Елементи теорії ймовірностей

1.Поняття ймовірності

Під ***ймовірністю*** події ми розуміємо міру можливості її настання.

Застосування математики до вивчення випадкових подій ґрунтується на тому, що у багатьох випадках ймовірність отримання певного результату досліду випробування) можна оцінити кількісно, тобто її можна ототожнити з деяким числом P. Існування ймовірності P якогось результату досліду проявляється у тому, що при його багаторазовому повторенні в однакових умовах (тобто кожний наступний дослід є точною копією попереднього і результат одного досліду не впливає на результат ніякого іншого) відносна частота появи цього результату (частка від ділення числа дослідів, у яких спостерігався цей результат, до загального числа дослідів) залишається майже сталою, близькою до якогось числа P.

Це число вважають ймовірністю даного результату. До цього числа буде близька відносна частота відповідного результату у досить довгій послідовності дослідів. Ми бачимо, що для визначення ймовірності нас цікавить не результат окремого досліду, а результат, отриманий внаслідок його багаторазового повторення.

З означення ймовірності ми бачимо, що це невід'ємне число, яке не перевищує 1. Вивчення задач, пов'язаних з ймовірностями різних випадків, становить окрему математичну дисципліну – теорію ймовірностей. Ця дисципліна є теоретичною основою статистики та статистичного моделювання.

Існування ймовірності не залежить від того, вдаємося ми до досліду, чи ні. У багатьох випадках можна обчислити ймовірність, взагалі не проводячи дослідів, а виходячи з того, що об'єкти досліду мають певну симетрію, а кількість певних результатів дослідів можна підрахувати.

Результати дослідів називатимемо *подіями*. Наприклад, можна говорити про подію, яка полягає у тому, що при одночасному підкиданні двох кубиків сума очок дорівнює 5. Цей результат може з'явитися або не з'явитися в результаті досліду. Кажуть, що він є випадковою подією. Отже, ***випадкова подія*** може з'явитися або не з'явитися внаслідок випробування. ***Достовірна* (*вірогідна*)** подія обов'язково з'являється внаслідок випробування. ***Неможлива*** подія не може з'явитися внаслідок випробування ні за яких умов.

Події бувають ***складними*** і ***елементарними*** (нерозкладними). Наприклад, твердження «при одночасному підкиданні двох кубиків сума очок дорівнює 5» рівносильне твердженню «дослід (підкидання кубиків) привів до одного з результатів: (1;4), (2;3), (3;2), (4;1)». Перелік цих результатів розкладає складну подію «сума очок, що випали, дорівнює 5» на чотири елементарні події. Кожний нерозкладний результат досліду дається однією і тільки однією елементарною подією. Сукупність всіх елементарних подій для певного досліду називають його ***простором елементарних подій***, а самі елементарні події – ***точками*** цього простору. У результаті досліду обов'язково з'являється одна з елементарних подій, а будь-які дві елементарні події є несумісними.

Далі події позначатимемо великими літерами латинського алфавіту.

Про будь-яку подію A, пов'язану з дослідом, має сенс говорити лише у тому разі, коли для кожного нерозкладного результату цього досліду відомо, відбулася чи не відбулася подія A. Отже, подію можна розглядати як деяку множину елементарних подій. Будь-яка подія A складається з певних точок простору елементарних подій, а саме з нерозкладних результатів, що зумовлюють появу події A. У досліді з підкиданням двох кубиків простором елементарних подій є множина пар (1;1), (1;2), …, (6;5), (6;6). Подія «сума очок дорівнює 5» є множиною чотирьох точок цього простору (елементарних подій): (1;4), (2;3), (3;2), (4;1).

Простір елементарних подій може мати як скінченну, так і нескінченну кількість точок. Наведемо приклад досліду, з яким пов'язаний простір з нескінченною кількістю елементарних подій. Нехай стрілець стріляє по якійсь мішені. Кожний постріл приводить до одного з результатів: влучення (В) чи промах (П). Стрілець стріляє доти , поки не влучить у мішень. Усі елементарні результати цього досліду можна розташувати у вигляді такої нескінченної послідовності:

В, ПВ, ППВ, ПППВ,…,

Надалі обмежимося дослідами, яким відповідають скінченні простори елементарних подій.

2.Операції над подіями

Нехай *П* – простір елементарних подій, що складається з *n* точок $E_1, E_2, ..., E_n$:

$$\Pi = \{E_1, E_2, ..., E_n\}.$$

Простір елементарних подій Π утворює ***достовірну*** подію.

