10 лекц.

§ 4–1. ТАБЛИЧНА МОДЕЛЬ ПОВЕДІНКИ КЛІЄНТА СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

Припущення

Клієнт страхової компанії є власником певного ***активу*** (майно, внесок у банк, людський капітал), величина якого виражається у грошовій формі. Величину активу будемо позначати через A.

Можливий ***страховий випадок***, коли клієнт втрачає актив або його частку. Це може бути у випадку стихійного лиха, пограбування, банкрутства фінансової установи, якій клієнт довірив свій актив, несприятливої кон'юнктури ринку (чорні вівторки та п'ятниці), втрати працездатності внаслідок виробничої або побутової травми. Будемо розглядати спрощений випадок, коли актив або ***повністю недоторканий,*** або ***повністю вилучений.***

Припускається, що клієнт може оцінити ***імовірність*** страхового випадку. Позначатимемо її через π.

Для того щоб бути більш певним у своєму майбутньому, власник активу може звернутись до ***страхової компанії*** й ***застрахувати актив або його частку***.

Компанія пропонує такі умови страхування:

1) клієнт сплачує компанії ***страховий внесок, пропорційний частці страхованого активу***. Позначимо через r ***питомий страховий внесок***, або ***ціну страхування***, тобто страховий внесок, що припадає на одиницю страхованого активу;
2) якщо трапляється страховий випадок, компанія сплачує клієнтові ***страхову винагороду***, яка теж ***пропорційна частці застрахованого активу***. Через q будемо позначати ***питому страхову винагороду***, тобто ***страхову винагороду, що припадає на одиницю страхованого активу***.

Аналіз взаємодії страхової компанії та її клієнтів буде здійснений за таких припущень щодо їх поведінки:

I. Клієнт залежно від питомого страхового внеску та питомої страхової винагороди ***обирає частку страхованого активу***.

II. Клієнт є ***несхильним до ризику***, тобто для нього більш привабливим є отримання гарантованого сподіваного виграшу, ніж участь у ризикованій акції, яка має такий самий сподіваний ефект. Припущення можна перефразувати в більш звичних термінах для страхової справи. Наприклад, власник будинку вартістю 400,000 гривень може його втратити внаслідок стихійного лиха, імовірність якого становить 0.0001 на рік. Сподіваний програш становить у цьому випадку ***400,000 x 0.0001 = 40***. Проте власник будинку залюбки буде сплачувати 100, а то й 200 гривень щороку страховій компанії, аби вона йому гарантувала відшкодування вартості будинку.

III. Як обґрунтовувалось у розділах 1 та 2, моделлю системи цінностей людини, яка не байдужа до ризику, є ***сподівана корисність***. Чим більша сподівана корисність для людини, тим більш комфортно вона себе почуває.

IV. Також будемо припускати, що функція корисності за Нейманом-Моргенштерном клієнта є монотонно зростаючою, тобто чим більший актив має особа, тим краще для неї.

Числовий приклад

Величина активу становить 20,000 гривень. Власник активу – особа, несхильна до ризику. Гранична корисність для власника активу задається формулою:

$$MU = \begin{cases} 20, & 0 \le x \le 5 \\ 10, & 5 < x \le 10 \\ 5, & 10 < x \le 15 \\ 1, & 15 < x \le 20, \end{cases} \qquad (4\text{–}1)$$

де інтервали зміни величини активу вказані в тисячах.

Імовірність страхового випадку $\pi = 0.0001$. Питомий страховий платіж (надалі будемо його називати просто **страховим платежем**) $r = 0.001$, питома страхова винагорода $q = 1$. Іншими словами, кожна застрахована 1,000 відшкодовується повністю у разі страхового випадку, але для цього клієнт повинен сплатити компанії 1 гривню.

Чи буде власник активу страхуватись взагалі, а якщо буде, то яким обсягом?

Насамперед кілька зауважень щодо системи цінностей потенційного клієнта. Найбільш вагомою для нього буде втрата останніх одиниць його активу (кожна одиниця серед останніх п'яти важить 20 ютилів). Далі вагомість втрати зменшується. В *Табл. 4–1* (с. 140) наведена корисність багатства потенційного клієнта.

Табл. 4–1. **Корисність залишку активу після страхового випадку (згідно з граничною корисністю (4–1))**

Величина активу (x) (в тис.)	Гранична корисність (MU)	Корисність ($u(x)$)
0	20	0
1	20	20
2	20	40
3	20	60
4	20	80
5	20	100
6	10	110
7	10	120
8	10	130
9	10	140
10	10	150
11	5	155
12	5	160
13	5	165
14	5	170
15	5	175
16	1	176
17	1	177
18	1	178
19	1	179
20	1	180

Табл. 4–2. **Обсяг страхування та сподівана корисність ($\pi = 0.0001$, $r = 0.001$)**

Обсяг страхування	Сподівана корисність
0	179.9820
1	179.9830
2	179.9840
3	179.9850
4	179.9860
5	**179.9870**
6	**179.9870**
7	**179.9870**
8	**179.9870**
9	**179.9870**
10	**179.9870**
11	179.9865
12	179.9860
13	179.9855
14	179.9850
15	179.9845
16	179.9836
17	179.9827
18	179.9818
19	179.9809
20	179.9800

