірки)

**Задача 2.** 

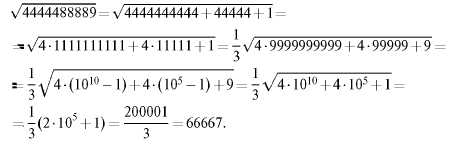
**Розв’язання. ОДЗ** 

Відповідь. *х=1*

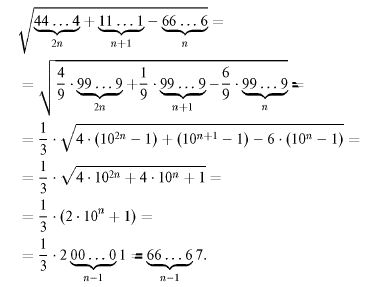
***Використання десяткового запису числа.***

**Задача 1.** 

**Розв’язання.** 

**Задача 2.** 

**Розв’язання.**



***Метод функціональної підстановки.***

**Задача 1.** 

**Розв’язання.**  де 

Відповідь. 

**Задача 2.** 

**Розв’язання.**  

Рівняння набуде вигляду 

Відповідь. 

***Застосування властивостей функцій.***

**Задача 1.** 

**Розв’язання. ОДЗ:** Розглянемо ,   Перша функція на ОДЗ неперервно зростає, а друга – неперервно спадає. Отже, рівняння має не більше одного кореня.

Відповідь. 

***Метод оцінки.***

**Задача 1.** 

**Розв’язання.** За нерівністю Коші для *п*=4 маємо 

Тоді 

З іншого боку  отже , звідки *х=1*.

**Задача 2.** 

**Розв’язання.** Оцінка лівої частини

, 

Отже, ліва частина не перевищує 3.

Для правої частини 

Таким чином, маємо систему двох рівнянь з правою частиною 3 в кожному з них.

Відповідь. *х=1*

**Лекція 3 Класичні нерівності та їх застосування до доведення нерівностей.**

1. Нерівність Коші.
2. Нерівність Коші-Буняковського.
3. Приклади доведення нерівностей.

***Нерівність Коші.***

Якщо  тоді  

Коли має місце рівність?

Частинні випадки:

* 
*  

***Нерівність Коші-Буняковського.***

Для дійсних  і  виконується

Коли має місце рівність?

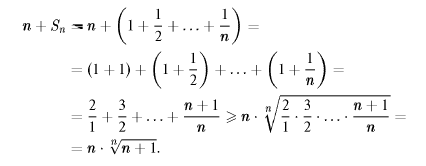


***Приклади доведення нерівностей.***

**Задача 1.** 

**Розв’язання.** Нехай Тоді нерівність набуде вигляду





**Задача 2.** Довести , якщо 

**Розв’язання.** Маємо Отже,



**Зауваження (другий спосіб).** Можна застосувати нерівність Коші.

,

,



Далі



**Узагальнення.** 

**Задача 3.** для невід’ємних а та в.

**Розв’язання.** Нерівність Коші для п=5.



**Доведення нерівностей методом математичної індукції.**

**Задача 1.** Довести нерівність  для будь-якого натурального .

**Доведення.** База індукції (*п*=2): , що доводиться, наприклад, двократним піднесенням до квадрату.

Індуктивне припущення ():.

Індуктивний перехід: Доведемо, що

.

Дійсно, з індуктивного припущення випливає . Покажемо, що

. Оскільки для різниці квадратів лівої та правої частин останної нерівності маємо



при будь-якому натуральному , то .

Таким чином, за транзитивністю відношення «>», маємо .

**Висновок.**  для будь-якого натурального .

**Задача 2.**

**Розв’язання.** При п=1 маємо рівність, при п=2 маємо вірну нерівність (як це довести?) –два способи

Припустимо, що нерівність вірна при будь-якому  (індукційне припущення). Доведемо вірність для 

1. Нехай к парне. Тоді за нерівністю Коші-Буняковського

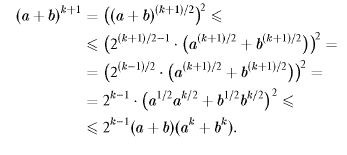


Оскільки то використавши індуктивне припущення, отримаємо



1. *к* – непарне. За нерівністю Коші-Буняковського



Оскільки то використавши індуктивне припущення, отримаємо 

**Лекція 4 Екстремальні значення функції**

1. Метод перетворень функції до рівносильного вигляду.
2. Використання класичних нерівностей.
3. Метод введення параметра.
4. ***Метод перетворень функції до рівносильного вигляду***.

**Задача 1.** Знайти найбільше значення функціїї 

**Розв’язання.** Перетворимо до вигляду 

З умови  випливає . Тоді і . Покажемо, що значення 1 досягається.

**Задача 2.** Знайти найменше значення функціїї 

**Розв’язання.** Перетворимо до вигляду = 

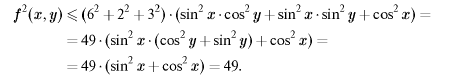
Отже, Покажемо, що значення -1 досяжне, тобто існує х, при якому вираз у дужках дорівнює нулю.

1. ***Використання класичних нерівностей.***

**Задача 3.** Знайти найменше значення функціїї 

**Розв’язання.** Перетворимо за нерівністю Коші Таким чином  це значення функція набуває при х=0. Отже, 

**Задача 4.** Знайти найменше та найбільше значення функції 

**Розв’язання.** За нерівністю Коші-Буняковського 

Тоді 

Доведемо досяжність. Умови, коли нерівність Коші-Буняковського перетворюється в рівність, мають вигляд 

Легко отримати 

При а=7 маємо 

І значення функції дорівнює 7 (треба порахувати)

При а=-7 отримаємо 

І значення функції дорівнює -7.

1. ***Метод введення параметра.***

**Задача 5.** Знайти найменше та найбільше значення функції 

**Розв’язання.** Позначимо  тоді задачу можна переформулювати так: знайти найменше та найбільше значення параметра *р*, при яких система рівнянь  має хоча б один дійсний корінь. Після підстановки перше рівняння набуде вигляду 

Корені існують, якщо дискримінант невід’ємний, тобто Звідси Маємо 

**Задача 6.** Знайти найменше та найбільше значення функції

, якщо .

**Розв’язання.** Позначимо  тоді задачу можна переформулювати так: знайти найменше та найбільше значення параметра *р*, при яких система

.



**Лекція 5. Рівняння з модулями**

1. Стандартний метод розв’язання- метод розкриття модулів.
2. Нестандартні прийоми.

**Задача 1.** 

**Розв’язання.** х=1, х=3– нулі підмодульних виразів.

При  рівняння має вигляд Це число менше за 1, тому увійде до відповіді.

При  маємо , звідки х=0, але це число не входить до 

При  з рівняння  отримаємо х=4.

**Задача 2.** 

**Розв’язання.** Тоді  

Відповідь. 

**Самостійно (аналогічно попередній задачі).** 

**Задача 3.** 

**Розв’язання.** Можна застосувати стандартний метод.

По-іншому, так як , а з властивості  отримаємо . Отже, відповідь: 

**Задача 4.** 

**Розв’язання.** Звернемо увагу на те, що різниця другого і першого підмодульних виразів дорівнює правій частині рівняння, тобто рівняння має вигляд Це означає, що Маємо систему квадратичних нерівностей 

Відповідь: , 