Запис $A = \varnothing$ означає, що подія A не містить жодної елементарної події, тобто вона ***неможлива***. Подія $\overline{A}$ означає подію, що складається з усіх точок, що не належать до події A (кажуть, що $\overline{A}$ – *подія,* ***протилежна*** *події* A). Наприклад, $\overline{\varnothing} = \Pi, \overline{\Pi} = \varnothing.$ Поява протилежної події $\overline{A}$ означає, що подія A не відбулася.

Нехай A і B – події. Тоді ***сумою цих подій*** A+B ($A \cup B$) називають подію, що складається з тих і тільки тих точок, кожна з яких належить до A чи до B, чи до A і B одночасно (хоча б до однієї з подій: A чи B).

Добуток подій A та B – це подія AB ($A \bigcap B$), що складається з тих і тільки тих точок, які належать одночасно і до A, і до B.

Поява суми подій $A_1 + A_2 + ... + A_n$ означає появу хоча б однієї з подій $A_1, A_{2,...,} A_n$. Поява добутку подій $A_1A_2...A_n$ означає одночасну появу всіх подій $A_1, A_2, ...A_n$.

Різницею *A–B* (*A\B*) називають подію, що полягає у тому, що подія А з'явилася, а подія В – ні. Подія *A\B* – це подія, що складається з тих і лише тих точок простору елементарних подій, що належать події *A* і не належать події *B*.

Дві події називають ***несумісними***, якщо вони внаслідок досліду (випробування) не можуть відбутися одночасно. Нехай подія A_1 – «при підкиданні двох кубиків сума очок, що випали, дорівнює 5», подія A_2 – «при підкиданні двох кубиків сума очок, що випали, дорівнює 7». Події A_1 та A_2 є несумісними. Події, що у випробуванні можуть відбутися одночасно, називають ***сумісними***.

Подія *A* сприяє події *B* ($A \subset B$), якщо з події появи *A* випливає поява події *B*.

3.Класичне означення ймовірності події

Нехай простір елементарних подій, що відповідає певному випробуванню, складається з n рівноможливих елементарних подій. Якщо m з них сприяють події A, то ***ймовірністю події*** A називають число $p(A)$, таке, що

$$p(A) = \frac{m}{n}. \quad (1)$$

Рівність (1) називають ***класичним означенням ймовірності.***

Приклад 1. Знайти ймовірність того, що при киданні кубика з'явиться парна кількість очок.

Розв'язання. Простір елементарних подій для випробування, що полягає у киданні кубика, складається з 6 рівноможливих подій: $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Подія А полягає у випаданні парної кількості очок. Цій події сприяють елементарні події A_2, A_4, A_6. Отже, $m = 3$, $n = 6$. Тому ймовірність $P(A) = \frac{1}{2}$.

Приклад 2. Знайти ймовірність того, що внаслідок підкидання 2 монет на кожній з них з'явиться герб.

Розв'язання. Запишемо для даного випробування множину елементарних подій так, щоб ці події були рівноймовірними. Ця умова не буде виконана, якщо елементарними подіями вибрати A_1 = «на обох монетах випав герб», A_2 = «на обох монетах випала цифра», A = «на одній монеті випав герб, на іншій – цифра». Тут подія A має більше шансів на появу. Щоб отримати рівноможливі елементарні події, внесемо у дослід деяку зміну: візьмемо одну монету мідну, іншу – срібну. Тоді замість події A маємо дві елементарні події: A_3 = «на мідній монеті випав герб, на срібній – цифра», A_4 = «на срібній монеті випав герб, на мідній цифра». Події A_1, A_2, A_3, A_4 є рівноможливими та утворюють простір елементарних подій для кидання двох монет. Отже, $n = 4$. Оскільки сприятливим для появи двох гербів є лише одна елементарна подія A_2, то $m = 1$. Отже, ймовірність того, що внаслідок підкидання 2 монет на кожній з них з'явиться герб,

$$P(A_2) = \frac{1}{4}.$$

Приклад 3. З 7 однакових квитків один виграшний. Семеро людей по черзі навмання беруть по одному квитку, не повертаючи його. Чи залежить ймовірність отримання виграшного квитка від місця у черзі?

Розв'язання. Побудуємо математичну модель цього випробування. Перенумеруємо всі квитки, починаючи з виграшного. У результаті випробування вони розподіляються між людьми, які займали певні місця в черзі. При цьому множина з 7 квитків виявляється упорядкованою: на першому місці квиток, який придбали першим, на другому – другим і т.д. Отже, подія, що є наслідком випробування, – це отримання деякої перестановки з 7 квитків.