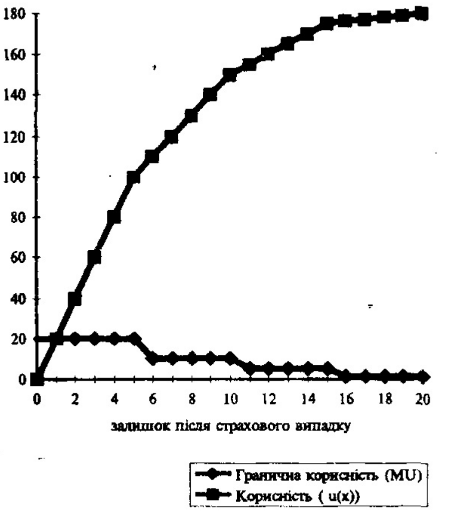

Рис. 4–1. Функція корисності та гранична корисність клієнта страхової компанії

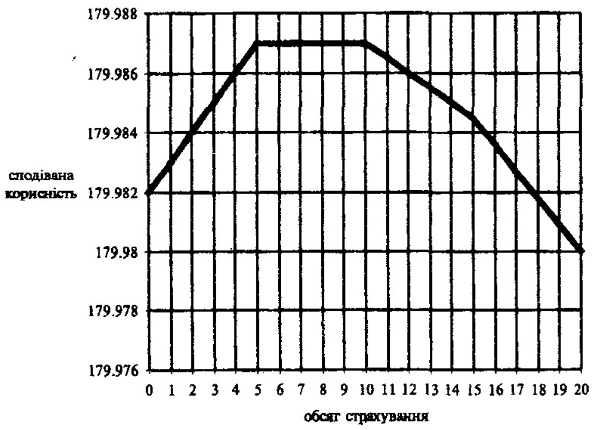

Рис. 4–2. Обсяг страхування та сподівана корисність

Рис. 4–1 (с. 141) є графічним відображенням *Табл. 4–1.*

Очевидно, що функція корисності клієнта є увігнутою, тобто він несхильний до ризику. Для нього найбільш вагомими є останні одиниці втрати активу після страхового випадку. Порівняємо добробут клієнта за відсутності страхування та у випадку, коли він страхує перші одиниці активу.

Якщо клієнт не страхується зовсім, то він матиме, як і раніше, актив обсягом 20,000 за відсутності страхового випадку, та нічого, якщо страховий випадок трапиться. З точки зору корисності, він матиме 180 ютилів (див. *Табл. 4–1,* с. 140) з імовірністю 0.9999 та нуль з імовірністю 0.0001. Сподівана корисність становитиме:

$$0.9999 \times 180 + 0.0001 \times 0 = 179.982.$$

Якщо клієнт страхує 4 тисячі, то у разі відсутності страхового випадку у нього залишиться:

$$20{,}000 - 4{,}000 \times 0.001 = 19{,}996,$$

а у разі страхового випадку – 4,000 гривень. Корисність першої суми, згідно з *Табл. 4–1* (с. 140), становитиме 179.996, другої – 80. Звідси, сподівана корисність дорівнюватиме:

$$179.996 \times 0.9999 + 80 \times 0.0001 = 179.986.$$

Таким чином, для особи з функцією корисності, яка відображена в *Табл. 4–1* та на *Рис. 4–1,* страхування обсягом 4 тисячі є більш привабливим порівняно з випадком, коли особа взагалі не страхується.

У *Табл. 4–2* (с. 140) та на *Рис. 4–2* (с. 141) відображені результати аналогічних розрахунків для всіх можливих варіантів страхування з дискретністю 1,000.

Здійснені розрахунки показують, що діапазон від 5 до 10 тисяч містить найпривабливіші обсяги страхування для клієнта.

Закон спадаючої граничної сподіваної корисності

Рис. 4–2 (с. 141) свідчить про увігнутість функції сподіваної корисності для клієнта залежно від обсягу страхування. Цей факт можна перефразувати в термінах ***граничної сподіваної корисності***. Дамо таке означення.

☞ **Граничною сподіваною корисністю** називається приріст сподіваної корисності у разі збільшення обсягу страхування на одиницю (малу).

Увігнутість функції сподіваної корисності свідчить про дію в даному випадку ***закону спадаючої граничної корисності***. В *Табл. 4–3* (с. 142) та на *Рис. 4–3* (с. 142) відображена дія цього закону.

Табл. 4–3. **Гранична сподівана корисність**

Обсяг страхування	Гранична сподівана корисність
0	
1	0.0010
2	0.0010
3	0.0010
4	0.0010
5	0.0010
6	0.0000
7	0.0000
8	0.0000
9	0.0000
10	0.0000
11	−0.0005
12	−0.0005
13	−0.0005
14	−0.0005
15	−0.0005
16	−0.0009
17	−0.0009
18	−0.0009
19	−0.0009
20	−0.0009

Закон спадаючої граничної сподіваної корисності ***розширює*** дію закону спадаючої граничної корисності. У випадку розглянутої схеми страхування сформульований закон означає, що ***кожна додаткова одиниця застрахованого активу приносить його власнику все менший приріст сподіваної корисності.***

Помічена властивість може використовуватись для раціоналізації розрахунків: як тільки гранична сподівана корисність стає від'ємною, розрахунки далі можна не продовжувати.

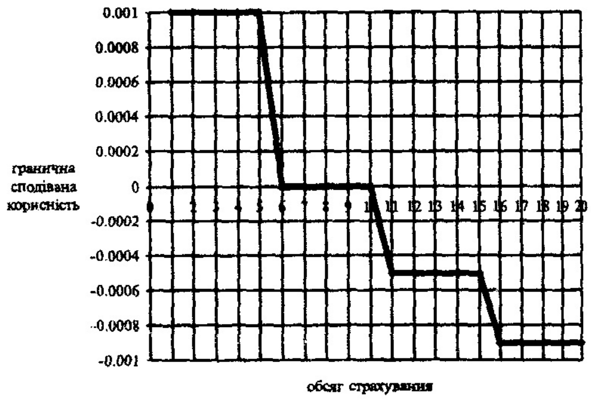

Рис. 4–3. Закон спадаючої граничної сподіваної корисності

Реакція клієнта на зміну параметрів страхування

Якщо зафіксувати страхову премію, то страховий платіж можна інтерпретувати як ***плату за ризик***. Оскільки ризик для людини, несхильної до ризику, – антиблаго (див. Розділ 1 та 2), то плата за нього здійснюється для того, щоб ***ризику позбутись***. Економісту важливо вміти дослідити ринок товару "ризик", й зокрема, наскільки жвавіше йде торгівля цим товаром у разі зміни ціни на ризик.

Зробимо ще один розрахунок за іншого страхового платежу ***r* = *0.003***. Методика розрахунків абсолютно аналогічна до вже наведених. Результати нових розрахунків відображені в *Табл. 4–4* (с. 143) та на *Рис. 4–4* (с. 143).

Табл. 4–4. **Обсяги страхування та сподівана корисність за різних рівнів страхових платежів**

Обсяг страхування	Сподівана корисність (*за* ***r = 0.001***)	Сподівана корисність (*за* ***r = 0.003***)
0	179.9820	179.9820
1	179.9830	179.9810
2	179.9840	179.9800
3	179.9850	179.9790
4	179.9860	179.9780
5	179.9870	179.9770
6	179.9870	179.9750
7	179.9870	179.9730
8	179.9870	179.9710
9	179.9870	179.9690
10	179.9870	179.9670
11	179.9865	179.9645
12	179.9860	179.9620
13	179.9855	179.9595
14	179.9850	179.9570
15	179.9845	179.9543
16	179.9836	179.9516
17	179.9827	179.9487
18	179.9818	179.9458
19	179.9809	179.9429
20	179.9800	179.9400

Рис. 4–4 (с. 143) та *Табл. 4–4* (с. 143) наочно показують, що страховий платіж ***r = 0.003*** (три гривні з кожної тисячі) занадто великий з точки зору клієнта, і він буде ухилятись від страхування. Неважко зміркувати, що занадто великий страховий платіж буде також невигідним і для страхової компанії, оскільки у разі небажання клієнтів страхуватись компанія не матиме прибутку. Знову ж потрібна ***золота середина***! Пошуки її для нас – попереду...

