

## УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$t$  – час,  $x$  – координата (товщина),  $S$  – площа перетину;  
 $c = 3 \cdot 10^8$  м/с – швидкість світла;  
 $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл – модуль заряду електрона, заряд дірки;  
 $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – стала Планка;  
 $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К =  $8,62 \cdot 10^{-5}$  eВ/К – стала Больцмана,  $T$  – температура;  
 $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг – маса спокою вільного електрона;  
 $m_n$  – ефективна маса електрона,  $m_p$  – ефективна маса дірки;  
 $\epsilon$  – відносна діелектрична проникність,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – електрична стала;  
 $E$  – напруженість електричного поля;  
 $E$  – енергія електрона (дірки),  $E_g$  – ширина забороненої зони,  
 $E_F$  – енергія Фермі;  
 $U$  – напруга, різниця потенціалів,  $\phi_0$  – контактна різниця потенціалів;  
 $j$  – густина струму,  $j_s$  – густина струму насичення;  
 $C$  – ємність  $p$ - $n$ -переходу,  $\delta$  – ширина області об'ємного заряду;  
 $L_n$  – дифузійна довжина електронів,  $L_p$  – дифузійна довжина дірок;  
 $N_v$  – ефективна густина станів у валентній зоні,  $N_c$  – в зоні провідності;  
 $N_a$  – концентрація акцепторів,  $N_d$  – концентрація донорів;  
 $n$  – концентрація електронів,  $p$  – концентрація дірок;  
 $n_i$  – концентрація власних електронів,  $p_i$  – концентрація власних дірок;  
 $n_n$  – концентрація основних електронів,  $p_p$  – концентрація основних дірок;  
 $n_p$  – концентрація неосновних електронів,  $p_n$  – концентрація неосновних дірок;  
 $\mu_n$  – рухливість електронів,  $\mu_p$  – рухливість дірок;  
 $\tau_n$  – час життя електронів,  $\tau_p$  – час життя дірок;  
 $\rho_0$  – питомий опір при  $T = 300$  К,  $\rho_i$  – власний питомий опір;  
 $\gamma$  – питома електропровідність;  
 $D_n$  – коефіцієнт дифузії електронів,  $D_p$  – коефіцієнт дифузії дірок;  
 $\Delta n$  – концентрація нерівноважних електронів;  
 $\Delta p$  – концентрація нерівноважних дірок.

**Примітка.** В процесі обчислення в функцію експоненти підставляти ширину забороненої зони  $E_g$  в eВ, а постійну Больцмана  $k = 8,62 \cdot 10^{-5}$  eВ/К. В інших випадках постійна Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К.

**Таблиця 2** – Початкові дані по металах для задач № 1 і 2 ( $T = 300$  К)

Варіант	Метал	$M,$ $г/моль$	$D,$ $кг/дм^3$	$n_0$	$(\rho_0 \times 10^8)^*,$ $Ом \cdot м$	$(\alpha \times 10^3)^*,$ $1/град$
1	Li	6.94	0.534	1	8.4	4.4
2	Na	23.0	1.01	1	4.5	5.0
3	Mg	24.3	1.74	2	4.4	4.2
4	Al	27.0	2.70	3	2.7	4.2
5	K	39.1	0.87	1	6.25	5.8
6	Ca	40.1	1.55	2	4.17	4.6
7	V	50.9	5.96	1	26	2.8
8	Hr	52.0	7.19	1	19	5.9
9	Fe	55.8	7.87	3	8.71	6.6
10	Ni	58.7	8.91	1	10.3	4.3
11	Cu	63.5	8.93	1	1.62	4.3
12	Zn	65.4	7.14	2	5.92	3.5
13	Ga	69.7	5.91	3	8.1	5.2
14	Rb	85.5	1.53	1	11.6	5.3
15	Nb	92.9	8.58	1	13.1	4.0
16	Mo	95.9	10.2	1	5.03	4.7
17	Pd	107	12.2	1	9.1	3.8
18	Ag	108	10.5	1	1.47	4.0
19	Cd	112	8.65	2	7.3	4.3
20	In	115	7.31	3	8.2	5.1
21	Sn	119	7.28	4	5.92	3.5
22	Sb	122	6.62	5	42	3.8
23	Cs	133	1.87	1	20	4.8
24	Ta	181	16.6	1	32	3.6
25	W	184	19.3	1	5.5	4.6
26	Ir	192	22.4	2	6.15	3.7
27	Pt	195	21.4	1	10.7	3.9
28	Au	197	19.3	1	2.06	4.5
29	Tl	204	11.8	3	18.6	2.3
30	Pb	207	11.3	4	20	3.4

\*  $\rho_0 = (\rho_0 \times 10^8) \cdot 10^{-8}$  Ом·м;  $\alpha = (\alpha \times 10^3) \cdot 10^{-3}$  1/град.

**Таблиця 3 – Початкові дані по напівпровідниках для задач № 3–6**

Варіант	Напів-провідник	$E_g$ , еВ	$\frac{m_n}{m_0} *$	$\frac{m_p}{m_0} *$	$\mu_n$ $\text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$	$\mu_p$ $\text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$	$\tau_n$ , с	$\tau_p$ , с	$T^{**}$ , $^{\circ}\text{K}$	$N_{C_2,3}$ , $\text{м}^{-3}$	$N_{V_2,3}$ , $\text{м}^{-3}$
1	АЛІМАЗ	5,40	0,2	0,4	0,4	0,5	$10^{-6}$	$10^{-6}$	800	$9.73 \cdot 10^{24}$	$2.75 \cdot 10^{25}$
2	ZnS	3,70	0,3	0,5	0,017	0,0005	$10^{-3}$	$10^{-3}$	750	$1.62 \cdot 10^{25}$	$3.49 \cdot 10^{25}$
3	GaN	3,40	0,2	0,6	0,038	0,02	$10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$	700	$7.96 \cdot 10^{24}$	$4.14 \cdot 10^{25}$
4	SiC	3,00	0,6	1,0	0,03	0,005	$10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-9}$	650	$3.70 \cdot 10^{25}$	$7.96 \cdot 10^{25}$
5	ZnSe	2,60	0,17	0,6	0,03	0,0015	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	600	$4.95 \cdot 10^{24}$	$3.28 \cdot 10^{25}$
6	CdS	2,53	0,2	0,7	0,03	0,005	$1 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$	550	$5.54 \cdot 10^{24}$	$3.63 \cdot 10^{25}$
7	AlP	2,43	0,35	0,45	0,008	0,003	$5 \cdot 10^{-6}$	$10^{-5}$	500	$1.11 \cdot 10^{25}$	$1.62 \cdot 10^{25}$
8	ZnTe	2,28	0,15	0,65	0,034	0,02	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	450	$2.67 \cdot 10^{24}$	$2.40 \cdot 10^{25}$
9	GaP	2,26	0,36	0,4	0,02	0,01	$10^{-8}$	$10^{-7}$	400	$8.31 \cdot 10^{24}$	$9.73 \cdot 10^{24}$
10	CdSe	1,74	0,13	0,45	0,06	0,006	$10^{-2}$	$10^{-2}$	350	$1.48 \cdot 10^{24}$	$9.50 \cdot 10^{24}$
11	AlSb	1,58	0,3	0,4	0,04	0,02	$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$	300	$4.10 \cdot 10^{24}$	$6.32 \cdot 10^{24}$
12	GdTe	1,51	0,11	0,4	0,1	0,01	$10^{-7}$	$10^{-7}$	300	$9.11 \cdot 10^{23}$	$6.32 \cdot 10^{24}$
13	GaAs	1,43	0,067	0,5	0,85	0,04	$10^{-9}$	$10^{-8}$	300	$4.33 \cdot 10^{23}$	$8.83 \cdot 10^{24}$
14	InP	1,35	0,06	0,2	0,5	0,06	$10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	300	$3.67 \cdot 10^{23}$	$2.23 \cdot 10^{24}$
15	Si	1,12	1,05	0,56	0,15	0,05	$3 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$	300	$2.69 \cdot 10^{25}$	$1.05 \cdot 10^{25}$
16	GaSb	0,72	0,05	0,4	0,5	0,14	$10^{-6}$	$10^{-6}$	300	$2.79 \cdot 10^{23}$	$6.32 \cdot 10^{24}$
17	Mg <sub>2</sub> Si	0,70	0,46	0,87	0,04	0,007	$3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$	300	$7.79 \cdot 10^{24}$	$2.03 \cdot 10^{25}$
18	Ge	0,67	0,57	0,37	0,39	0,19	$5 \cdot 10^{-6}$	$10^{-5}$	300	$1.07 \cdot 10^{25}$	$5.62 \cdot 10^{24}$
19	Mg <sub>2</sub> Ge	0,60	0,18	0,31	0,05	0,01	$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$	300	$1.91 \cdot 10^{24}$	$4.31 \cdot 10^{24}$
20	ZnSb	0,50	0,15	0,42	0,1	0,05	$2 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	216	$8.86 \cdot 10^{23}$	$4.15 \cdot 10^{24}$
21	PbS	0,39	0,25	0,25	0,06	0,07	$10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$	216	$1.91 \cdot 10^{24}$	$1.91 \cdot 10^{24}$
22	InAs	0,36	0,027	0,41	3,0	0,04	$5 \cdot 10^{-10}$	$6 \cdot 10^{-8}$	120	$2.80 \cdot 10^{22}$	$1.66 \cdot 10^{24}$
23	Te	0,34	0,13	0,4	0,09	0,06	$3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	120	$2.96 \cdot 10^{23}$	$1.60 \cdot 10^{24}$
24	PbTe	0,32	0,034	0,032	0,2	0,16	$10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	120	$3.96 \cdot 10^{22}$	$3.62 \cdot 10^{22}$
25	Mg <sub>2</sub> Sn	0,30	1,17	1,28	0,025	0,02	$4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-6}$	77	$4.11 \cdot 10^{24}$	$4.70 \cdot 10^{24}$
26	PbSe	0,27	0,054	0,05	0,1	0,06	$3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$	77	$4.08 \cdot 10^{22}$	$3.63 \cdot 10^{22}$
27	InSb	0,18	0,014	0,4	2	0,1	$10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-8}$	77	$5.38 \cdot 10^{21}$	$8.22 \cdot 10^{23}$
28	Cd <sub>0,2</sub> H <sub>0,8</sub> Te	0,16	0,012	0,43	1,6	0,019	$10^{-7}$	$10^{-7}$	77	$4.27 \cdot 10^{21}$	$9.16 \cdot 10^{23}$
29	Pb <sub>0,8</sub> Sn <sub>0,2</sub> Te	0,10	0,011	0,012	4,0	3,4	$10^{-7}$	$10^{-7}$	77	$3.75 \cdot 10^{21}$	$4.27 \cdot 10^{21}$
30	Cd <sub>3</sub> As <sub>2</sub>	0,10	0,46	0,12	0,05	0,03	$10^{-6}$	$10^{-6}$	77	$1.01 \cdot 10^{24}$	$1.35 \cdot 10^{23}$

\*  $m_n = (m_n/m_0) \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг;  $m_p = (m_p/m_0) \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг.