Загальна кількість перестановок з n елементів дорівнює $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Для 7 елементів кількість таких перестановок дорівнює $7! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 7$. Оскільки квитки вибирають навмання, ці події є рівноймовірними. Вони утворюють простір елементарних подій. Нам потрібно знайти ймовірність події A = «людина, що була k-ою у черзі, отримала виграшний квиток». Цій події сприяють наслідки випробування, для яких у відповідних перестановках на k-ому місці знаходиться виграшний квиток, решту 6 місць займають довільні перестановки з решти 6 невиграшних квитків. Кількість цих перестановок 6!. Отже, ймовірність події, що нас цікавить, становить $P(A) = \frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}$. Бачимо, що ймовірність отримання виграшного квитка не залежить від k – місця у черзі.

Приклад 4. При киданні двох кубиків підрахували суму очок, що випали на верхніх гранях. Що ймовірніше: отримати у сумі 7 чи 8 очок?

Розв'язання. У цій задачі випробування полягає у тому, що кидають два кубики і фіксують суму очок, що з'явилися на верхніх гранях. Наслідками випробування є події «сума очок дорівнює 2», «сума очок дорівнює

3»,…, «сума очок дорівнює 12», проте ці події не є рівноймовірними. Дійсно, отримати у сумі 2 можна лише одним способом – при появі на верхніх гранях кубиків по 1 очку, а отримати, наприклад, 4 можна у вигляді 4=2+2=1+3=3+1. Занумеруємо кубики, тобто будемо розглядати перший та другий кубики. Нехай k – кількість очок, що з'явилось на верхній грані першого кубика, s – другого кубика. Елементарні події – появи пар (k, s), k=1,2,…,6, s=1,2,…,6 є рівноймовірними. Всього таких пар n = 36, отже, ймовірність появи кожної пари дорівнює $\frac{1}{36}$, розглянуті елементарні події є рівноймовірними. Кількість m_1 елементарних подій, сприятливих для появи суми очок, що дорівнює 7, m_1 = 6. Це поява пар (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1). Для появи суми, що дорівнює 8 очок, кількість сприятливих елементарних подій m_2 = 5. Це події (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2). Отже, ймовірність появи суми очок, що дорівнює 7, $P_1 = \frac{m_1}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Для появи суми, що дорівнює 8 очок, ймовірність $P_2 = \frac{m_2}{n} = \frac{5}{36}$. Отже, $P_1 > P_2$.

4.Статистична ймовірність

До основних недоліків застосування класичного означення до обчислення ймовірностей випадкових подій відносяться:

- можливість нескінченної кількості наслідків у деяких випробуваннях;
- можливість того, що елементарні події, що можуть відбутися внаслідок випробування не будуть рівноймовірними;

– неможливість у деяких випадках представити подію, що цікавить дослідника, у вигляді множини елементарних подій.

З цих причин, поряд з класичною схемою, використовують також інші способи обчислення ймовірностей. При статистичному методі знаходження ймовірності вважають, що вона дорівнює відносній частоті появи події у серії з багатьох випробувань.

Відносною частотою (частістю) події A називають відношення кількості m випробувань, у яких ця подія відбулася, до загальної кількості n здійснених випробувань:

$$\nu(A) = \frac{m}{n}. \quad (1)$$

Приклад. У серії з 100 пострілів стрілець 86 разів влучив у ціль. Відносна частота влучення у ціль даним стрільцем $\nu = 0,86$.

Якщо випробування здійснюються в однакових умовах у достатньо великих кількостях, то відносна частота появи події у цих дослідах виявляє ***властивість стійкості***. Ця властивість полягає у тому, що при здійсненні кількох серій з великої кількості випробувань відносна частота події змінюється мало, коливаючись навколо деякої сталої величини, що дорівнює ймовірності даної події.

Таким чином, ***статистичною ймовірністю*** події є відносна частота її появи у серії з достатньо великої кількості випробувань. Для існування статистичної ймовірності події потрібна:

– можливість, хоча б принципова, здійснення необмеженого числа випробувань, у кожному з яких може з'явитися ця подія;

– стійкість відносних частот появи події у різних серіях з достатньо великої кількості випробувань.

5. Ймовірність суми та добутку подій

Ймовірність суми скінченного числа несумісних подій $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$ дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) \qquad (1)$$

З формули (1) випливає, що сума ймовірностей попарно несумісних подій, що утворюють повну групу подій, дорівнює одиниці, оскільки у результаті випробування обов’язково з’явиться хоча б одна з цих подій.