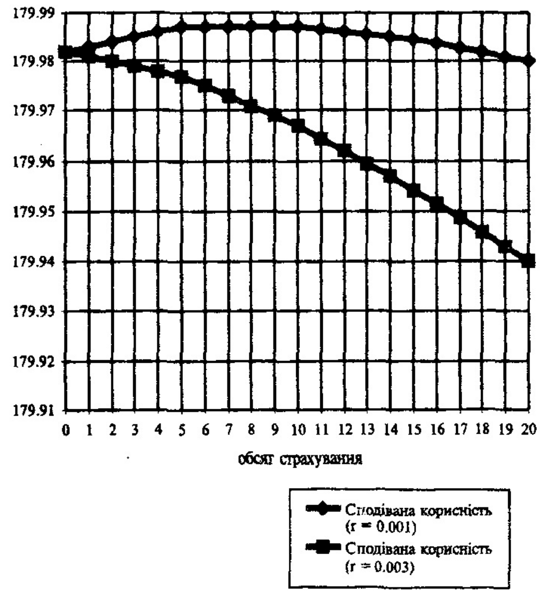

Рис. 4–4. Обсяги страхування та сподівана корисність за різних рівнів страхових платежів

§ 4–2. АНАЛІЗ РІВНОВАГИ ОСОБИ, ЯКА СТРАХУЄТЬСЯ

Математична модель клієнта

Нагадаємо запроваджені позначення:

A – величина активу клієнта;

π – імовірність страхового випадку;

r – питомий страховий внесок (плата страховій компанії за кожну одиницю застрахованого майна);

q – питома страхова винагорода (відшкодування страховою компанією, яке припадає на кожну одиницю застрахованого активу).

Додатково позначимо через

x – величину страхованого активу (її обирає клієнт страхової компанії);

$u(\cdot)$ – функцію корисності за Нейманом-Моргенштерном клієнта, яка визначена на залишку активу після страхового випадку.

Якщо трапиться страховий випадок, то страхова компанія відшкодує клієнтові величину qx. Отже, якщо клієнт застрахував x одиниць активу, й трапився страховий випадок, то у клієнта залишається qx. За решту компанія відповідальності не несе.

Якщо ж страхового випадку не буде, то залишок активу становитиме величину $A - rx$. Корисність у разі страхового випадку становить величину $u(qx)$, в протилежному випадку – $u(A - rx)$. Сподівана корисність за обсягу страхування x дорівнюватиме величині $U(x) = \pi u(qx) + (1 - \pi)u(A - rx)$. Поведінка клієнта описуватиметься моделлю:

$$U(x) = \pi u(qx) + (1 - \pi)u(A - rx) \to \max, \ 0 \le x \le A. \tag{4-2}$$

Гранична сподівана корисність та сподівання граничної корисності

Припустимо, обсяг страхування збільшився на одиницю. Тоді у разі страхового випадку відшкодування зросте на величину q, а корисність – на величину $MU(qx) \cdot q$, де MU – гранична корисність залишку активу. Якщо страхового випадку не буде, то втрата клієнта збільшиться на величину r, а корисність – на величину $MU(A - rx) \cdot r$. Останню величину можна інтерпретувати як ***граничну шкоду*** (або зі знаком мінус), як ***граничну корисність страхування за відсутності страхового випадку***, а величину $MU(qx) \cdot q$ – як ***граничну корисність страхування за наявності страхового випадку***. ***Сподівана гранична корисність*** дорівнюватиме величині:

$$\pi \cdot MU(qx) \cdot q + (1 - \pi) \cdot MU(A - rx) \cdot (-r).$$

Водночас ця величина показує ***приріст сподіваної корисності*** внаслідок зміни (збільшення) обсягу страхування, тобто вона є й ***граничною сподіваною корисністю***.

Отже, гранична сподівана корисність страхування збігається із сподіваною граничною корисністю.

Цей факт також негайно підтверджується відомими правилами диференціювання:

$$U'(x) = (1 - \pi) \cdot u'(A - rx)(-r) + \pi u'(qx)q.$$

Величина $u'(A - rx)(-r)$ є іншим записом величини $MU(A - rx) \cdot (-r)$, тобто граничною корисністю страхування за відсутності страхового випадку, $u'(qx)q$ – величини $MU(qx) \cdot q$, тобто граничною корисністю страхування за наявності страхового випадку.

З припущення про монотонне зростання функції корисності випливає цікавий факт: ***гранична корисність страхування – додатна величина у разі страхового випадку (коли трапляється нещастя) і від'ємна – за відсутності страхового випадку***. На перший погляд, парадоксальне твердження, але за більш детального розгляду воно відповідає логіці поведінки індивіда: ***якщо все гаразд, то гроші, витрачені на страхування, здаються марно втраченими; коли ж трапляється біда, то кожна вкладена гривня в страхування дає незрівнянно більшу користь.***

Теорема про рівновагу

Теорема 4–1

Припустимо, клієнт – несхильний до ризику й має монотонно зростаючу та диференційовану функцію корисності. У цьому разі,

якщо

$$\frac{1-\pi}{\pi}\frac{r}{q} > \frac{u'(0)}{u'(A)}, \tag{4–3}$$

то клієнт ухиляється від страхування,

якщо

$$\frac{1-\pi}{\pi}\frac{r}{q} < \frac{u'(qA)}{u'((1-r)A)}, \tag{4–4}$$

то клієнт страхує весь актив;

якщо ж

$$\frac{u'(qA)}{u'((1-r)A)} < \frac{1-\pi}{\pi}\frac{r}{q} < \frac{u'(0)}{u'(A)}, \tag{4–5}$$

то клієнт страхує частку свого активу (але не весь актив), причому для обсягу страхування, який забезпечує максимальну сподівану корисність x^*, виконується:

$$\pi u'(qx^*)q = (1 - p) \cdot u'(A - rx^*)r. \tag{4–6}$$

Доведення

Оскільки клієнт несхильний до ризику, то його функція корисності увігнута. Доведення базується на властивостях увігнутих функцій.