\*\*Температура плавлення CO<sub>2</sub> = 216 К; кипіння кріптону = 120 К, кипіння азоту = 77 К.

## ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ФОРМУЛИ

### Електропровідність металів

Протікання струму описується законом Ома в диференціальній формі:

$$j = \gamma \cdot E, \quad (1)$$

де  $j$  – густина струму,  $E$  – напруженість електричного поля.

Питома електропровідність матеріалів у загальному випадку визначається:

$$\gamma = e \cdot (\mu_n \cdot n + \mu_p \cdot p), \quad (2)$$

де  $n$ ,  $p$  – концентрація рухливих носіїв негативного і позитивного зарядів відповідно;  $\mu_n$  і  $\mu_p$  – їх відповідні рухливості.

Рухливість носіїв – це їх швидкість дрейфу  $V_{др}$  за одиничної напруженості електричного поля  $E$ :

$$\mu = \frac{V_{др}}{E}. \quad (3)$$

Якщо струм переноситься тільки електронами, як у більшості металів, то

$$\gamma = e \cdot \mu_n \cdot n. \quad (4)$$

Питомий опір – це величина, обернена питомій електропровідності

$$\rho = \frac{1}{\gamma}. \quad (5)$$

Питомий опір металів залежить від температури таким чином:

$$\rho = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t), \quad (6)$$

де  $\rho_0$  – питомий опір за певної температури, наприклад, при  $27^\circ C$  (як визначено в табл. 2);  $\alpha$  – температурний коефіцієнт опору;  $\Delta t$  – зміна температури щодо визначеної для  $\rho_0$ .

У металах концентрація електронів не залежить від температури, а збільшення їхнього опору з підвищенням температури викликано зменшенням рухливості електронів у зв'язку зі збільшенням інтенсивності теплових коливань електронів та іонів, що ускладнює дрейф електронів.

Середня теплова швидкість електронів

$$V_T = \sqrt{\frac{8kT}{\pi \cdot m}}, \quad (7)$$

де  $k$  – постійна Больцмана,  $T$  – абсолютна температура;  $m$  – маса електрона провідності (у металах практично дорівнює масі вільного електрона).

Дрейфова швидкість електронів у твердих тілах за звичайних робочих температур набагато менше середньої теплової швидкості, і тому відстань дрейфу під дією електричного поля набагато менше відстаней, які долаються за теплового руху (рис. 1 а, б). Коли електрон починає рухатися в вакуумі під дією напруги  $U$ , він збільшує свою кінетичну енергію до

$$E_{max} = \frac{mV_{max}^2}{2} = eU,$$

и середня швидкість проходження шляху  $S$  в вакуумі визначається  $V_{max}$ :

$$V_{вак} = \frac{S}{t_{вак}} = \frac{V_{max}}{2} = \sqrt{\frac{eU}{2m}},$$

де  $t_{вак}$  – час руху в вакуумі.

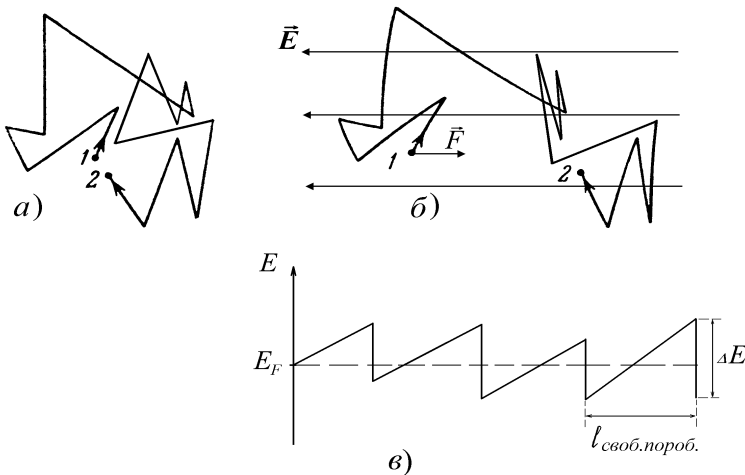


Рисунок 1 – Траєкторія руху електрона у твердому тілі.  
 а) у відсутності зовнішнього поле; б) за наявності зовнішнього електричного поля; в) залежність енергії електрона від часу

В твердих тілах середня швидкість руху електронів  $V_{др}$  визначається швидкістю, що може набрати на малій довжині вільного пробігу між зіткненнями з іонами. На довжині вільного пробігу електрон плавно збільшує свою енергію, а в момент зіткнення з іоном різко втрачає її, потім знову плавно збільшує її на наступній довжині вільного пробігу і так далі (рис. 1,в). Оскільки частота зіткнень надзвичайно велика, то рух електронів

характеризується середньою швидкістю  $V_{др}$ .

Концентрація носіїв струму у металах визначається концентрацією атомів  $n_{AT}$  і кількістю вільних електронів, що приходяться на один атом  $n_0$ :

$$n = n_0 \cdot n_{AT} = n_0 \cdot \frac{DN_A}{M}, \tag{8}$$

де  $D$  – густина речовини,  $M$  – молярна маса,  $N_A$  – число атомів у молі (число Авогадро).

### Основні подання зонної теорії

Властивості твердих тіл, пов'язані з електропровідністю, пояснюються за допомогою теорії енергетичних зон (зонна теорія).

Відомо, що у електронів в атомах енергетичний спектр дискретний, тобто в атомах електрони можуть набувати тільки конкретних значень енергії, обумовлених квантовими числами. Дозволені енергетичні стани електронів розподілені забороненими областями (рис. 2, права частина). При поєднанні атомів у кристал дискретні енергетичні стани розмиваються в енергетичні зони. З кожного дискретного стану утвориться одна енергетична зона, що включає стільки станів, скільки атомів у кристалі (рис. 2, ліва частина). З огляду на величезну кількість атомів, навіть у невеликих за розміром кристалах, при кінцевій ширині енергетичних зон (декілька електрон-вольт) відстань між

рівнями в зоні буде надто малою. Далі, з огляду на середню енергію теплового руху електронів, набагато більшу, ніж відстань між рівнями, а також співвідношення невизначеності, ми дійшли висновку, що енергетична зона являє собою континуум станів, тобто безперервну сукупність енергій, у межах якої будь-які стани дозволені.

Інше питання, без розв'язку якого не можна зрозуміти властивості твердого тіла – заповнення енергетичних зон електронами. Відповідно до принципу Паулі, в одному енергетичному стані (на одному рівні) може перебувати не більше ніж два електрони із протилежними спінами. Крім того, система спонтанно набирає стан з мінімальною енергією, тобто всі електрони прагнуть зайняти нижчі енергетичні стани. Це приводить до того, що зони, які утворилися з рівнів, заповнених двома електронами, стають цілковито заповненими (рис. 2, а, б, в), а зони, що утворилися з рівнів, заповнених одним електроном, стають заповненими тільки в нижній частині до деякого рівня, який називають **рівнем Фермі** (рис. 2,а). (Ймовірність заповнення такого рівня дорівнює 50%).

Можливі випадки перекриття цілковито заповненої енергетичної зони з порожньою. При цьому частина рівнів біля дна початково порожньої зони заповнюється електронами з області стелі початково заповненої зони. Рівень Фермі перебуває поміж стелею нижньої та дном верхньої із зон, що перекрилися (рис. 2,б). Електрони, що перейшли з заповненої в порожню зону, стають електронами провідності. Стани, що спустіли в стелі нижньої зони, виявляють себе як носії струму з позитивним зарядом – дірки.

Заповнена зона має особливі властивості. Оскільки всі стани заповнені, то у твердому тілі завжди присутні електрони з певною енергією, які рухаються в усіх можливих напрямках. Загальний струм усіх цих електронів дорівнює нулю. Струм залишається рівним нулю й в присутності електричного поля. Електричне поле, щоб створити струм, повинне змінити напрямок руху хоча б деяких електронів. Після того, як всі стани заповнені, жодний електрон не може змінити свого стану, тому що не

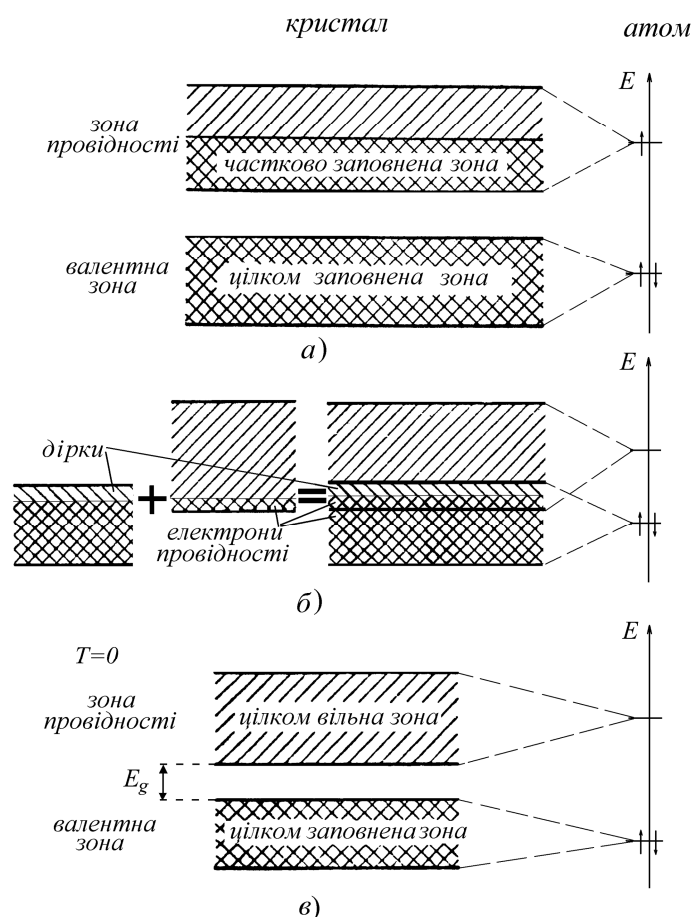


Рисунок 2 – Схема утворення енергетичних зон: а) – одновалентного металу; б) – двовалентного металу; в) – напівпровідника й ізолятора. Праворуч – енергетичний спектр окремого атома, ліворуч – кристала

може перейти до вже зайнятого стану. Принцип Паулі забороняє перехід у той стан, в якому вже знаходяться два електрони. Таким чином, електрони заповненої зони, навіть за наявності електричного поля, не можуть створити електричний струм.