Протилежні події A та $\overline{A}$ утворюють повну групу несумісних подій, тому $P(A)+P(\overline{A})=1$. Звідси отримуємо:

$$P(\overline{A})=1-P(A). \qquad (2)$$

Приклад 1. Мішень поділена на 3 сектори. Ймовірність влучення стрільцем у перший сектор мішені дорівнює 0,45, у другий сектор – 0,35, у третій – 0,15. Знайти ймовірність того, що при одному пострілі стрілець влучить: а) у перший або другий сектор; б) не влучить у мішень.

Розв’язання. Введемо позначення:

подія A_1 = {влучення у перший сектор};

подія A_2 = {влучення у другий сектор};

подія A_3 = {влучення у третій сектор};

подія A_4 = {невлучення у мішень}.

Тоді $P(A_1)=0,45$, $P(A_2)=0,35$,

$P(A_3)=0,15$.

а) Влучення у перший або другий сектор відповідає сумі подій A_1 та A_2. При одному пострілі події A_1 та A_2 є несумісними, тому за формулою (1) отримуємо:

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)=0,45+0,35=0,8.$$

б) Події A_1, A_2, A_3, A_4 попарно несумісні та утворюють повну групу випадкових подій. Тому $P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)=1$. Звідси знаходимо:

$$P(A_4)=1-P(A_1)-P(A_2)-P(A_3)=$$

$$=1-0,45-0,35-0,15=0,05.$$

Умовною ймовірністю події A відносно події B називають ймовірність події A, обчислену за умови, що подія B відбулася. Для такої ймовірності використовують позначення $P_B(A)$ або $P(A/B)$.

Приклад 2. В урні знаходяться 3 білі та 3 чорні кулі. З неї двічі виймають по одній кулі, не повертаючи їх в урну. Знайти ймовірність того, що другою з'явиться біла куля, якщо першого разу вийняли білу кулю.

Розв'язання. Нехай подія A={першого разу з'явилась біла куля}, подія B={другою з'явилась біла куля}. Знайдемо умовну ймовірність $P(B/A)$, тобто ймовірність того, що другою з'явиться біла куля, якщо першого разу вийняли білу кулю. Після виймання першої кулі (білої) в урні залишилось 2 білі та 3 чорні кулі. Тому ймовірність $P\left(B/A\right)=\dfrac{3-1}{3+3-1}=\dfrac{2}{5}.$

Теорема 1 (теорема множення ймовірностей). Ймовірність добутку подій *A* та *B* дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність другої події відносно першої:

$$P\left(AB\right)=P\left(A\right)\cdot P\left(B/A\right)= \\ =P\left(B\right)\cdot P\left(A/B\right). \tag{3}$$

Формула (3) розповсюджується також на випадки, коли класична схема обчислення ймовірностей є незастосовною, наприклад, у випадках, коли простір елементарних подій є нескінченним, або елементарні події не є рівноможливими.

З формули (3) знайдемо формулу для обчислення умовної ймовірності:

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{4}$$

Формулу (4) часто використовують як означення умовної ймовірності події, альтернативне наведеному раніше.

Приклад 3. Серед 25 електроламп 4 несправні. Знайти ймовірність того, що дві взяті навмання електролампи будуть несправними.

Розв'язання. Нехай подія A={перша взята лампа виявилася несправною}, подія B={друга взята електролампа – несправна}. Подія AB={обидві взяті електролампи є несправними}. Обчислимо ймовірність добутку подій AB за формулою (3):

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{4}{25} \cdot \frac{3}{24} = 0,02.$$

Події A та B називають ***незалежними***, якщо ймовірність однієї з них не залежить від настання іншої, інакше ці події є ***залежними***.

Події A_1, A_2,…, A_n називають ***попарно незалежними***, якщо незалежними між собою є будь-які дві з них. Події A_1, A_2,…, A_n називають ***незалежними у сукупності***, якщо вони є попарно незалежними, а також незалежними є кожна подія та всі можливі добутки інших подій. Далі незалежними подіями будемо називати події, незалежні у сукупності.

Оскільки для незалежних подій A та B $P(B/A)=P(B)$, то у цьому випадку формула (3) набуває вигляду:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B). \tag{5}$$

Формула (5) виражає теорему множення ймовірностей для незалежних подій:

Теорема 2 (теорема множення ймовірностей для незалежних подій). Ймовірність добутку незалежних подій дорівнює добутку їх ймовірностей.

Приклад 4. Ймовірність влучення у ціль для першого стрільця становить 0,7, для другого ця ймовірність дорівнює 0,9. Вони одночасно стріляють по цілі. Знайти ймовірність того, що ціль буде вражена двічі.