Дійсно, з властивостей увігнутих функцій (див. Розділ 3, § 3–1, "Закони зростаючих граничних витрат, спадаючої граничної корисності та опуклість", с. 89), з увігнутості функції корисності $u(x)$ випливає увігнутість функції сподіваної корисності $U(x)$.

Звідси, гранична сподівана корисність $U'(x)$ спадає у разі зростання обсягу страхування. Отже, максимальна гранична сподівана корисність буде спостерігатись у

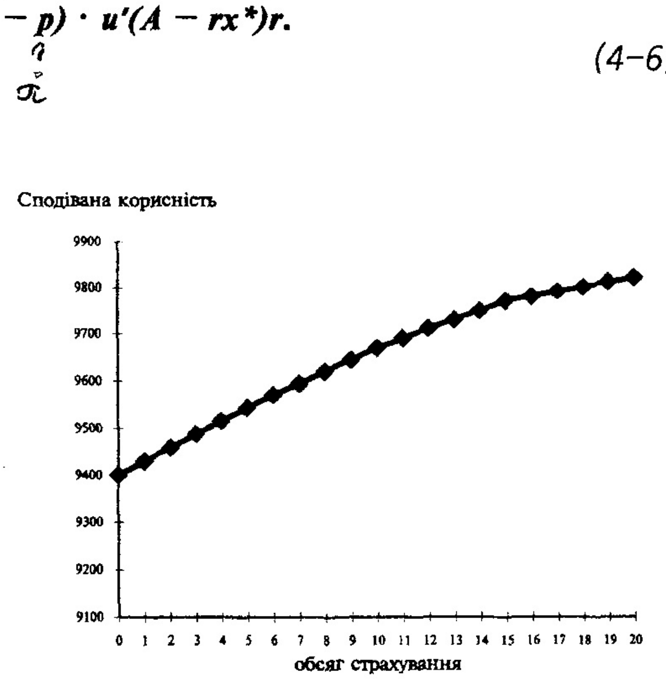

Рис. 4–5. Клієнт страхує весь актив

точці 0. За максимального обсягу страхування гранична сподівана корисність буде мінімальною. Таким чином, можна виписати співвідношення для задачі *(4–2)*:

$$U'(0) < 0 \Rightarrow x^* = 0; \tag{4–3'}$$

$$U'(A) > 0 \Rightarrow x^* = A; \tag{4–4'}$$

$$U'(0) > 0,\ U'(A) < 0 \Rightarrow 0 < x^* < A. \tag{4–5'}$$

Випадок *(4–3)* та *(4–5)* ілюструє *Рис. 4–4* (с. 143), випадок *(4–4)* – *Рис. 4–5* (с. 145).

Оскільки

$$U'(x) = (1 - \pi) \cdot u'(A - rx)(-r) + \pi\ u'(qx)q,$$

то

$$U'(0) = (1 - \pi) \cdot u'(A)(-r) + \pi u'(0)q,$$
$$U'(A) = (1 - \pi) \cdot u'((1 - r)A)(-r) + \pi u'(qA)q.$$

Сполучаючи останні три співвідношення з *(4–3')*, *(4–4')*, *(4–5')*, отримуємо доведення теореми про рівновагу.

Аналіз рівноваги

Рівняння *(4–6)* допускає таке читання: ***в стані рівноваги гранична корисність страхування за наявності страхового випадку, перемножена на його імовірність, збігається з граничною шкодою від страхування за відсутності страхового випадку, перемноженою на його імовірність.***

Отже, клієнт балансує граничну шкоду та граничну корисність для визначення найбільш привабливого для себе обсягу страхування, причому, враховуючи імовірність страхового випадку.

Нерівність *(4–3)* можна переписати таким чином:

$$(1 - \pi)\, u'(A)r > \pi\, u'(0)q,$$

тобто, ***якщо гранична шкода першої одиниці страхування за відсутності страхового випадку, перемножена на імовірність недоторканості активу, перевищує граничну корисність останньої одиниці активу за умови, що страховий випадок трапився, перемножену на його імовірність, то клієнт не схильний до страхування в будь-яких обсягах.***

Аналогічну інтерпретацію можна дати й для нерівності *(4–4)*, коли переписати її у вигляді:

$$(1 - \pi)u'((1 - r)A)r < \pi\, u'(qA)q,$$

маючи на увазі, що величина $u'((1 - r)A)r$ характеризує граничну шкоду від страхування за максимально можливого його обсягу за умови недоторканості активу, а $u'(qA)q$ – граничну корисність максимально можливого обсягу страхування за умови, коли трапляється страховий випадок.

Звернемось ще раз до рівняння рівноваги *(4–6)*, для того щоб помітити цікаву деталь: оскільки здебільшого імовірність недоторканості активу $1 - \pi$ істотно більша від імовірності страхового випадку π, то ***гранична корисність страхування за умови страхового випадку повинна бути набагато більшою від граничної шкоди від страхування за умови, коли страховий випадок не трапляється.***

Окремий випадок теореми про рівновагу

Якщо страхова компанія повністю відшкодовує актив клієнтові у разі страхового випадку, тобто, коли $q = 1$, то маємо простий, але важливий

наслідок з теореми про рівновагу.

Якщо $q = 1$, то

$$\frac{1-\pi}{\pi} r > \frac{u'(0)}{u'(A)} \Rightarrow x^* = 0, \tag{4-6'}$$

$$\frac{1-\pi}{\pi} r < \frac{u'(A)}{u'((1-r)A)} \Rightarrow x^* = A, \tag{4-7}$$

$$\frac{u'(A)}{u'((1-r)A)} < \frac{1-\pi}{\pi} r < \frac{u'(0)}{u'(A)} \Rightarrow 0 < x^* < A, \tag{4-8}$$

причому

$$\pi u'(x^*) = (1 - \pi) \cdot u'(A - rx^*)r. \tag{4-9}$$

Імовірність страхового випадку та реакція клієнта страхової компанії

Розглянемо вплив імовірності страхового випадку на обсяг страхування клієнта. Дослідимо простий випадок, коли $q = 1$ (хоча всі висновки зберігаються й для більш загального випадку).

Із несхильності до ризику особи, яка страхується, а звідси – з увігнутості його функції корисності випливає:

$$u'(0) > u'((1 - r)A) > u'(A)$$

(коли $r < 1$).