Якщо зона заповнена частково, то до заповнених станів примикають впритул вільні стани. Межа між ними є рівнем Фермі (рис. 2,а). В електронів, що знаходяться на верхніх заповнених станах, є можливість під дією зовнішнього електричного поля збільшувати свою енергію, тобто переходити в інший енергетичний стан, а тому брати участь в електропровідності. Це означає, що електропровідність металів визначається властивостями не всіх електронів, а тільки електронів з енергіями поблизу рівня Фермі. Велику електропровідність металів треба пояснити скоріше значною величиною струму, створеного невеликою групою швидких електронів на вершині розподілу Фермі, ніж високим значенням повної концентрації вільних електронів, яким можна надати невелику дрейфову швидкість.

Однак велика швидкість на рівні Фермі обумовлена саме високою повною концентрацією електронів, що визначає нахил кривої  $E(k)$  при рівні Фермі (хвильове число  $k = 2\pi/\lambda$ , де  $\lambda = h/mV$  – довжина хвилі де-Бройля електрона).

Розглянувши основні типи зонних структур, подані на рис. 2, робимо висновки, що випадки а) і б) відповідають металам, а випадок в) – ізоляторам чи напівпровідникам за низьких температур.

### Статистика електронів у металах

Ймовірність заповнення електронами рівня з енергією  $E$  точно описується квантовою функцією розподілу Фермі-Дірака:

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}, \quad (9)$$

де  $E_F$  – енергія рівня Фермі;  $k$  – постійна Больцмана;  $T$  – абсолютна температура;  $kT$  – теплова енергія електрона.

Така ймовірність для рівнів, розташованих на декілька  $kT$  нижче рівня Фермі близька до одиниці, а для рівнів, розташованих на декілька  $kT$  вище – близька до нуля й у напівпровідниках, і в металах (див., наприклад, для напівпровідників, на рис. 3, третій стовпець графіків).

Положення рівня Фермі в металі визначається концентрацією електронів  $n$  в ньому (8):

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (10)$$

де  $m$  – ефективна маса електрона;  $h$  – стала Планка.

Енергетична ширина заповнених зон у металах дорівнює декільком електронвольтам, а середня енергія теплового руху  $kT$  при звичайних температурах порядку сотих часток електронвольта. Тому в багатьох задачах

розподіл електронів у металі можна вважати за східчастий, тобто стани нижче рівня Фермі вважати цілком заповненими, а вище – зовсім порожніми. Такий електронний газ у металах є виродженим, і його властивості далекі від властивостей ідеального газу, оскільки ймовірність заповнення кожного стану електронами дорівнює одиниці, а в газах – набагато менше одиниці.

При нагріванні поступово відбувається згладжування сходинки функції розподілу: з'являються вільні енергетичні стани нижче рівня Фермі і, навпаки, зайняті – вище рівня Фермі, і область розмиття функції розподілу збільшується. Коли ця область стає порядку енергії Фермі, квантова функція розподілу Фермі-Дірака переходить у класичну функцію розподілу Максвелла-Больцмана, а властивості електронів стають подібними до властивостей ідеального газу, тобто виродження знімається. Температура, за якої це відбувається, називається температурою виродження, або температурою Фермі. Її можна знайти, вважаючи, що область розмиття  $kT$  є порядку енергії Фермі:

$$kT_{\text{вир}} = E_F, \quad (11)$$

звідки за допомогою (10) можна одержати значення температури виродження для даного металу.

Так, наприклад, у металі зі звичайною концентрацією електронів, якщо прийняти  $E_F = 5 \text{ eV}$ , температура виродження становить близько  $60\,000 \text{ K}$ . Це означає, що електронний газ у металах надто вироджений за всіх температур навіть до температури плавлення. Відповідно до цього електрони в металі не можна вважати за ідеальний газ, тому що вони мають зовсім інші властивості.

У напівпровідниках електрони провідності знаходяться в так званій зоні провідності, і їхня концентрація зазвичай мала порівняно з густиною енергетичних станів. Тому електрони в напівпровідниках описуються статистикою Больцмана і можуть розглядатися майже як ідеальний газ, що складається, однак не з нейтральних, а заряджених часток.

### **Електропровідність напівпровідників**

Питома електропровідність напівпровідника:

$$\gamma = e(n\mu_n + p\mu_p), \quad (12)$$

де  $e$  – заряд електрона;  $n, p$  – концентрації електронів і дірок відповідно;  $\mu_n, \mu_p$  – рухливості електронів і дірок відповідно.

Густина дрейфового електричного струму:

$$j = \gamma \cdot \mathbf{E}, \quad (13)$$

де  $\mathbf{E}$  – напруженість електричного поля.

Найбільш вдалою формою подання напівпровідника є зонна діаграма (зонна модель). На рис. 3 показані зонні діаграми власних напівпровідників  $n$ -типу та  $p$ -типу. Застосуємо наступні позначення енергетичних рівнів:  $E_C$  – дно зони провідності,  $E_V$  – стеля валентної зони,  $E_D$  – рівень донорів,  $E_A$  – рівень акцепторів. Різниця енергій  $E_C - E_V$  є ширина забороненої зони  $E_g$ .

Щоб знайти розподіл електронів в зоні провідності і дірок у валентній зоні необхідно помножити функцію розподілу густини станів  $N(E)$  на функцію розподілу Фермі-Дірака  $f(E)$ .



Цей розподіл концентрації електронів і дірок подано графічно на рис. 3. (Масштаб концентрації носіїв струму на рисунку для наочності сильно збільшено порівняно з масштабом густини станів)

Аналітично це виражається так:

$$n(E) = N_C(E) \times f_n(E) = \frac{4\pi}{h^3} (2m_n)^{3/2} \cdot (E - E_C)^{1/2} \times \frac{1}{e^{kT/E - E_F} + 1}, \quad (14)$$

$$p(E) = N_V(E) \times f_p(E) = \frac{4\pi}{h^3} (2m_p)^{3/2} \cdot (E_V - E)^{1/2} \times \frac{1}{e^{kT/E_F - E} + 1}, \quad (15)$$

де  $N_C(E)$  – функція розподілу густини станів в зоні провідності;  $N_V(E)$  – функція розподілу густини станів у валентній зоні;  $f_n(E)$  і  $f_p(E)$  – функція розподілу електронів і дірок відповідно;  $h$  – стала Планка;  $m_n$  і  $m_p$  – ефективна маса електронів і дірок відповідно;  $k$  – стала Больцмана;  $T$  – температура.

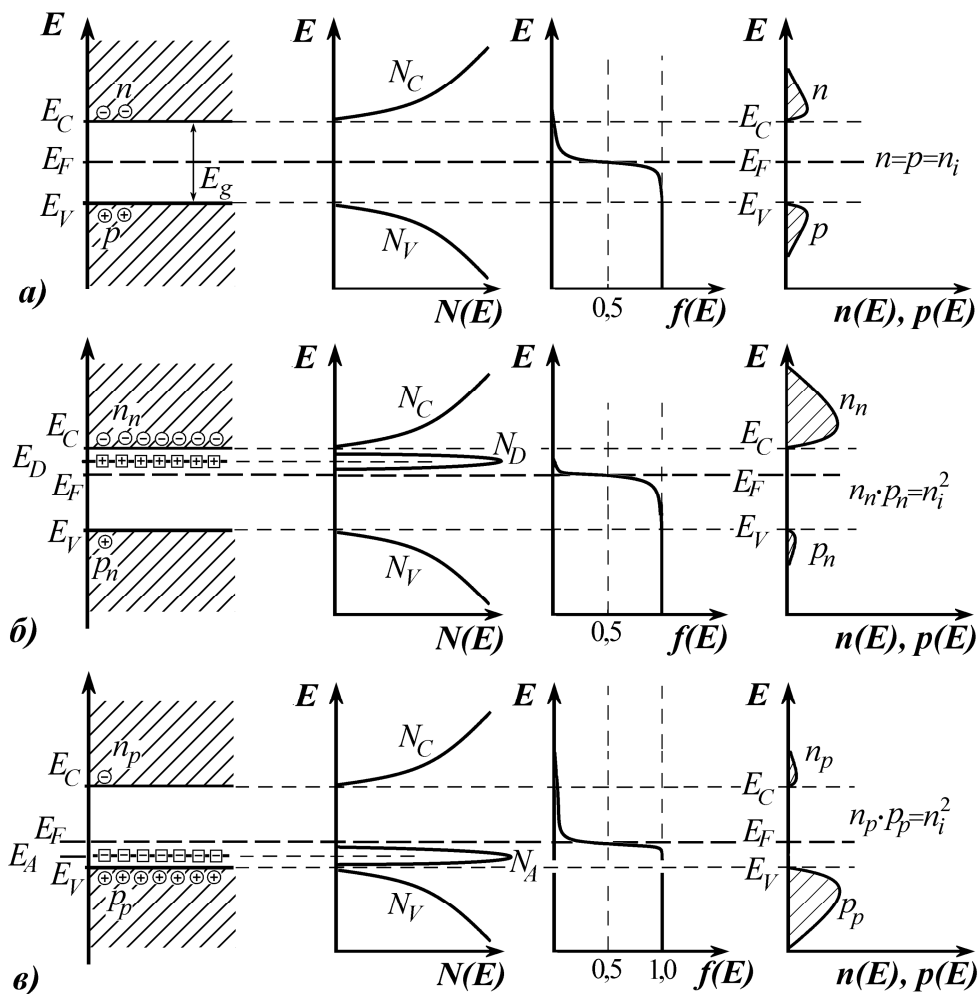


Рисунок 3 – Зонна діаграма, густина станів, функція розподілу Фермі-Дірака і концентрації носіїв:

а) – для власного напівпровідника; б) – напівпровідника  $n$ -типу;

в) – напівпровідника  $p$ -типу

Якщо  $E_C - E_F$  набагато більше  $kT$  (напівпровідник є невідроджений), тоді всю **зону провідності** можна представити як енергетичний рівень з енергією  $E_C$

і концентрацією (ефективною густиною станів)  $N_C$ , а функцію розподілу представити у спрощеному вигляді. Тоді концентрація електронів буде:

$$n = N_C \cdot \text{Exp}\left(-\frac{E_c - E_F}{kT}\right), \quad \text{де } N_C = 2\left(\frac{2\pi \cdot m_n \cdot kT}{h^2}\right)^{3/2}. \quad (16)$$

Якщо відстань  $E_F - E_V$  набагато більше  $kT$ , напівпровідник є невідродженим, тоді всю валентну зону можна представити, як енергетичний рівень з енергією  $E_V$  і концентрацією (ефективною густиною станів)  $N_V$ , а функцію розподілу дірок подати у спрощеному вигляді. Тоді концентрація дірок буде:

$$p = N_V \cdot \text{Exp}\left(-\frac{E_F - E_V}{kT}\right), \quad \text{де } N_V = 2\left(\frac{2\pi \cdot m_p \cdot kT}{h^2}\right)^{3/2}. \quad (17)$$

Напівпровідники без домішок називають **власними**. Приклади елементарних (які складаються із атомів одного типу), бінарних (які складаються із атомів двох типів) та потрійних власних напівпровідників наведено у другому стовбці табл. 3 початкових даних. Схематичне зображення власного напівпровідника германія за низьких температур (коли немає власної провідності) показано на рис. 4, а.