Розв'язання. Нехай подія A={перший стрілець вразив ціль}, подія B={другий стрілець вразив ціль}. Тоді подія AB={обидва стрільці вразили ціль}. Оскільки події A та B є незалежними, то для знаходження ймовірності їх добутку використаємо формулу (5):

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,9 = 0,63.$$

Теорему множення ймовірностей можна узагальнити на випадок добутку довільної скінченої кількості подій.

Теорема 3. Ймовірність добутку скінченої кількості подій дорівнює добутку їх умовних ймовірностей відносно добутку попередніх по відношенню до кожної з них подій:

$$P\left(A_1A_2...A_n\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2/A_1\right)\times$$
$$\times P\left(A_3/\left(A_1A_2\right)\right)\cdot...\cdot P\left(A_n/\left(A_1A_2...A_{n-1}\right)\right). \quad (6)$$

З даної теореми випливає, що для незалежних подій $A_1, A_2,..., A_n$ ймовірність добутку цих подій дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P\left(A_1A_2...A_n\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2\right)\cdot...\cdot P\left(A_n\right). \quad (7)$$

Приклад 5. На 10 картках надруковані цифри від 0 до 9. Знайти ймовірність того, що навмання взяті і розміщені у ряд в послідовності виймання картки утворять число 125.

Розв'язання. Нехай подія A={утворення числа 125},подія A_1={поява 1 при першому вийманні картки}, A_2={поява 2 при другому вийманні}, A_3={поява 5 при третьому вийманні}. Маємо $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Події A_1, A_2 та A_3 є залежними. Тому за формулою (6) $P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3)$. Оскільки $P(A_1) = \frac{1}{10}$, $P_{A_1}(A_2) = \frac{1}{9}$, $P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{1}{8}$, то

$$P(A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{720}.$$

Приклад 6. Робітник обслуговує три однотипні верстати. Ймовірність того, що на протязі зміни відбудеться аварійна зупинка будь-якого верстата, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що на протязі зміни відбудеться аварійна зупинка: а) на всіх трьох верстатах; б) хоча б на одному верстаті.

Розв'язання. Нехай подія A_i={аварійна зупинка виникне на i-ому верстаті}, $i = 1,\ 2,\ 3$. Події A_1, A_2 та A_3 є незалежними.

а) Подія B={аварійна зупинка відбудеться на всіх трьох верстатах} відповідає добутку подій $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

$$P\left(B\right) = P\left(A_1 A_2 A_3\right) =$$

$$= P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2\right) \cdot P\left(A_3\right) = \left(0,6\right)^3 = 0,216.$$

б) Нехай подія C={аварійна зупинка відбудеться хоча б на одному верстаті}. Тоді протилежна подія $\overline{C} =${аварійної зупинки не відбудеться на жодному верстаті}, $\overline{C} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$,

$$P\left(\overline{C}\right)=P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot P\left(\overline{A_3}\right)=$$
,

$$=\left(1-0,6\right)^3=0,064.$$

$$P\left(C\right)=1-P\left(\overline{C}\right)=1-0,064=0,936.$$

У цьому прикладі була знайдена ймовірність настання хоча б однієї події з кількох незалежних подій. Для цього було знайдено ймовірність протилежної події – {жодна з кількох незалежних подій не з'явилась}.

Приклад 7. Ймовірність того, що стрілець при трьох пострілах влучить у ціль хоча б один раз, дорівнює 0,936. Знайти ймовірність влучення стрільцем у ціль у одному пострілі.

Розв'язання. Нехай подія A={стрілець влучив у ціль хоча б один раз}. За умовою

$P(A)=0,936=1-q^3$, де $q=1-p$, p – ймовірність влучення у ціль при одному пострілі.

$q^3=1-0,936=0,064$, $q=\sqrt[3]{0,064}=0,4$.

Тоді $p=1-q=1-0,4=0,6$.

Теорема 4. Ймовірність настання хоча б однієї з двох сумісних подій, *A* чи *B*, дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх спільної появи:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (8)$$

Приклад 8. Для виконання завдання замовник звернувся до двох виконавців. Ймовірність виконання завдання першим виконавцем дорівнює 0,8, другим – 0,9. Знайти ймовірність того, що завдання буде виконано.

Розв'язання. Нехай подія A_1={завдання виконано першим виконавцем}, подія A_2={завдання виконано другим виконавцем}. За умовою ймовірності цих подій $P(A_1)=0,8$, $P(A_2)=0,9$. Завдання буде виконано, якщо матиме місце сума сумісних подій A_1 та A_2. Використовуючи формулу (8), знаходимо: $P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$.