Звідси:

$$\frac{u'(0)}{u'(A)} > \frac{u'((1-r)A)}{u'(A)} > 1 > \frac{u'(A)}{u'((1-r)A)}.$$

Характер поведінки клієнта страхової компанії залежатиме від того, в якому інтервалі

$$\left[0, \frac{u'(A)}{u'((1-r)A)}\right], \tag{4-10}$$

$$\left[\frac{u'(A)}{u'((1-r)A)}, \frac{u'(A)}{u'(0)}\right], \tag{4-11}$$

чи

$$\left[\frac{u'(A)}{u'(0)}, \infty\right) \tag{4-12}$$

перебуватиме величина $\frac{1-\pi}{\pi} r$.

Неважко помітити, що $\frac{1-\pi}{\pi} r$ за фіксованого питомого платежу r ***спадає у разі зростання*** π, причому $\frac{1-\pi}{\pi} r \xrightarrow[\pi \to 0]{} \infty$ та $\frac{1-\pi}{\pi} r \xrightarrow[\pi \to 1]{} 0$.

Отже, за достатньої близькості імовірності страхового випадку π до одиниці величина $\frac{1-\pi}{\pi}r$ буде малою й потраплятиме в інтервал *(4–10)*, а отже, згідно з *(4–7)*, ***клієнт страхуватиме свій актив повністю***. Якщо ж π дещо зменшуватиметься, то величина $\frac{1-\pi}{\pi}r$ збільшуватиметься, поки не потрапить до інтервалу *(4–11)*, а тоді, згідно з *(4–8)*, ***клієнт не буде страхувати актив повністю***. За подальшого зменшення імовірності страхового випадку π величина $\frac{1-\pi}{\pi}r$ ще збільшиться й потрапить до інтервалу *(4–12)*. У цьому разі, згідно з *(4–6)*, клієнт ***вже не буде клієнтом страхової компанії!***

Спеціальний вигляд функції корисності та формулювання моделі клієнта страхової компанії як задачі лінійного програмування

У своїй роботі[1] автор запровадив спеціальний вигляд функції корисності для особи, несхильної до ризику:

$$u(c) = \min_i (a_i c + b_i) \qquad (4\text{–}13)$$

та схильної до ризику:

$$u(c) = \max_i (a_i c + b_i) \cdot \qquad (4\text{–}14)$$

(Функція корисності *(4–13)* зображена на *Рис. 3–26* (с. 136).)

Функція *(4–13)* – увігнута, а *(4–14)* – опукла (див. № 4–14 (с. 166)).

Модель клієнта з функцією корисності *(4–13)* матиме вигляд:

$$U(x) = \pi \min_i (a_i\, qx + b_i) + \\ + (1-\pi) \min_i (a_i (A - rx) + b_i) \to \max, \; 0 \le x \le A. \qquad (4\text{–}15)$$

Задачу *(4–15)* можна записати за допомогою еквівалентної задачі лінійного програмування:

$$\begin{gathered} \pi u_1 + (1-\pi)u_2 \xrightarrow[u_1,u_2,x]{} \max, \\ a_i(qx) + b_i \ge u_1 \; \forall_i, \\ a_i(A - rx) + b_i \ge u_2 \; \forall_i, \\ 0 \le x \le A. \end{gathered} \qquad (4\text{–}16)$$

(Під стрілкою вказуються для більшої виразності змінні, за якими здійснюється оптимізація.)

Для якісного та чисельного аналізу моделі клієнта у формулі *(4–16)* можна застосовувати відомі методи лінійного програмування.

[1] Див.: *Ястремський О.І.* Моделювання економічного ризику. – 176 с.

§ 4–3. АНАЛІЗ ТАКТИКИ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

Прибуток страхової компанії та його корисність

Прибуток страхової компанії – це різниця між страховими внесками клієнтів та їх винагородами у разі страхових випадків. Звідси, прибуток страхової компанії є випадковою величиною, оскільки кожен клієнт може як збільшувати, так і зменшувати прибуток страхової компанії залежно від того, трапився чи ні страховий випадок.

Позначимо через s індекс клієнта страхової компанії. Їх кількість позначимо через N. Запровадимо спеціальну випадкову величину I_s – ***індекс страхового випадку клієнта s***. I_s дорівнює 1, якщо має місце страховий випадок для клієнта s, і 0 у протилежному випадку. Тоді прибуток страхової компанії становитиме величину:

$$\sum_{s=1}^{N}[rI_s - q(1-I_s)]x_s(r,q),$$

де $x_s(r,q)$ – обсяг страхування з боку клієнта s за питомого страхового внеску r та питомої страхової винагороди q.

Будемо виходити з того, що страхова компанія прагне до максимізації сподіваної корисності прибутку й обирає параметри страхування r, q саме з цих міркувань. Якщо через v позначити функцію корисності прибутку страхової компанії, то сподівана корисність прибутку дорівнюватиме:

$$V = M\, v\sum_{s=1}^{N}[rI_s - q(1-I_s)]x_s(r,q).$$

Модель страхової компанії

Очевидно, що сподівана корисність прибутку компанії залежить від параметрів страхування r, q. Її метою є підбір параметрів страхування таким чином, щоб максимізувати сподівану корисність прибутку, тобто

$$V(r,q) = M\, v\left(\sum_{s=1}^{N}[r(1-I_s) - qI_s]x_s(r,q)\right) \xrightarrow[0\le r,q\le 1]{} \max, \tag{4–17}$$

де

$$x_s(r,q) = \arg\max\{\pi_s u_s(qx) + (1-\pi_s)u_s(A-rx):\ 0 \le x \le A\}. \tag{4–18}$$

Запис (4–18) означає, що $x_s(r,q)$ є розв'язком задачі:

$$U(x) = \pi_s u_s(qx) + (1-\pi_s)u_s(A-rx) \to \max,\ 0 \le x \le A.$$

(4–17), (4–18) – досить складна задача. Безпосередньо з вигляду (4–17), (4–18) можна сказати напевно лише одне: для знаходження параметрів страхування з боку страхової фірми потрібна "золота середина". Перший імпульс, який може виникнути у недосвідченого менеджера страхової компанії – зменшити страхову винагороду r та збільшити страховий внесок q. На цьому шляху може виникнути небезпека позбутись клієнтів взагалі і збанкрутіти внаслідок надмірної жадібності. ***Страховій компанії не може бути добре, якщо буде погано її клієнтам!***

Водночас завелика страхова винагорода та замалий страховий внесок можуть призвести також до банкрутства компанії, оскільки сумарна страхова винагорода може перевищити сумарний страховий внесок. Потрібен розрахунок!