У власному напівпровіднику провідність рівним чином забезпечена і електронами і дірками. Для отримання напівпровідників **n-типу**, де електропровідність обумовлена головним чином електронами або **p-типу**, де провідність обумовлена головним чином позитивними носіями струму – дірками, власний напівпровідник легують (вводять домішку).

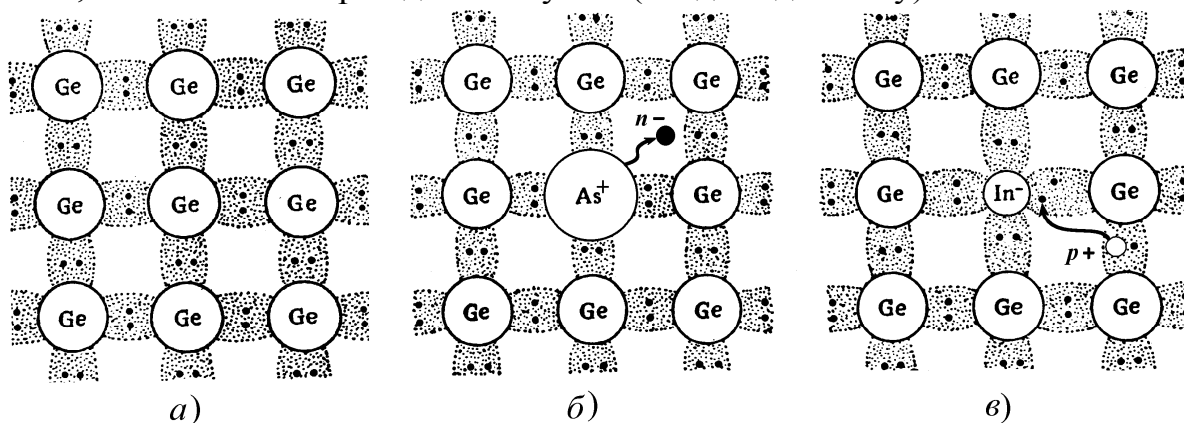


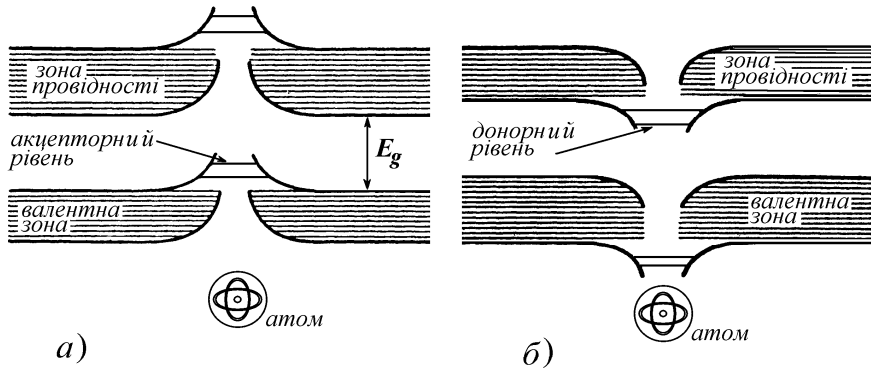
Рисунок 4 – Схематичне зображення:

а) – власного напівпровідника; б) – напівпровідника n-типу; в) – напівпровідника p-типу

Схематичне зображення власного напівпровідника германія за низьких температур (коли немає власної провідності) показана на рис. 4,а, германія з іонізованою донорною домішкою – на рис. 4,б, а германія з іонізованою акцепторною домішкою – на рис. 4,в.

Зазвичай домішкові атоми заміщають власні (основні) атоми напівпровідника, привносячи при цьому до забороненої зони свої енергетичні рівні. Акцепторні атоми мають меншу валентність, ніж власні атоми, і утворюють менш глибоку потенційну яму, а їхні енергетичні рівні будуть трохи

вище стелі валентної зони (рис. 5,а). Донорні атоми мають більшу валентність, ніж основні, і утворюють більш глибоку потенційну яму, а їхні енергетичні рівні будуть трохи нижче дна зони провідності (рис. 5,б). Зауважимо, що енергія електрона збільшується вгору, а енергія дірки – вниз. Щоб зменшити власну енергію, електрони, подібно до піщинок у склянці води прагнуть



а) б)  
Рисунок 5 – Зонна діаграма напівпровідника поблизу а) – акцепторного домішкового атома; б) – донорного домішкового атома

опуститися вниз, а дірки, подібно до бульбашок повітря, прагнуть спливати вгору. При цьому інтенсивність струсів склянки аналогічна величині температури. Нагадаємо, електрони будуть носіями струму, тільки знаходячись у

зоні провідності, а дірки – тільки знаходячись у валентній зоні.

Домішкові атоми звичайно створюють рівні з малою енергією іонізації, і вони практично усі іонізовані вже за будь-якої робочої температури. Тому концентрація електронів виявляється рівною концентрації донорів, а концентрація дірок – концентрації акцепторів:

$$n_n \approx N_D, \quad p_p \approx N_A. \quad (18)$$

Якщо в напівпровіднику присутні і донори й акцептори, то тип провідності визначається тією домішкою, якої більше. **Основними носіями** є ті, які визначають тип провідності напівпровідника, тобто ті, яких більше.

$$n_n = (N_D - N_A) + p_n \quad \text{або} \quad p_p = (N_A - N_D) + n_p, \quad (19)$$

де  $n_n$  – концентрація основних електронів;  $p_n$  – концентрація неосновних дірок;  $p_p$  – концентрація основних дірок;  $n_p$  – концентрація неосновних електронів.

Концентрацію неосновних носіїв визначають з закону діючих мас:

$$p_n = n_i^2 / n_n, \quad \text{або} \quad n_p = n_i^2 / p_p, \quad (20)$$

де  $n_i$  – концентрація власних носіїв.

Концентрація основних носіїв практично дорівнює різниці концентрацій домішкових атомів, якщо однієї домішки значно більше ніж іншої:

$$n_n \approx N_D - N_A, \quad \text{або} \quad p_p \approx N_A - N_D. \quad (21)$$

Концентрація власних носіїв визначається формулою:

$$n_i = \sqrt{N_C \cdot N_V} \cdot e^{-\frac{E_g}{2kT}}. \quad (22)$$

Положення рівня Фермі у власному напівпровіднику, приймаючи за початок відліку дно зони провідності:

$$E_{Fi} = -\frac{E_g}{2} + \frac{3kT}{4} \cdot \ln\left(\frac{m_p}{m_n}\right). \quad (23)$$

Положення рівня Фермі в напівпровіднику  $n$ -типу, якщо прийняти за початок відліку дно зони провідності:

$$E_F = -kT \ln \frac{N_C}{N_D}. \quad (24)$$

Положення рівня Фермі в напівпровіднику  $p$ -типу, якщо прийняти за початок відліку дно зони провідності:

$$E_F = -E_V + kT \ln \frac{N_V}{N_A}. \quad (25)$$

### Ефект Холла в напівпровідниках

Нехай зразок домішкового (для визначеності – електронного) напівпровідника, по якому протікає електричний струм, розміщено в магнітному полі, яке перпендикулярне напрямку струму (рис. 6,а). Під впливом сили Лоренца електрони, що рухаються проти напрямку сили струму (зазначено стрілкою), відхилятимуться до верхньої грані зразка. Отже, біля верхньої грані буде накопичуватися негативний заряд, а на протилежній грані буде залишатися некомпенсований позитивний заряд. Виникнення внаслідок цього поперечної різниці потенціалів і складає ефект Холла. Процес накопичення заряду буде продовжуватися доти, поки поперечна кулонівська сила не урівноважить силу Лоренца. Це відбувається практично миттєво. Після цього подальше накопичення заряду припиниться, а електрони, що утворюють зовнішній струм, будуть рухатися уздовж зразка, як і за відсутності магнітного поля.

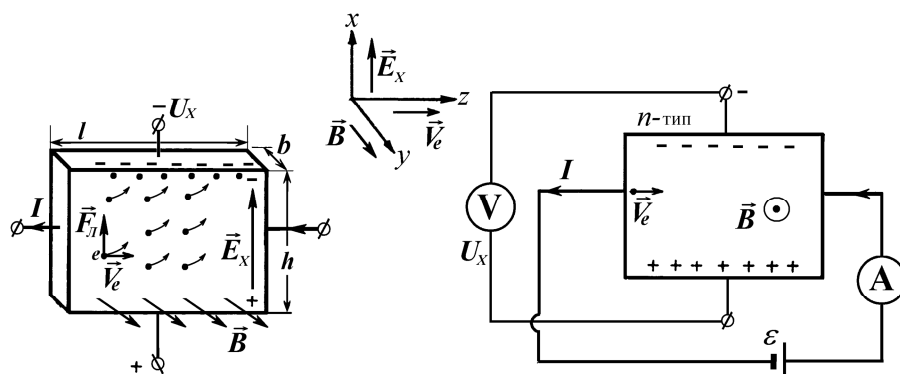


Рисунок 6 – Схеми спостереження і виміри ефекту Холла

Поперечне холлівське електричне поле може бути обчислене з умови рівності магнітної й електричної сил, що діють на електрон провідності:

$$e \cdot V \cdot B = e \cdot E_x, \quad (26)$$

де  $V$  – дрейфова швидкість електрона;  $e$  – заряд електрона;  $B$  – магнітна індукція;  $E_x$  – напруженість холлівського електричного поля.