Події A_1 та A_2 є незалежними, тому $P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)$.

Остаточно, підставляючи задані значення ймовірностей подій A_1 та A_2, отримуємо:

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2)=$$

$$=0,8+0,9-0,8\cdot 0,9=0,98.$$

6.Формула Бернуллі

Розглянемо задачу про багаторазове повторення випробування, у результаті якого може з'явитися або не з'явитися деяка подія A. Потрібно знайти ймовірність того, що у серії з n випробувань подія A настане m разів.

Якщо ймовірність настання події A у кожному випробуванні не залежить від результатів других випробувань, то такі випробування називають ***незалежними відносно цієї події***. Якщо незалежні випробування здійснюються у однакових умовах, то ймовірність настання події A у цих випробуваннях є сталою.

Нехай здійснюється n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може настати з сталою ймовірністю p, або не настати з відповідною ймовірністю $q = 1 - p$.

Ймовірність настання події A у серії з n випробувань m разів визначається за формулою:

$$P\left(B_m\right) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (3.1)$$

Тут $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\left(n-m\right)!}$ – кількість способів вибрати з n елементів m. Формулу (3.1) називають ***формулою Бернуллі***, а випробування, що повторюються та задовольняють умовам незалежності та сталості ймовірності настання у кожному з них події A, називають ***випробуваннями за схемою Бернуллі.***

Приклад. Прилад складається з 10 блоків, ймовірність безвідмовної роботи кожного з яких дорівнює 0,8. Блоки виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що відмовлять 2 блоки.

Розв'язання. Нехай подія A={відмова блока}. Тоді, за умовою задачі

$$P(A) = p = 1 - 0,8 = 0,2,$$

$$P(\overline{A}) = q = 1 - p = 0,2.$$

За формулою Бернуллі (3.1) при значеннях $n = 10$, $m = 2$, знаходимо шукану ймовірність:

$$P_{10}(2) = C_{10}^{2} p^{2} q^{10-2} =$$

$$= \frac{10!}{2!8!} \cdot (0,2)^{2} \cdot (0,8)^{8} \approx 0,302.$$

Зауважимо, що ймовірність настання події A у серії з n випробувань за схемою Бернуллі хоча б один раз доцільно визначати за формулою

$$P = 1 - q^{n}.$$

7. Поняття випадкової величини

Випадковою величиною називають величину, яка у результаті випробування приймає одне і лише одне значення, наперед невідоме, залежне лише від випадкових, не передбачуваних наперед причин.

Прикладами випадкових величин є: кількість очок, що з'являються на верхній грані грального кубика внаслідок його відкидання, час безвідмовної роботи двигуна автомобіля, кількість пострілів, які зробить стрілець до влучення у ціль, зріст людини у певному віці тощо. Випадкову величину можна розглядати як дійсну функцію, визначену на просторі елементарних подій для даного випробування. Розрізняють дискретні та неперервні випадкові величини.

Дискретною називають випадкову величину, що приймає скінченну або нескінченну злічену множину значень.

Приклади дискретної випадкової величини: кількість дзвінків, що надходить на телефонну станцію на протязі доби, кількість бракованих деталей у партії з n деталей, кількість підкидань грального кубика до появи на верхній грані п’яти очок тощо.

Неперервною називають випадкову величину, що може приймати будь-які значення з деякого, скінченного або нескінченного інтервалу.

Кількість можливих значень неперервної випадкової величини завжди є нескінченним. Приклади неперервної випадкової величини: час безвідмовної роботи верстата, похибка вимірювання деякої величини, вага людини у певному віці тощо.

Випадкові величини позначають великими латинськими літерами – X, Y, Z,..., а їх можливі значення – відповідними малими латинськими літерами – x, y, z,.... Запис $P\left(X = x_1\right) = p_1$ означає: ймовірність того, що випадкова величина прийме значення x_1, дорівнює p_1.

Нехай X – дискретна випадкова величина, що може прийняти внаслідок випробування одне з можливих значень x_1, x_2, ..., x_n з відповідними ймовірностями:

$$P(X = x_1) = p_1,\ P(X = x_2) = p_2,\ \ldots,$$

$$P(X = x_n) = p_n.$$

Події $X = x_1$, $X = x_2$, …, $X = x_n$ утворюють повну групу несумісних подій, тому $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Законом розподілу дискретної випадкової величини називають відповідність між її можливими значеннями та ймовірностями їх появи. Закон розподілу можна задати у вигляді таблиці, аналітично (у вигляді формули) або графічно.