Нейтральність до ризику страхової компанії

Основним припущенням, якого ми будемо дотримуватись, є припущення ***про нейтральність до ризику страхової компанії***. Для забезпечення своєї нейтральності до ризику компанія повинна мати солідний капітал. Дійсно, маючи в кишені 10,000,000 гривень, можна взяти участь у лотереї з виграшем та програшем 10,000 з імовірностями 0.5 (нейтральність до ризику в межах 10,000 гривень). Маючи всього 10,000 гривень, майже ніхто не буде ризикувати всім статком, і для нього "справедлива лотерея" з нульовим виграшем буде невигідною, оскільки сподівання отримати додатково не компенсується жахом залишитись без нічого.

Якщо компанія нейтральна до ризику, то її функція корисності буде лінійною, а сподівана корисність матиме такий вигляд:

$$M\left(\sum_{s=1}^{N}[r(1-I_s)-qI_s]x_s(r,q)\right)=$$
$$=\sum_{s=1}^{N}[r(1-MI_s)-qMI_s]\cdot x_s(r,q).$$

Полічимо математичне сподівання індикатора страхового випадку:

$$MI_s=1\cdot\pi_s\;+0\cdot(1-\pi_s)=\pi_s\,,$$

де

π_s – імовірність страхового випадку для клієнта *s*.

Звідси, модель страхової компанії за умови її нейтральності до ризику можна записати у вигляді:

$$V(r,q)=\sum_{s=1}^{N}[r(1-\pi_s)-q\pi_s]\cdot x_s(r,q)\;\rightarrow\;max\,. \tag{4-19}$$

Модель *(4–19)* наочно демонструє дилему, яка виникає перед страховою компанією: під знаком суми містяться доданки, що є добутками співмножників, один з яких $(r(1-\pi_s)-q\pi_s)$ збільшується, коли більш жорсткі правила страхування (більший питомий страховий внесок та менша питома страхова винагорода), інший $(x_s(r,q))$ – зменшується.

Числовий приклад: дані

Для спрощення розрахунків буде запроваджене додаткове припущення: всі клієнти однакові, тобто мають однакові функції корисності й імовірності страхових випадків.

Залишимо основні параметри моделі клієнта незмінними порівняно з прикладом, який розглядався в § 4–1, тобто:

$A = 20{,}000;$
$\pi = 0.0001;$
$q = 1.$

Система цінностей особи, яка страхується, описана в *Табл. 4–1* (с. 140, 151).

Особливостями системи цінностей особи, яка може скористатись послугами страхової компанії, є те, що найбільш болючими для неї будуть втрати останніх одиниць активу (20 ютилів за кожну тисячу з останніх п'яти). Кожна з наступних п'яти одиниць і втрата перших одиниць – найменш болюча.

На відміну від моделі клієнта питомий страховий платіж вже не фіксується й є об'єктом вибору.

Табл. 4–1. **Корисність залишку активу після страхового випадку (згідно з граничною корисністю *(4–1)*)**

Величина активу (x) (в тис.)	Гранична корисність (MU)	Корисність ($u(x)$)
0	20	0
1	20	20
2	20	40
3	20	60
4	20	80
5	20	100
6	10	110
7	10	120
8	10	130
9	10	140
10	10	150
11	5	155
12	5	160
13	5	165
14	5	170
15	5	175
16	1	176
17	1	177
18	1	178
19	1	179
20	1	180

Табл. 4–5. **Страхові платежі та обсяги страхування (π = 0.0001)**

r	$x(r)$
0	20
0.0001	15–20
0.0002	5
0.0003	15
0.0004	15
0.0005	10–15
0.0006	10
0.0007	10
0.0008	10
0.0009	10
0.0010	5–10
0.0011	5
0.0012	5
0.0013	5
0.0014	5
0.0015	5
0.0016	5
0.0017	5
0.0018	5
0.0019	5
0.0020	0–5
0.0021	0

Метод розрахунку

Сподіваний прибуток страхової компанії за умови, що всі клієнти однакові, становитиме величину:

$$N((1-\pi)r-\pi)x(r). \tag{4–20}$$

Максимізація сподіваного прибутку буде еквівалентна максимізації сподіваної корисності прибутку, оскільки, згідно з припущенням, страхова фірма нейтральна до ризику.

Для визначення сподіваного прибутку фірми, який відповідає певному рівню питомого страхового платежу, потрібно визначити реакцію клієнтів (а вони, згідно з припущенням, всі однакові) на r, тобто знайти $x(r)$. Після цього знайдену величину підставити у формулу *(4–20)*.

Розрахунок реакції клієнта страхової компанії

Для визначення реакції клієнта страхової компанії потрібно у разі різних питомих страхових платежів перерахувати дані *Табл. 4–2* (с. 140) і знайти той обсяг страхування, який забезпечує максимальну сподівану корисність клієнтові.

У *Табл. 4–2* (с. 140) відображений розрахунок для r = **0.001**, у *Табл. 4–4* (с. 143) – для r = **0.003**.

Оберемо інтервал зміни ***r*** від *0.0001* до *0.0021* і для кожного ***r*** з цього інтервалу з кроком *0.0001* знайдемо ***x(r)***. Для спрощення розрахунків можна скористатись законом спадаючої граничної сподіваної корисності. Використання цього закону дає змогу повністю не заповнювати таблиці на зразок *Табл. 4–2* : як тільки сподівана корисність починає спадати у разі збільшення обсягу страхування, розрахунок можна припиняти. *Табл. 4–5* (с. 151) містить результати розрахунків реакції клієнта на зміну питомого страхового платежу в інтервалі *[0.0001, 0.0021]* з кроком *0.0001*.

Рис. 4–6 (с. 152) графічно зображає обсяг страхування клієнта залежно від ціни страхування (питомого страхового платежу). (Для однозначності в точках ***r = 0.0001, 0.0005, 0.0010, 0.0020*** обрані середні значення можливих варіантів страхування, тобто відповідно 17.5, 12.5, 7.5, 2.5.