На досліді зручно вимірювати не поперечне поле, а напругу (ЕРС Холла)

$$U_X = E_X \cdot h = V \cdot B \cdot h, \quad (27)$$

де  $h$  – висота зразка.

Сила струму через зразок

$$I = j \cdot S = enV \cdot S, \quad (28)$$

де  $S = bh$  – поперечний переріз зразка;  $b$  – розмір зразка в напрямку магнітного поля (найменший розмір).

Тоді:

$$U_X = \frac{1}{en} \cdot \frac{BI}{b} = R_X \cdot \frac{BI}{b}, \quad (29)$$

де введена стала Холла:

$$R_X = \frac{1}{en} \quad (30)$$

- коефіцієнт, який пов'язує поперечну різницю потенціалів  $U_X$  з магнітною індукцією  $B$ , силою струму  $I$  і товщиною  $b$ .

Схему дослідження ефекту Холла подано на рис. 6,б. Вимірявши чотири величини, що входять у (29),  $U_X$ ,  $B$ ,  $I$  і  $b$ , можна обчислити  $R_X$  для даного зразка:

$$R_X = \frac{V_X \cdot b}{B \cdot I}. \quad (31)$$

За обчисленим значенням  $R_X$  можна визначити концентрацію вільних електронів у досліджуваному матеріалі:

$$n = \frac{1}{eR_X}. \quad (32)$$

Опір зразка залежить від його розмірів:

$$R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{l}{b \cdot h}. \quad (33)$$

Вимірявши їх, можна обчислити електропровідність матеріалу  $\gamma$  (12)

$$\gamma = \frac{1}{R} \cdot \frac{l}{b \cdot h}, \quad (34)$$

а потім і рухливість електронів (у випадку монополярної електронної провідності):

$$\mu_n = \frac{\gamma}{en} = R_X \cdot \gamma. \quad (35)$$

Таким чином, одночасне вимірювання опору зразка  $R$  і параметрів ефекту Холла  $U_X$ ,  $B$ ,  $I$  і  $b$  дозволяє одержати важливі данні про провідник: знак носіїв заряду (за знаком  $U_X$ ), їхню концентрацію  $n$  (або  $p$ ) і рухливість  $\mu_n$  (або  $\mu_p$ ). У цьому і полягає значимість ефекту Холла, як одного з основних методів дослідження електричних властивостей напівпровідників і провідників.

Урахування теплового руху дає наступне значення сталої Холла:

$$R_X = \frac{A}{en}, \quad (36)$$

де  $A$  – фактор розсіювання, що залежить від показника ступеня у виразі для залежності довжини вільного пробігу носія від енергії. Наприклад, у ковалентних напівпровідниках при розсіюванні електронів на акустичних коливаннях решітки:

$$A = \frac{3\pi}{8} \approx 1,18. \quad (37)$$

У навчальних задачах можна прийняти  $A = 1$  (для металів це точно).

Якщо в перенесенні заряду беруть участь електрони і дірки, то картина ефекту Холла значно ускладнюється. Електрони і дірки відхиляються в один бік, і якщо рухливості і концентрації електронів і дірок однакові, то їхні заряди будуть цілковито скомпенсовані один одним, а холлівське поле буде дорівнювати нулю. В області власної провідності знак ЕРС Холла відповідає знаку носіїв, рухливість яких більше.

Для випадку змішаної провідності:

$$R_X = \frac{A}{e} \cdot \frac{\mu_p^2 p - \mu_n^2 n}{(\mu_p p + \mu_n n)^2} \quad (38)$$

і

$$\gamma = e(\mu_p p + \mu_n n). \quad (39)$$

Як видно з (38) і (39), визначення сталої Холла і електропровідності в цьому випадку не дає достатньо даних для визначення рухливості і концентрації дірок, тому що ми маємо два рівняння з чотирма невідомими. Можна вийти з цього становища, знайшовши значення рухливості електронів або дірок екстраполяцією з області домішкової провідності. Питання спрощується для області власної провідності, коли  $n = p$ .

Не в усіх металів стала Холла негативна. Деякі метали виявляють аномалію – стала Холла в них позитивна. Наприклад, цинк і кадмій мають  $R_X > 0$ , що вказує на наявність позитивних носіїв. Такі метали мають енергетичну діаграму типу, зображеного на рис. 2,б. Якщо внесок у провідність дають і дірки й електрони, знак може бути як позитивним, так і негативним. Це залежить від відносних концентрацій і рухливостей носіїв струму в такому матеріалі.

### Електричні властивості $p$ - $n$ -переходів

Контакт напівпровідників  $p$ - і  $n$ - типів утворює так званий  $p$ - $n$ -перехід – структуру з цілим набором нових властивостей, головною з яких є одностороння провідність електричного струму при прикладенні прямого зміщення, коли “+” напруги подано до  $p$ - області, а “-” до  $n$ - області.

При утворенні  $p$ - $n$ -переходу електрони з  $n$ -області дифундують у  $p$ -область, а дірки – з  $p$ -області в  $n$ -область. Дифузія продовжується доти, поки дифузійні потоки не урівноважаться дрейфовими, зв'язаними з виникненням контактного електричного поля. Це поле виникає внаслідок утворення двошарового об'ємного заряду іонізованих домішок: позитивних донорів у  $n$ -області і негативних акцепторів у  $p$ -області. В об'ємному заряді електронейтральність порушена через відхід електронів з боку  $n$ -області і дірок

з боку  $p$ -області. У результаті цього між  $n$ - і  $p$ -областями утворюється потенційний бар'єр, величина якого залежить від рівня легування (рівня насиченості домішками)  $p$ - і  $n$ -областей і від властивостей власного напівпровідника.

Зонна діаграма прямозмщеного  $p$ - $n$ -переходу зображена на рис. 7,б. При цьому висота потенційного бар'єра  $p$ - $n$  переходу зменшується на величину прикладеної напруги. В наслідок зменшення бар'єру, відбувається так звана **інжекція** – упорскування електронів з  $n$ -області в  $p$ -область і дірок з  $p$ -області в  $n$ -область. Це веде до збільшення концентрації неосновних носіїв: електронів в  $p$ -області і дірок в  $n$ -області. Для ілюстрації цих процесів на рис. 7,в зображено графіки розподілу концентрації основних і неосновних носіїв струму.

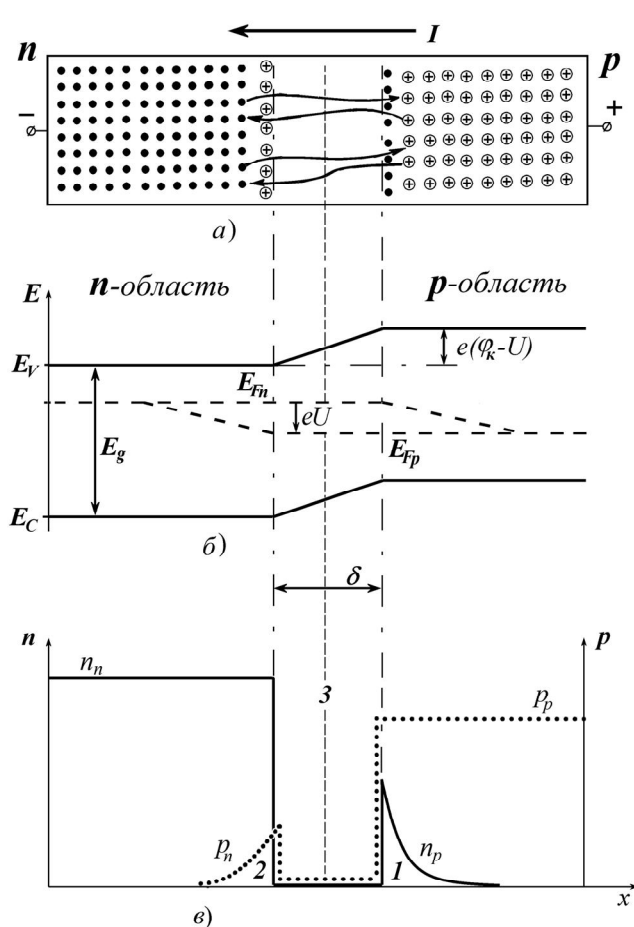


Рисунок 7 –  $p$ - $n$ -перехід за прямого зміщення:  
 а) – схема руху носіїв струму; б) – зонна діаграма; в) – концентрації носіїв заряду (суцільна лінія – концентрація вільних електронів, точкова – концентрація дірок)

Оскільки концентрація неосновних носіїв заряду стала більше рівноважної, то виникають дифузійні потоки неосновних нерівноважних електронів від області об'ємного заряду в глибину  $p$ -області і дірок в глибину  $n$ -області. Цим протилежно спрямованим дифузійним потокам нерівноважних електронів і дірок відповідають однаково спрямовані ліворуч електричні струми на рис. 7,а. З віддаленням від області об'ємного заряду концентрації інжекттованих носіїв зменшується внаслідок рекомбінації, і загальний струм перерозподіляється від дифузійного струму неосновних носіїв до дрейфового струму основних носіїв. На відстані декількох дифузійних довжин від області об'ємного заряду в  $p$ - і  $n$ - областях струм практично повністю переноситься основними носіями струму – електронами в  $n$ -області і дірками в  $p$ -області.

Розподіл нерівноважних (надлишкових) електронів і дірок описується розподілом Фермі-Дірака, в якому замінюють рівень Фермі на квазірівні Фермі окремо для електронів і дірок.

На рис. 7,б подано розщеплення рівня Фермі на два квазірівні в області порушення рівноваги. На відстані декількох дифузійних довжин від області об'ємного заряду як в  $p$ -, так і в  $n$ -області концентрації основних і неосновних носіїв струму досягають рівноважного значення, і квазірівні Фермі зливаються в один рівень Фермі. Для збереження електронейтральності концентрація основних носіїв збільшується

на ту ж величину, що і концентрація неосновних носіїв. Але кратність збільшення концентрації основних носіїв буде набагато менше кратності збільшення концентрації неосновних носіїв, оскільки рівноважна концентрація основних носіїв, як правило, на декілька порядків більше, ніж неосновних. Іншими словами: порушення рівноваги основних носіїв незначне, тоді як порушення рівноваги неосновних носіїв може бути дуже великим.

Розподіл концентрації нерівноважних носіїв по координаті при стаціонарному збудженні (інжекції):

$$\Delta n = \Delta n_0 \cdot \exp(-x / L_n), \quad \Delta p = \Delta p_0 \cdot \exp(-x / L_p), \quad (40a)$$

де  $\Delta n_0$  – концентрація нерівноважних електронів при  $x = 0$ ;  $\Delta p_0$  – концентрація нерівноважних дірок при  $x = 0$ ;  $L_n$  – дифузійна довжина електронів;  $L_p$  – дифузійна довжина дірок.

Розподіл концентрації нерівноважних носіїв у часі:

$$\Delta n = \Delta n_0 \cdot \exp(-t / \tau_n), \quad \Delta p = \Delta p_0 \cdot \exp(-t / \tau_p), \quad (40б)$$

де  $\Delta n_0$  – концентрація нерівноважних електронів при  $t = 0$ ;  $\Delta p_0$  – концентрація нерівноважних дірок при  $t = 0$ ;  $\tau_n$  – час життя електронів;  $\tau_p$  – час життя дірок.

З формул (40a) і (40б) видно наступне: дифузійна довжина є відстанню, на якій концентрація нерівноважних носіїв зменшується внаслідок рекомбінації в  $e$  раз ( $e \approx 2,72$ ); час життя є часом, за який концентрація нерівноважних носіїв зменшується внаслідок рекомбінації в  $e$  разів.

Дифузійна довжина електронів і дірок:

$$L_n = \sqrt{D_n \cdot \tau_n}, \quad L_p = \sqrt{D_p \cdot \tau_p}, \quad (41)$$

де  $\tau_n, \tau_p$  – час життя електронів і дірок, а коефіцієнти дифузії електронів і дірок:

$$D_n = \frac{kT}{e} \cdot \mu_n, \quad D_p = \frac{kT}{e} \cdot \mu_p, \quad (42)$$

де  $k$  – стала Больцмана;  $T$  – температура;  $\mu_n$  і  $\mu_p$  – рухливості електронів і дірок відповідно.

Густина дифузійного струму електронів і дірок:

$$j_n = e \cdot D_n \frac{d\Delta n}{dx}, \quad j_p = -e \cdot D_p \frac{d\Delta p}{dx}, \quad (43)$$

де  $e$  – модуль заряду електрона (дірки);  $D_n$  і  $D_p$  – коефіцієнти дифузії електронів і дірок відповідно.

При розподілі носіїв вигляду (40) при  $x = 0$

$$\frac{d\Delta n}{dx} = -\frac{\Delta n_0}{L_n}, \quad \frac{d\Delta p}{dx} = -\frac{\Delta p_0}{L_p}. \quad (44)$$

Підставивши (44) у (43), одержимо при  $x = 0$ :

$$j_n = e \cdot D_n \frac{\Delta n_0}{L_n}, \quad j_p = -e \cdot D_p \frac{\Delta p_0}{L_p}. \quad (45)$$

Контактна різниця потенціалів за відсутності зміщення:

$$\Phi_{k0} = \frac{kT}{e} \cdot \ln \frac{n_n \cdot p_p}{n_i^2}, \quad (46)$$



де  $k$  – стала Больцмана;  $T$  – температура;  $e$  – заряд електрона;  $n_n$  і  $p_p$  – концентрації основних електронів в  $n$ -області і дірок в  $p$ - області відповідно;  $n_i$  – власна концентрація електронів.

У переважній більшості випадків:

$$n_n = N_D; \quad p_p = N_A, \quad (47)$$

де  $N_D$  – концентрація донорів в  $n$ -області;  $N_A$  – концентрація акцепторів у  $p$ - області.

Висота потенційного бар'єру  $p$ - $n$  переходу в  $eV$  дорівнює падінню напруги на  $p$ - $n$  переході:

$$U_{p-n} = \phi_{k0} - U, \quad (48)$$

де  $U$  – прикладена зовнішня напруга.

Вольтамперна характеристика  $p$ - $n$  переходу:

$$j = j_s \left( \exp \frac{e \cdot U}{kT} - 1 \right), \quad (49)$$

де густина струму насичення

$$j_s = e \left( D_n \frac{n_p}{L_n} + D_p \frac{p_n}{L_p} \right). \quad (50)$$

Якщо врахувати (20), отримаємо:

$$j_s = en_i^2 \left( \frac{D_n}{p_p L_n} - \frac{D_p}{n_n L_p} \right). \quad (51)$$

Далі підставимо формули (41) і (42) у (51)

$$j_s = en_i^2 \left( \frac{kT}{e} \mu_n \frac{1}{p_p \sqrt{\frac{kT}{e} \mu_n \tau_n}} + \frac{kT}{e} \mu_p \frac{1}{n_n \sqrt{\frac{kT}{e} \mu_p \tau_p}} \right). \quad (52)$$

Після нескладних перетворень отримаємо

$$j_s = \sqrt{ekT} n_i^2 \left( \frac{1}{p_p} \sqrt{\frac{\mu_n}{\tau_n}} + \frac{1}{n_n} \sqrt{\frac{\mu_p}{\tau_p}} \right), \quad (53)$$

### Ємність $p$ - $n$ -переходу

Як видно на рис. 7, на невеликих відстаннях (частки  $\mu\text{км}$ ) від технологічної межі (3) в  $p$ - і  $n$ -областях утворюється область об'ємного заряду з двох шарів: негативного в  $p$ -області (2) і позитивного в  $n$ -області (1). Область об'ємного заряду має ємнісні властивості на зразок конденсатора з площею пластин, що дорівнює площі  $p$ - $n$ -переходу  $S$  і відстанню між пластинами, яка дорівнює ширині  $p$ - $n$ -переходу:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \cdot \varepsilon}{e} (\phi_{k0} - U) \cdot \frac{N_D + N_A}{N_D \cdot N_A}}, \quad (54)$$

де  $\varepsilon_0$  – електрична постійна;  $\varepsilon$  – відносна діелектрична проникність

напівпровідника;  $\phi_{k0}$  – контактна різниця потенціалів;  $N_A$  і  $N_D$  – концентрації іонізованих акцепторів у  $p$ -області і донорів у  $n$ -області відповідно;  $U$  – прикладена зовнішня напруга (позитивна для прямого зміщення і негативна – для зворотного).

Тоді, з урахуванням формули плоского конденсатора, можна одержати бар'єрну ємність  $p$ - $n$ -переходу:

$$C = S \sqrt{\frac{e \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0}{2(\phi_{k0} - U)} \cdot \frac{N_A \cdot N_D}{N_A + N_D}}, \quad (55)$$

Позначення величин як і у формулі (51).

## ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

### Приклад 1

Обчислити питомий опір металевого провідника, що має густина  $970 \text{ кг/м}^3$  і молярну масу  $0,023 \text{ кг/моль}$ , якщо відомо, що на кожен атом припадає один електрон, а середня швидкість дрейфу електронів в електричному полі напруженістю  $0,1 \text{ В/м}$  складає  $5 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$ .

Дано:

$$D = 970 \text{ кг/м}^3$$

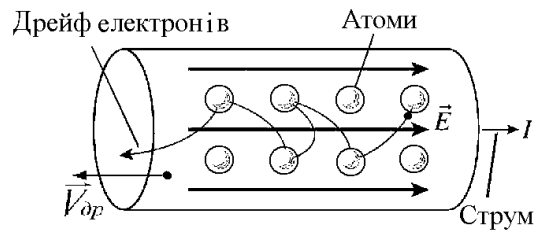
$$M = 0,023 \text{ кг/моль}$$

$$V_{др} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$$

$$E = 0,1 \text{ В/м}$$

$$n_0 = 1$$

$$\rho - ?$$



**Розв'язок.** Питомий опір металу:

$$\rho = \frac{1}{e \cdot n \cdot \mu_n}, \quad (1.1)$$

де  $e$  – заряд електрона;  $n$  – концентрація електронів;  $\mu_n$  – їхня рухливість.

По визначенню рухливість носіїв заряду:

$$\mu_n = \frac{V_{др}}{E}, \quad (1.2)$$

де  $V_{др}$  – дрейфова швидкість електронів;  $E$  – напруженість електричного поля.

Концентрація електронів визначається концентрацією атомів  $n_{ам}$  і кількістю електронів на один атом  $n_0$ :

$$n = n_0 \cdot n_{ам} = n_0 \cdot \frac{DN_A}{M}, \quad (1.3)$$

де  $D$  – густина металу;  $M$  – його молярна маса;  $N_A$  – число Авогадро.

Підставивши (1.2) і (1.3) у (1.1) одержимо:

$$\rho = \frac{ME}{en_0 DN_A V_{др}}. \quad (1.4)$$

Перевіримо одиницю виміру одержаної величини:

$$[\rho] = \frac{\text{кг} \cdot \text{В} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{моль} \cdot \text{с}}{\text{моль} \cdot \text{м} \cdot \text{кл} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{\text{В} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \text{Ом} \cdot \text{м}$$

Підставимо в одержану формулу числові значення величин і зробимо обчислення:

$$\rho = \frac{0,023 \cdot 0,1}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 970 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 4,92 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

**Відповідь:**  $\rho = 4,92 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}.$

### Приклад 2

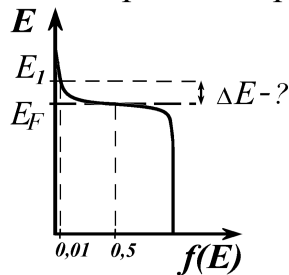
Визначити, на скільки електрон-вольтів вище рівня Фермі рівень енергії, ймовірність заповнення якого електронами при 300 дорівнює 1%.

Дано:

$$f(E_1) = 0,01$$

$$T = 300 \text{ К}$$

$\Delta E - ?$



**Розв'язок.** Ймовірність заповнення енергетичного рівня електронами визначається функцією розподілу Фермі-Дірака:

$$f(E_1) = \frac{1}{e^{\frac{E_1 - E_F}{kT}} + 1}, \quad (2.1)$$

де  $E_1$  – даний енергетичний рівень;  $E_F$  – рівень Фермі;  $k$  – постійна Больцмана;  $T$  – температура. Вирішимо це рівняння відносно  $(E_1 - E_F)$ :

$$f(E_1) \cdot e^{\frac{E_1 - E_F}{kT}} + f(E_1) = 1; \quad (2.2)$$

$$e^{\frac{E_1 - E_F}{kT}} = \frac{1 - f(E_1)}{f(E_1)}; \quad (2.3)$$

$$\Delta E = (E_1 - E_F) = kT \cdot \ln \frac{1 - f(E_1)}{f(E_1)}. \quad (2.4)$$

Перевіримо одиницю виміру одержаної величини:

$$[\Delta E] = \frac{eV}{K} \cdot K = eV.$$

Підставимо в одержану формулу числові значення величин і зробимо обчислення:

$$\Delta E = 8,62 \cdot 10^{-5} \cdot 300 \cdot \ln \frac{1 - 0,01}{0,01} = 0,119 \text{ eV}.$$

**Відповідь:**  $\Delta E = 0,119 \text{ eV}.$

### Приклад 3

Зразок напівпровідника  $n$ -типу має питомий опір  $0,03 \text{ Ом} \cdot \text{м}.$  Визначити концентрацію власних, неосновних і основних носіїв струму. Ширина

забороненої зони дорівнює  $1,5 \text{ eV}$ , відносна ефективна маса електронів дорівнює  $0,25$ , а дірок –  $0,6$ . Рухливість основних носіїв заряду дорівнює  $0,1 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ . Температура дорівнює  $300 \text{ К}$ .

Дано:

$$\rho = 0,03 \text{ Ом}\cdot\text{м}$$

$$E_g = 1,5 \text{ eV}$$

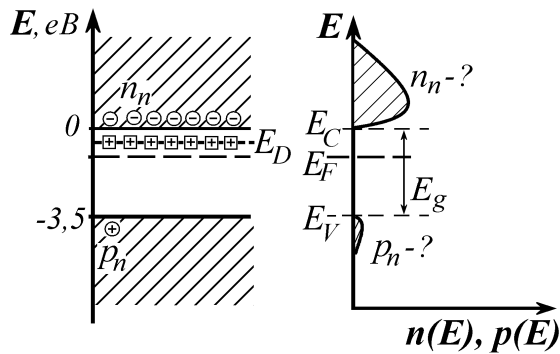
$$\frac{m_n}{m_0} = 0,25$$

$$\frac{m_p}{m_0} = 0,6$$

$$T = 300 \text{ К}$$

$$\mu_n = 0,1 \text{ м}^2 / \text{В}\cdot\text{с}$$

$$n_i, p_n, n_n - ?$$



**Розв'язок.** Будемо вважати, що у напівпровідника явно виражена домішкова провідність. (Про це говорить низький питомий опір). Тоді для питомого опору можна записати:

$$\rho = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{e \cdot n_n \cdot \mu_n}, \quad (3.1)$$

де  $e$  – заряд електрона;  $n_n$  – концентрація основних електронів;  $\mu_n$  – рухливість електронів. Звідси

$$n_n = \frac{1}{\rho \cdot e \cdot \mu_n}. \quad (3.2)$$

Концентрація власних носіїв струму

$$n_i = \sqrt{4(m_n \cdot m_p)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{2\pi kT}{h^2}\right)^3} \cdot e^{-\frac{E_g}{2kT}}, \quad (3.3)$$

де  $m_n, m_p$  – ефективна маса електронів і дірок відповідно;  $k$  – стала Больцмана у  $[\text{Дж}/\text{К}]$ ;  $T$  – температура;  $h$  – стала Планка у  $[\text{Дж}\cdot\text{с}]$ . В експоненті:  $E_g$  – ширина забороненої зони у  $[\text{eV}]$ ;  $k$  – стала Больцмана у  $[\text{eV}/\text{К}]$ .

Відомо, що

$$n_i^2 = n_n \cdot p_n, \quad (3.4)$$

де  $p_n$  – концентрація неосновних дірок в  $n$ -області. Звідси:

$$p_n = \frac{n_i^2}{n_n}. \quad (3.5)$$

Підставивши (3.3) в (3.5), одержимо:

$$p_n = \frac{32}{h^6} (m_n \cdot m_p)^{3/2} (\pi kT)^3 \cdot \rho \cdot e \cdot \mu_n \cdot \exp\left(-\frac{E_g}{kT}\right). \quad (3.6)$$

Перевіримо одиниці виміру величин:

$$[p_n] = \frac{(Kz \cdot Kz)^{3/2} \text{Дж}^3 \cdot K^3 \cdot \text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{Кл} \cdot \text{м}^2}{\text{Дж}^6 \cdot \text{с}^6 \cdot K^3 \cdot B \cdot c} = \frac{Kz^3 \cdot B \cdot \text{м} \cdot A \cdot c \cdot \text{м}^2}{\text{Дж}^3 \cdot \text{с}^6 \cdot A \cdot B \cdot c} = \frac{Kz^3 \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}^6}{Kz^3 \cdot \text{м}^6 \cdot \text{с}^6} = \text{м}^{-3};$$

$$[n_i] = \sqrt{\frac{(Kz \cdot Kz)^{3/2} \text{Дж}^3 \cdot K^3}{\text{Дж}^6 \cdot \text{с}^6 \cdot K^3}} = \sqrt{\frac{Kz^3}{\text{Дж}^3 \cdot \text{с}^6}} = \sqrt{\frac{\text{с}^6 \cdot Kz^3}{Kz^3 \cdot \text{м}^6 \cdot \text{с}^6}} = \text{м}^{-3};$$

$$[n_n] = \frac{B \cdot c}{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{Кл} \cdot \text{м}^2} = \frac{B \cdot c \cdot A}{B \cdot \text{м} \cdot A \cdot c \cdot \text{м}^2} = \frac{1}{\text{м}^3} = \text{м}^{-3}.$$

Одиниця виміру  $E_g$  дорівнює одиниці виміру  $kT$ , тобто  $\exp\left(-\frac{E_g}{kT}\right)$  є

безрозмірною величиною. Підставивши в отримані формули числові значення величин, зробимо обчислення.

$$n_n = \frac{1}{0,03 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,1} = 2,08 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3};$$

$$n_i = \sqrt{4(0,25 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 0,6 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31})^{3/2} \cdot \left(\frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{(6,63 \cdot 10^{-34})^2}\right)^3} \exp\left(-\frac{1,5}{8,62 \cdot 10^{-5} \cdot 300}\right) =$$

$$= 1,53 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3};$$

$$p_n = \frac{32}{(6,63 \cdot 10^{-34})^6} (0,25 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 0,6 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31})^{3/2} (3,14 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300)^3 \cdot 0,03 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \times$$

$$\times 0,1 \cdot \exp\left(-\frac{1,5}{8,62 \cdot 10^{-5} \cdot 300}\right) = 1,12 \cdot 10^3 \text{ м}^{-3}.$$

Можна скористатися формулою (3.5), підставивши до неї обчислені значення  $n_i$  і  $n_n$ .

**Відповідь:**  $n_i = 1,53 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3}$ ,  $p_n = 1,12 \cdot 10^3 \text{ м}^{-3}$ ,  $n_n = 2,08 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$ .

#### Приклад 4

Прямокутний зразок напівпровідника  $n$ -типу з розмірами  $50 \times 5 \times 1 \text{ мм}$  поміщений у магнітне поле з індукцією  $0,5 \text{ Тл}$ . Вектор магнітної індукції перпендикулярний площини зразка. Під дією подовжньої напруги  $0,42 \text{ В}$  по ньому протікає струм  $20 \text{ мА}$ . ЕРС Холла дорівнює  $6,25 \text{ мВ}$ . Знайти питому електропровідність, рухливість і концентрацію електронів у зразку.

$$L = 50 \text{ мм} = 50 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$H = 5 \text{ мм} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$B = 1 \text{ мТл} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}$$

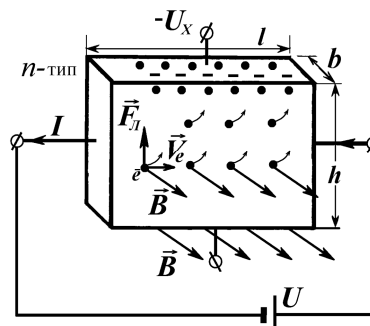
$$B = 0,5 \text{ Тл}$$

$$U = 0,42 \text{ В}$$

$$I = 20 \text{ мА} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ А}$$

$$U_H = 6,25 \text{ мВ} = 6,25 \cdot 10^{-3} \text{ В}$$

$$\gamma, n, \mu_n - ?$$



**Розв'язок.** Питомий опір напівпровідника:

$$\rho = \frac{Rbh}{l}, \quad (4.1)$$

де  $l$  – довжина зразка;  $h$  – його висота і  $b$  – товщина (найменший розмір).

За законом Ома опір зразка:

$$R = \frac{U}{I}, \quad (4.2)$$

де  $U$  – подовжня напруга;  $I$  – сила струму через зразок.

Питома електропровідність зразка:

$$\gamma = \frac{1}{\rho} = \frac{I \cdot l}{U b h}. \quad (4.3)$$

ЕРС Холла:

$$U_X = \frac{1}{en} \cdot \frac{BI}{b} = R_X \cdot \frac{BI}{b}. \quad (4.4)$$

Звідки:

$$R_X = \frac{U_X \cdot b}{I \cdot B}, \quad (4.5)$$

де  $B$  – магнітна індукція.

Тоді концентрація електронів:

$$n = \frac{1}{R_X \cdot e} = \frac{IB}{U_X \cdot e \cdot b}. \quad (4.6)$$

Питома електропровідність зразка:

$$\gamma = e \cdot n \cdot \mu. \quad (4.7)$$

Рухливість електронів:

$$\mu_n = \frac{\gamma}{e \cdot n}. \quad (4.8)$$

Перевіримо одиниці виміру одержаних величин:

$$[\gamma] = \frac{A \cdot m}{B \cdot m \cdot m} = \text{Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$$

$$[n] = \frac{A \cdot \text{Тл}}{B \cdot m \cdot \text{Кл}} = \frac{A \cdot B \cdot c}{\text{м}^2 \cdot B \cdot m \cdot A \cdot c} = \text{м}^{-3}$$

$$[\mu_n] = \frac{\text{м}^3}{\text{Ом} \cdot m \cdot \text{Кл}} = \frac{\text{м}^2 \cdot A}{B \cdot c \cdot A} = \frac{\text{м}^2}{B \cdot c}$$

Підставивши в одержані формули числові значення величин, зробимо обчислення:

$$\gamma = \frac{0,02 \cdot 5,05}{0,42 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}} = 476 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1};$$

$$n = \frac{0,02 \cdot 0,5}{6,25 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}} = 10^{22} \text{ м}^{-3};$$

$$\mu_n = \frac{476}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{22}} = 0,298 \text{ м}^2 / (B \cdot c).$$

**Відповідь:**  $\gamma = 476 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ ,  $n = 10^{22} \text{ м}^{-3}$ ,  $\mu_n = 0,298 \text{ м}^2 / (B \cdot c)$ .

### Приклад 5

Питомий опір  $p$ -області  $p$ - $n$ -переходу дорівнює  $0,015 \text{ Ом}\cdot\text{м}$ , а  $n$ -області –  $0,012 \text{ Ом}\cdot\text{м}$ . Обчислити висоту потенційного бар'єра  $p$ - $n$ -переходу, якщо ширина забороненої зони  $3,5 \text{ eV}$ . Рухливість основних електронів і дірок дорівнює  $0,1 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$  і  $0,02 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$  відповідно. Відносна ефективна маса електрона дорівнює  $0,25$ , а дірки –  $0,6$ . Температура дорівнює  $300 \text{ }^\circ\text{K}$ .

$$\rho_p = 0,015 \text{ Ом}\cdot\text{м}$$

$$\rho_n = 0,012 \text{ Ом}\cdot\text{м}$$

$$E_g = 3,5 \text{ eV}$$

$$\mu_p = 0,02 \text{ м}^2 / \text{В}\cdot\text{с}$$

$$\mu_n = 0,1 \text{ м}^2 / \text{В}\cdot\text{с}$$

$$T = 300 \text{ K}$$

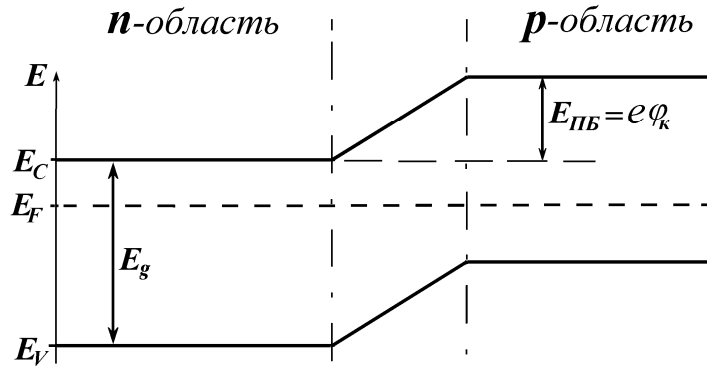
$$\frac{m_n}{m_0} = 0,25$$

$$m_0$$

$$\frac{m_p}{m_0} = 0,6$$

$$m_0$$

$$E_{ПБ} - ?$$



**Розв'язок.** Висота потенційного бар'єра  $E_{ПБ}$  в  $\text{eV}$  дорівнює контактної різниці потенціалів, яка визначається формулою:

$$U_k = \frac{kT}{e} \cdot \ln \frac{n_n p_p}{n_i^2}, \quad (5.1)$$

де  $k$  – стала Больцмана;  $T$  – температура;  $e$  – заряд електрона;  $n_n$  – концентрація електронів в  $n$ -області;  $p_p$  – концентрація дірок в  $p$ -області;  $n_i$  – власна концентрація носіїв струму.

Питомий опір визначається виразами:

$$\rho_n = \frac{1}{e \cdot n_n \cdot \mu_n}; \quad (5.2)$$

$$\rho_p = \frac{1}{e \cdot p_p \cdot \mu_p}, \quad (5.3)$$

де  $\mu_n$  і  $\mu_p$  – рухливість електронів і дірок відповідно. Звідси:

$$n_n = \frac{1}{e \cdot \mu_n \cdot \rho_n}; \quad (5.4)$$

$$p_p = \frac{1}{e \cdot \mu_p \cdot \rho_p}. \quad (5.5)$$

Власна концентрація носіїв струму:

$$n_i^2 = N_C N_V \cdot \exp(-E_g / kT), \quad (5.6)$$

де  $E_g$  – ширина забороненої зони.

$$N_V = 2 \left( \frac{2\pi \cdot m_p \cdot kT}{h^2} \right)^{3/2}; \quad (5.7)$$

$$N_C = 2 \left( \frac{2\pi \cdot m_n \cdot kT}{h^2} \right)^{3/2}. \quad (5.8)$$

Підставивши (5.7) і (5.8) у (5.6), а потім результат цього і (5.4) разом з (5.5) – в (5.1), одержимо:

$$U_k = \frac{kT}{e} \cdot \ln \frac{h^6 \cdot \exp(E_g / kT)}{e^2 \cdot \mu_n \cdot \rho_n \cdot \mu_p \cdot \rho_p \cdot 4(2\pi \cdot kT)^3 \cdot (m_n \cdot m_p)^{3/2}}. \quad (5.9)$$

Перевіримо одиницю виміру:

$$[U_k] = \left[ \frac{kT}{e} \right] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}}{\text{К} \cdot \text{Кл}} = \frac{\text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \text{В}.$$

При цьому, логарифм повинен бути безрозмірним:

$$[\ln A] = \frac{\text{Дж}^6 \cdot \text{с}^6 \cdot 1 \cdot \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{К}^3}{\text{Кл}^2 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{Дж}^3 \cdot \text{К}^3 \cdot \text{Кл}^3} = \frac{\text{Кл}^3 \cdot \text{с}^6 \cdot \text{м}^6 \cdot \text{В}^2 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{А}^2}{\text{с}^6 \cdot \text{А}^2 \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}^6 \cdot \text{В}^2 \cdot \text{Кл}^3} = 1.$$

Підставимо в отриману формулу числові значення величин і зробимо обчислення:

$$U_k = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,602 \cdot 10^{-19}} \cdot \ln \frac{(6,63 \cdot 10^{-34})^6 \cdot \exp(3,5 / 8,62 \cdot 10^{-5} \cdot 300)}{(1,602 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 0,1 \cdot 0,012 \cdot 0,02 \cdot 0,015 \cdot 4(2 \cdot 3,14 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300)^3} \times$$

$$\times \frac{1}{(0,25 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 0,6 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31})^{3/2}} = 3,10 \text{ В}$$

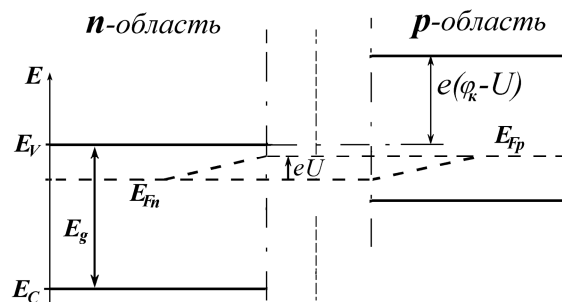
**Відповідь:**  $E_{\text{ПБ}} = 3,1 \text{ eВ}$ .

### Приклад 6

*p-n*-перехід сформовано в арсеніді індію (InAs) з відносною діелектричною проникністю 14,6. Концентрація основних носіїв струму при температурі 300 К в *p*-області –  $10^{22} \text{ м}^{-3}$ , у *n*-області –  $10^{21} \text{ м}^{-3}$ , а, площа поперечного перерізу *p-n*-переходу  $0,01 \text{ см}^2$ . Визначити бар'єрну ємність і ширину *p-n*-переходу, якщо до *p-n*-переходу прикладена зворотна напруга 100 В.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 14,6 \\ T &= 100 \text{ К} \\ p_p &= 10^{22} \text{ м}^{-3} \\ n_n &= 10^{21} \text{ м}^{-3} \\ S &= 0,01 \text{ см}^2 \\ U &= 100 \text{ В} \end{aligned}$$

$C, \delta - ?$



**Розв'язок.** Концентрація домішок дорівнює концентрації основних носіїв струму:

$$N_A = p_p, \quad N_D = n_n. \quad (6.1)$$



Ширину  $p$ - $n$ -переходу знайдемо за формулою:

$$d = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \cdot e}{e} (\varphi_{k0} - U) \cdot \frac{N_D + N_A}{N_D \cdot N_A}}, \quad (6.2)$$

де  $\varepsilon_0$  – електрична постійна;  $e$  – заряд електрона;  $\varepsilon$  – відносна діелектрична проникність;  $\varphi_{k0}$  – контактна різниця потенціалів;  $U$  – прикладена напруга;  $N_A$  і  $N_D$  – концентрації іонізованих акцепторів у  $p$ -області і донорів у  $n$ -області відповідно.

Бар'єрну ємність знайдемо за формулою:

$$C = S \sqrt{\frac{e \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0}{2(\varphi_{k0} - U)} \cdot \frac{N_A \cdot N_D}{N_A + N_D}}, \quad (6.3)$$

де  $S$  – площа  $p$ - $n$ -переходу.

Перевіримо одиниці виміру величин, що розраховуються:

$$[\delta] = m^2 \sqrt{\frac{1 \cdot \Phi / m \cdot 1}{Kл} (B - B) \frac{(m^{-3} + m^{-3})}{m^3 \cdot m^3}} = \sqrt{\frac{Kл \cdot B \cdot m^{-3}}{B \cdot m^{-2} \cdot m^{-3} \cdot Kл}} = \sqrt{m^2} = m,$$

$$[C] = m^2 \sqrt{\frac{Kл \cdot 1 \cdot \Phi / m}{1 \cdot (B - B)} \cdot \frac{m^3 \cdot m^3}{m^{-3} + m^{-3}}} = m^2 \sqrt{\frac{Kл \cdot Kл}{B \cdot m^4 \cdot B}} = m^2 \frac{Kл}{B \cdot m^2} = \frac{Kл}{B} = \Phi.$$

Підставивши у формули числові значення величин, зробимо обчислення (оскільки значення  $\varphi_{k0}$ , набагато менше 100 В, у формулах (6.2) і (6.3) ним можна зневажити):

$$\delta = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 14,6 \cdot 100 \cdot \frac{10^{21} + 10^{22}}{10^{21} \cdot 10^{22}}}{1,6 \cdot 10^{-19}}} = 1,33 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 13,3 \text{ мкм},$$

$$C = 10^{-6} \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 14,6 \cdot 10^{22} \cdot 10^{21}}{2 \cdot (100) \cdot (10^{22} + 10^{21})}} = 9,69 \cdot 10^{-12}.$$

**Відповідь:**  $\delta = 13,3 \text{ мкм}$ ,  $C = 9,69 \text{ пФ}$ .