При поданні закону розподілу дискретної випадкової величини у табличній формі задають таблицю, перший рядок якої містить всі можливі значення цієї випадкової величини, другий рядок – ймовірності отримання цих значень. Тут закон розподілу має наступний вигляд.

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Приклад 1. Монету підкинули 3 рази. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини – кількості появ герба.

Розв'язання. Маємо серію з 3 випробувань за схемою Бернуллі. Ймовірність появи герба у одному випробуванні $p = 0,5$, $q = 1 - p = 0,5$, $n = 3$.

$P\left(X = 0\right) = \left(0,5\right)^3 = 0,125,$

$$P(X=1)=C_3^1(0,5)(0,5)^2=3\cdot 0,125=0,375,$$

$$P(X=2)=C_3^2(0,5)^2(0,5)=0,375,$$

$$P(X=3)=(0,5)^3=0,125.$$

Закон розподілу випадкової величини x має вигляд:

X	0	1	2	3
p	0,125	0,375	0,375	0,125

Контроль: 0,125+0,375+0,375+0,125=1.

Табличну форму запису закону розподілу дискретної випадкової величини називають також ***рядом розподілу***.

При графічному зображенні дискретної випадкової величини у прямокутній системі координат xOp вздовж осі абсцис наносять всі можливі значення випадкової величини, а вздовж осі ординат – ймовірності, що їм відповідають. Далі будують точки $\left(x_i, p_i\right)$ і з'єднують їх відрізками. Отримана фігура називається ***многокутником розподілу***.

Нехай дискретна випадкова величина може приймати n значень x_1, x_2,…, x_n з рівними ймовірностями $\dfrac{1}{n}$. Таку величину називають розподіленою за ***рівномірним законом на скінченній множині*** з n елементів. Прикладом випадкової величини з таким законом розподілу є кількість очок, що випадуть на верхній грані грального кубика після його підкидання. Цей закон розподілу у аналітичній формі матиме вигляд:

$$P\left(X = x_k\right) = \frac{1}{n},\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Найбільш загальною формою представлення випадкової величини є функція розподілу, що використовується для представлення як дискретних, так і неперервних випадкових величин.

Функцією розподілу випадкової величини називають функцію $F\left(x\right)$, яка кожному значенню аргументу x ставить у відповідність ймовірність того, що дана випадкова величина прийме значення, менше за x: $F\left(x\right) = P\left(X < x\right)$.

Для дискретної випадкової величини X, яка може приймати значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з відповідними ймовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) = \sum_{x_i < x} p_i . \qquad (1)$$

Нерівність $x_i < x$ під знаком суми означає, що підсумовування розповсюджується на значення x_i, що є меншими за x.

Приклад 2. Побудувати функцію розподілу для дискретної випадкової величини X з прикладу 1.

Розв'язання. При $x \le 0$ маємо $F(x) = P(X < x) = 0$, при $x \in (0;\ 1]$ $F(x) = P(X = 0) = 0{,}125$, при $x \in (1;\ 2]$ знаходимо значення:

$$F(x)=P(X=0)+$$

$$+P(X=1)=0,125+0,375=0,5,$$

при $x\in(2;\ 3]$ отримуємо

$$F(x)=P(X=0)+P(X=1)+$$

$$+P(X=2)=0,875,$$

при $x>3$ функція ймовірностей

$$F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+$$

$$+P(X=3)=1.$$

8. Математичне сподівання дискретної випадкової величини

Однією з найбільш важливих числових характеристик випадкової величини є її математичне сподівання. Розглянемо дискретну випадкову величину X, що приймає свої можливі значення x_1, x_2,…, x_n з відповідними ймовірностями p_1, p_2, …,p_n.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають суму добутків всіх її можливих значень на їх ймовірності:

$$M\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i \qquad (1)$$

Для математичного сподівання випадкової величини X використовують позначення $M\left(X\right)$, m_{x} або m.

Якщо розглядати можливі значення x_1, x_2,…, x_n випадкової величини X як координати точок на числовій прямій, а ймовірності p_1, p_2, …, p_n – як ваги вантажів, підвішених у цих точках, то математичне сподівання $M\left(X\right)$ буде співпадати з координатою центра ваги даної системи. Цей факт відображає механічний зміст математичного сподівання випадкової величини.