Табл. 4–5 (с. 151) та *Рис. 4–6* (с. 152) наочно показують важливу особливість: спадання обсягу страхування у разі зростання ціни страхування. Очевидним є намагання особи застрахуватись, коли це нічого не варто. Обсяг страхування у цьому випадку буде максимальним, проте страхова фірма матиме лише збитки. За ціни страхування, яка перевищує 0.0021 гривні на кожну гривню застрахованого майна, збитків не буде, але й прибуток теж буде відсутнім, оскільки ніхто не страхуватиметься.

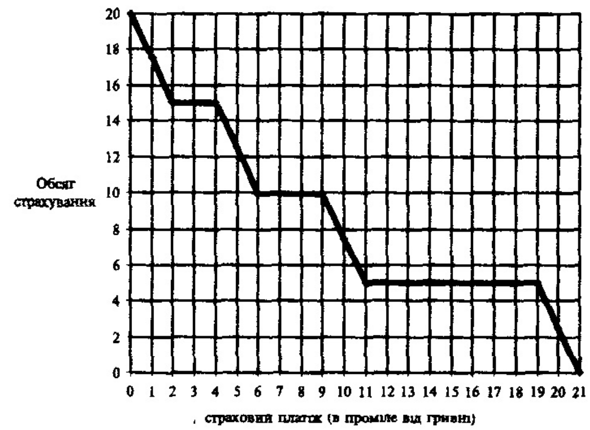

Рис. 4–6. Залежність обсягу страхування від страхового платежу

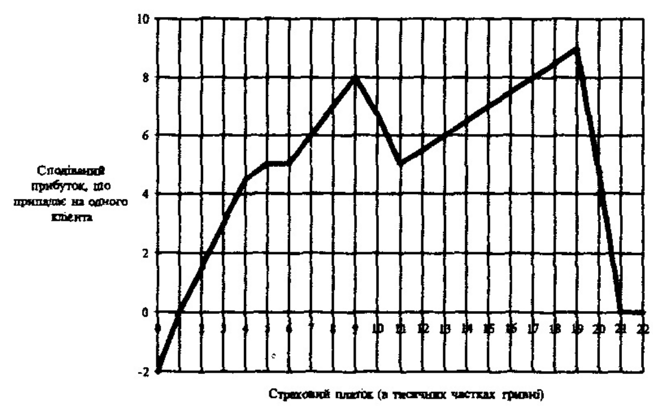

Рис. 4–7. Сподіваний прибуток та страховий платіж

Табл. 4–6 . **Страхові платежі (*r*) та сподіваний прибуток (*((1 − p)r − p)*) страхової фірми, що припадає на одного клієнта (імовірність страхового випадку *p* = 0.0001))**

$r \times 0.0001$	$((1-p)r-p))x(r)$
0	-2.00
1	0.00
2	1.50
3	3.00
4	4.50
5	5.00
6	5.00
7	6.00
8	7.00
9	8.00
10	6.75
11	5.00
12	5.50
13	6.00
14	6.50
15	7.00
16	7.50
17	8.00
18	8.50
19	9.00 √ max
20	4.75
21	0.00
22	0.00

Оптимальна ціна страхування

Полічимо сподіваний прибуток страхової фірми за різного обсягу питомого страхового платежу (ціни за страхування). Нагадаємо ще раз, що максимізація сподіваного прибутку, згідно з припущенням про нейтральність страхової фірми до ризику, буде еквівалентна максимізації сподіваної корисності прибутку!

Результати розрахунків відображені в *Табл. 4–6* (с. 152). Як і під час побудови *Рис. 4–6* (с. 152), для усунення неоднозначності обсягу страхування для деяких значень страхового платежу обираються середні значення обсягів страхування.

Рис. 4–7 (с. 152) і *Табл. 4–6* (с. 152) свідчать про те, що максимальний сподіваний прибуток страхова компанія отримає у разі страхового платежу 0.0019 гривні за кожну гривню застрахованого активу.

Характерною особливістю залежності сподіваного прибутку від страхового платежу є відсутність увігнутості.

Умови прибутковості страхової компанії

Випишемо умови, за яких страхова компанія в середньому буде прибуткова. Розглянемо випадок, коли страхова компанія повністю відшкодовує застрахований актив, тобто $q = 1$. Сподіваний прибуток компанії з розрахунку на одного клієнта в цьому разі становитиме величину:

$$((1-\pi)r - \pi)x(r). \tag{4–21}$$

Як і раніше, будемо дотримуватись припущення, що всі клієнти страхової компанії однакові. Отже, за певних умов страхування вони всі гуртом страхуватимуться в однакових обсягах, або ухилятимуться взагалі від страхування. Це дає змогу розглядати питання про прибутковість страхової компанії з точки зору взаємовідносин компанії та одного клієнта.

З *(4–21)* випливає, що страхова компанія буде прибутковою (в середньому), якщо одночасно виконуються дві умови:

1) клієнт страхує хоча б частку свого активу, тобто:

$$x(r) > 0; \tag{4–22}$$

2) сподіваний страховий платіж клієнта компанії перевищує сподівану страхову компенсацію компанії клієнтові, тобто:

$$(1-\pi)r > \pi. \tag{4–23}$$

Теорема про рівновагу (с. 145) та її наслідок, коли $q = 1$, дають умови, за яких клієнт схиляється до страхування.

Згадаємо, що, згідно з наслідком з теореми про рівновагу, якщо $q = 1$, то:

$$\frac{1-\pi}{\pi} r > \frac{u'(0)}{u'(A)} \Rightarrow x^* = 0, \tag{4–24}$$

$$\frac{1-\pi}{\pi} r < \frac{u'(A)}{u'((1-r)A)} \Rightarrow x^* = A, \tag{4–25}$$

$$\frac{u'(A)}{u'((1-r)A)} < \frac{1-\pi}{\pi} r < \frac{u'(0)}{u'(A)} \Rightarrow 0 < x^* < A. \tag{4–26}$$

Поєднуючи *(4–26)* та *(4–23)*, робимо висновок, що

☞ умови прибутковості страхової компанії в середньому будуть такі:

$$1 < \frac{1-\pi}{\pi} r < \frac{u'(0)}{u'(A)} \; .$$

(4–27)

Варто звернути увагу на цікаву особливість. Порівняння формул *(4–25)*, *(4–23)* та *(4–27)* дає підстави стверджувати, що у разі *виконання умов, достатніх для того, щоб власник активу страхував його повністю, страхова фірма буде в середньому збитковою!*

Цей висновок, до речі, підтверджується розрахунками з *Табл. 4–6* (с. 152) та *Рис. 4–7* (с. 152).

Параметричний аналіз взаємодії страхової компанії та її клієнта

Аналіз теореми про рівновагу, її наслідку та умов прибутковості страхової компанії дає змогу дослідити, яким чином впливають деякі параметри на взаємодію компанії та її клієнта.

Відразу ж вкажемо три принципові ситуації, які можуть трапитись на ринку купівлі та продажу ризику:

1) умови страхування вигідні страховій компанії, але не привабливі для клієнта;
2) умови страхування привабливі для клієнта, але не вигідні страховій компанії;
3) умови страхування вигідні компанії й водночас привабливі для клієнта.

З точки зору аналізу, принциповим є взаємне розташування величин $\frac{1-\pi}{\pi} r$ та 1, $\frac{u'(A)}{u'((1-r)A)}$, $\frac{u'(A)}{u'(0)}$. Розглянемо розташування $\frac{1-\pi}{\pi} r$ в чотирьох інтервалах: $\left[0, \frac{u'(A)}{u'((1-r)A)}\right]$, $\left[\frac{u'(A)}{u'((1-r)A)}, 1\right]$, $\left[1, \frac{u'(A)}{u'(0)}\right]$, $\left[\frac{u'(A)}{u'(0)}, \infty\right)$. Результати аналізу відображені в *Табл. 4–7* (с. 154).

Підкреслимо, що ***реальна прибутковість*** страхової компанії та ***реальна привабливість*** умов страхування для клієнта можливі лише тоді, коли умови ***взаємно вигідні*** й для продавця, й для покупця ризику. Це забезпечується лише в третьому випадку.

Перші два випадки були б ***реально вигідними*** для клієнтів, коли б існувала страхова компанія, яка б працювала собі на збиток. Останній – коли б клієнти страхувались, погіршуючи свої життєві кондиції.

Табл. 4–7. **Взаємодія страхової фірми та клієнта**

Умови	Клієнт	Страхова компанія
$\frac{1-\pi}{\pi} r \in \left[0, \frac{u'(A)}{u'((1-r)A)}\right]$	умови страхування вигідні для того, щоб клієнт страхував актив повністю	збиткова
$\frac{1-\pi}{\pi} r \in \left[\frac{u'(A)}{u'((1-r)A)}, 1\right]$	умови страхування вигідні для того, щоб клієнт страхував актив частково	збиткова
$\frac{1-\pi}{\pi} r \in \left[1, \frac{u'(A)}{u'(0)}\right]$	умови страхування вигідні для того, щоб клієнт страхував актив частково	прибуткова (в середньому)
$\frac{1-\pi}{\pi} r \in \left[\frac{u'(A)}{u'(0)}, \infty\right)$	умови страхування не вигідні для клієнта	прибуткова (в середньому)

Отже, *клієнт страхової компанії зацікавлений в її процвітанні, й навпаки, страхова компанія не може нормально працювати, не створивши вигідні умови для клієнта.*

Окремий випадок

Табл. 4–7 (с. 154) свідчить про важливість урахування страховою компанією системи цінностей клієнта, й зокрема, загрозливої межі $\frac{u'(A)}{u'(0)}$ для параметра $\frac{1-\pi}{\pi}r$, після якої клієнт вже не звертається до страхової компанії.

Досить часто виправданою є така ГІПОТЕЗА

☞ Корисність першої одиниці активу надзвичайно велика, а останньої – досить мала.

З гіпотези випливає, що загрозлива межа $\frac{u'(A)}{u'(0)}$ відсувається дуже далеко, й достатньою умовою прибутковості страхової фірми буде виконання лише нерівності:

$$\frac{1-\pi}{\pi}r > 1,$$

або

$$(1-\pi)r > \pi. \tag{4–28}$$

У підручниках та задачниках з мікроекономіки[2] вживаною є функція корисності:

$$u(c) = \sqrt{c}\ .$$

Очевидно, що гранична корисність першої одиниці активу, згідно з цією функцією, становитиме величину:

$$u'(0) = \frac{1}{2\sqrt{0}} = \infty\,.$$

Звідси, для страхової компанії, яка обслуговує клієнтів із системою цінностей, що відображається функцією корисності $u(c)=\sqrt{c}$, єдиною умовою прибутковості є нерівність *(4–28)* (с. 155).

Проте прибутковість буває теж різною, й звісно, компанія прагне до максимального прибутку (сподіваного). Тому надмірна жадібність може призвести до невеликих прибутків.

Ускладнені варіанти розрахунків

Проведений вище аналіз базувався на істотних спрощеннях, зокрема на припущенні, що всі клієнти однакові. Зберігаючи основну схему розрахунків, її можна розповсюдити на більш загальний випадок, зокрема на той, коли є кілька груп клієнтів із різним ставленням до ризику.

Позначимо через g групу клієнтів, через G – множину груп, N_g – кількість осіб, які належать до групи g, $u_g(\cdot)$, A_g – відповідно функцію корисності та актив особи групи g.

Модель індивіда, який звертається за послугами до страхової компанії, залишається незмінною, за винятком того, що запроваджується додатковий індекс належності до групи g.

$$\pi u_g(qx) + (1-\pi)u_g(A - rx) \to max,$$
$$0 \le x \le A_g. \tag{4–29}$$

Позначимо через $x_g(r,q)$ розв'язок задачі *(4–29)*. Будемо вважати його єдиним. Також вважатимемо, що страхова подія трапляється для усіх осіб однієї групи разом. Завдання

[2] Див.: *Bergstrom Th. C., Varian H. R.* Workouts in Intermidiate Microeconomics (Third Edition). W.W. Norton & Company. – New York, London. – 1993. – 474 p.

страхової компанії полягає у виборі параметрів страхування r та q таким чином, щоб максимізувати сподівану корисність її прибутку, тобто:

$$F(r,q) = MU\left(\sum_{g\in G}\left(N_g x_g(r,q)(-qI_g + r(1 - I_g))\right)\right),$$

де I_g – індикатор страхової події для осіб групи g,

U – функція корисності страхової компанії.

Припущення щодо нейтральності до ризику страхової компанії істотно спрощує вираз сподіваної корисності її прибутку:

$$F(r,q) = \sum_{g\in G}\left(N_g x_g(r,q)(-qP_g + r(1 - P_g))\right),$$

де P_g – імовірність страхового випадку для групи g.

Розрахунки сподіваного прибутку страхової компанії в цьому випадку вимагають знаходження оптимальної реакції на параметри страхування осіб з ***усіх груп***.