Нехай здійснена велика кількість n випробувань, у яких випадкова величина X m_1 разів прийняла значення x_1, m_2 рази прийняла значення $x_2,\ldots,m_k$ разів прийняла значення x_k, причому $m_1+m_2+...+m_k=n$. Середнє арифметичне отриманих значень випадкової величини X:

$$\overline{X}=\frac{x_1m_1+x_2m_2+...+x_km_k}{n}=x_1\cdot\frac{m_1}{n}+$$

$$+x_2\cdot\frac{m_2}{n}+...+x_k\cdot\frac{m_k}{n}=\sum_{i=1}^{k}x_iw_i.$$

Тут $w_i=\dfrac{m_i}{n}$ – відносна частота появи значення x_i, яка при достатньо великій кількості випробувань n наближено дорівнює ймовірності його появи: $w_i \approx p_i$. Таким чином, математичне сподівання випадкової величини наближено дорівнює середньому арифметичному її значень, отриманих у результаті великої кількості випробувань. Виходячи з цього, математичне сподівання випадкової величини називають також її ***очікуваним середнім значенням***.

Приклад 1. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини X, що приймає значення $x_1 = -1$ з ймовірністю $p_1 = 0,3$, $x_2 = 0$ з ймовірністю $p_2 = 0,5$, $x_3 = 1$ з ймовірністю $p_3 = 0,2$.

Розв'язання. За формулою (1) отримаємо:

$$M\left(X\right) = \left(-1\right) \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,2 = -0,1.$$

З означення математичного сподівання дискретної випадкової величини випливають його основні властивості.

1. Математичне сподівання сталої величини C дорівнює цій сталій: $M\left(C\right)=C$.

2. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання:

$M\left(CX\right)=C\cdot M\left(X\right)$, $C=\text{const}$.

3. Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M\left(X+Y\right)=M\left(X\right)+M\left(Y\right).$$

4. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M\left(XY\right)=M\left(X\right)\cdot M\left(Y\right).$$

9. Дисперсія дискретної випадкової величини

У більшості випадків математичне сподівання не може у достатній мірі характеризувати випадкову величину. Для оцінки відхилень її можливих значень від математичного сподівання використовують дисперсію та середнє квадратичне (стандартне) відхилення.

Нехай дискретна випадкова величина X може приймати свої можливі значення x_i з відповідними ймовірностями p_i, $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$. Відхилення можливих значень x_i випадкової величини X від її математичного сподівання можна оцінити за допомогою різниць $x_i - M\left(X\right)$, проте середнє значення цих різниць для будь-якої випадкової величини дорівнює нулю:

$$M\left(X-M\left(X\right)\right)=M\left(X\right)+M\left(-M\left(X\right)\right)=$$

$$=M\left(X\right)-M\left(X\right)=0.$$

Тому замість відхилень $x_i-M\left(X\right)$ розглядають їхні квадрати $\left(x_i-M\left(X\right)\right)^2$. Їх можна охарактеризувати як значення випадкової величини $\left(X-M\left(X\right)\right)^2$, які вона приймає з тими ж ймовірностями, що й випадкова величина X значення x_1.

Означення 1. ***Дисперсією*** дискретної випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата її відхилення від математичного сподівання:

$$D(X) = M\left(X - M(X)\right)^2 = \\ = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^2 \cdot p_i. \tag{1}$$

Для позначення дисперсії поряд з $D(X)$ використовують також символи σ_x^2 або σ^2.

Означення 2. *Середнім квадратичним* або *стандартним відхиленням* дискретної випадкової величини X називають квадратний корінь з її дисперсії:

$$\sigma_x = \sigma = \sqrt{D(X)}. \tag{2}$$

На практиці для обчислення дисперсії часто використовують формулу, більш зручну, ніж (1), згідно з якою <u>дисперсія випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата цієї</u>

випадкової величини та квадратом її математичного сподівання:

$$\sigma_x^2 = M\left(X^2\right) - \left(M\left(X\right)\right)^2 = $$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2. \qquad (3)$$

Приклад. Випадкова величина *X* приймає значення $x_1 = 1$ з ймовірністю $p_1 = 0,2$, $x_2 = 2$ з ймовірністю $p_2 = 0,6$, $x_3 = 3$ з ймовірністю $p_3 = 0,2$. Знайти її дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання. Для знаходження дисперсії заданої випадкової величини використаємо формулу (3), згідно з якою отримуємо:

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2 = 1^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,6 +$$
$$+3^2 \cdot 0,2 - \left(1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,2\right)^2 = 0,4.$$

Середнє квадратичне відхилення знаходимо за формулою (2):

$$\sigma_x = \sqrt{0,4} \approx 0,63.$$

Розглянемо властивості дисперсії

1. Дисперсія сталої величини дорівнює нулю.

2. Сталий множник можна винести за знак дисперсії, піднісши його до квадрата: $D(cX) = c^2 D(X)$.

3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює їх сумі дисперсій.

4. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій.