

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Запорізька державна інженерна академія



Є.М. Кісельов
М.В. Світанько
Л.Л. Верьовкін

АВТОМАТИЗАЦІЯ СХЕМОТЕХНІЧНОГО ПРОЕКТУВАННЯ

**методичні вказівки до самостійної роботи і виконання контрольних
робіт**

*для студентів ЗДІА напряму підготовки
6.050801 Мікро- та наноелектроніка*

м. Запоріжжя
2014 р.

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Запорізька державна інженерна академія

АВТОМАТИЗАЦІЯ СХЕМОТЕХНІЧНОГО ПРОЕКТУВАННЯ

**методичні вказівки до самостійної роботи і виконання контрольних
робіт**

*для студентів ЗДІА напряму підготовки
6.050801 Мікро- та наноелектроніка*

*Рекомендовано до видання
на засіданні кафедри ФБМЕ
протокол № від*

Автоматизація схемотехнічного проектування. Методичні вказівки до самостійної роботи і виконання контрольних робіт для студентів ЗДІА напряму підготовки 6.050801 «Мікро- та наноелектроніка» / Укладачі: Є.М. Кісельов, М.В. Світанько, Л.Л. Верьовкін – Запоріжжя: Вид-во ЗДІА, 2014.- 30 с.

Розглянуті рекомендації до самостійної роботи студентів з методів синтезу топологічних рівнянь електронних схем.

Укладачі: ***Є.М. Кісельов, доцент***
М.В. Світанько, доцент
Л.Л. Верьовкін, доцент

Відповідальний за випуск: ***завідуючий кафедри ФБМЕ***
к.т.н., професор Є. Я. Швець

Зміст

Вступ	4
1. Матрично - векторні параметри схем	5
2. Метод контурних струмів	10
3. Метод вузлових потенціалів	12
4. Приклад побудови матриці провідності	23
Література	25
Додаток А	26

Вступ

Схемотехнічне проектування передбачає урахування реальних фізичних обмежень при відображенні електричних процесів – так званих законів збереження. Такими обмеженнями є перший і другий закони Кирхгофа, що витікають з законів збереження заряду і роботи та називаються законами електричної рівноваги. Необхідність виконання цих законів у кожній розрахунковій точці потребує рішення відповідних рівнянь електричної рівноваги, що становить найбільш суттєву відміну схемотехнічного проектування від інших видів проектування електронних пристроїв, які не потребують рішення рівнянь рівноваги.

Т.ч., у математичну модель електронного пристрою у схемотехнічному проектуванні входять не лише моделі окремих елементів і рівняння їх зв'язку, а й рівняння електричної рівноваги, що складаються на основі законів Кирхгофа і які мають назву топологічних рівнянь.

У наведеному матеріалі представлено методи синтезу топологічних рівнянь, що набули найбільше поширення у схемотехнічному проектуванні. Також пропонується виконання самостійних завдань з синтезу топологічних рівнянь у матричному вигляді за варіантами, що наведено у Додатку А. Ці завдання призначені для контролю знань студентів денної форми навчання у вигляді аудиторних контрольних робіт і студентів заочної форми навчання – у вигляді домашніх контрольних робіт.

1. Матрично - векторні параметри схем

Для розрахунку простих схем використовуються рівняння у вигляді законів Кирхгофа, які формулюються таким чином:

1. Перший закон Кирхгофа: алгебраїчна сума струмів у вузлі дорівнює 0.
2. Другий закон Кирхгофа: алгебраїчна сума напруги на опорах, що входять в будь-який замкнутий контур дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС. Або, що, те ж саме, алгебраїчна сума падінь напруги на елементах уздовж будь-якого замкнутого контуру дорівнює 0.

При розгляді реальних ланцюгів електронної техніки виникає необхідність роботи з матричним описом співвідношень для елементів ланцюгів. Розглянемо гілку, що складається з резистора і джерела ЕРС (рис. 1.1).

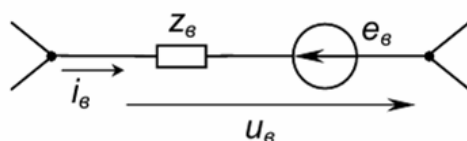


Рисунок 1.1 – Приклад гілки електричного ланцюга

Рівняння закону Ома для гілки має вигляд:

$$u_{\varepsilon} = z_{\varepsilon} \cdot \dot{i}_{\varepsilon} + e_{\varepsilon}$$

При записі рівняння необхідно правильно враховувати позитивні напрями струму і напруги на елементах схеми.

Нехай схема містить l гілок, в яких є компоненти z і e . Тоді систему рівнянь, що описують схему, можна записати у вигляді:

[illegible]

Переходячи до зручнішої матричної форми запису, отримаємо:

$$U_g = Z_g \cdot I_g + E_g$$

де U_v , I_v , E_v матриці вигляду:

$$U_{\epsilon} = \begin{vmatrix} u_{\epsilon 1} \\ u_{\epsilon 2} \\ \dots \\ u_{\epsilon l} \end{vmatrix}; \quad I_{\epsilon} = \begin{vmatrix} i_{\epsilon 1} \\ i_{\epsilon 2} \\ \dots \\ i_{\epsilon l} \end{vmatrix}; \quad E_{\epsilon} = \begin{vmatrix} e_{\epsilon 1} \\ e_{\epsilon 2} \\ \dots \\ e_{\epsilon l} \end{vmatrix};$$

вектора напруги гілок, струмів гілок, ЕРС гілок,

$$Z_{\epsilon} = \begin{vmatrix} z_{\epsilon 1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_{\epsilon 2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & z_{\epsilon l} \end{vmatrix};$$

матриця опорів гілок.

Нехай деяка гілка електричного ланцюга має вигляд (рис. 1.2):

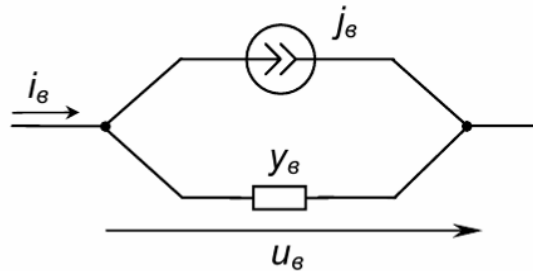


Рисунок 1.2 – Приклад гілки електричного ланцюга з паралельно сполученими джерелом струму і резистивним елементом

Струм гілки визначається співвідношенням:

$$i_{\epsilon} = y_{\epsilon} \cdot u_{\epsilon} + j_{\epsilon}$$

У матричному вигляді, по аналогії з попереднім, його можна записати в наступному вигляді:

$$I_{\epsilon} = Y_{\epsilon} \cdot U_{\epsilon} + J_{\epsilon},$$

де J_{ϵ} – вектор джерел струму гілки:

$$J_{\epsilon} = \begin{vmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \dots \\ j_l \end{vmatrix};$$

матриця провідності гілок:

$$Y_{\epsilon} = \begin{vmatrix} y_{\epsilon 1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_{\epsilon 2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & y_{\epsilon l} \end{vmatrix};$$

Приведемо останню форму запису рівнянь до першої. Для цього помножимо обидві частини рівняння на Y_{ϵ}^{-1} зліва. Отримаємо:

$$\begin{aligned}
Y_{\epsilon}^{-1} I_{\epsilon} &= Y_{\epsilon}^{-1} Y_{\epsilon} \cdot U_{\epsilon} + Y_{\epsilon}^{-1} J_{\epsilon} \\
U_{\epsilon} &= Y_{\epsilon}^{-1} \cdot I_{\epsilon} - Y_{\epsilon}^{-1} J_{\epsilon} \\
Y_{\epsilon}^{-1} &= Z_{\epsilon}; \quad -Y_{\epsilon}^{-1} \cdot J_{\epsilon} = E_{\epsilon} \\
U_{\epsilon} &= Z_{\epsilon} \cdot I_{\epsilon} + E_{\epsilon}
\end{aligned}$$

Останнє співвідношення говорить про ідентичність запису рівнянь за законом Ома для ділянок ланцюга, що містять ЕРС, а знак мінус в останньому виразі указує на той факт, що ЕРС в першій формі запису направлена проти струму в другій формі.

Для визначення режиму в схемі з l гілок необхідно записати $2l$ рівнянь. Приведені записи по законах Ома дають лише l рівнянь, не дістаючи l рівнянь необхідно знайти з 1-го і 2-го законів Кирхгофа.

Розглянемо деяку довільну схему, причому, оскільки нам поки не важливо, які елементи входять в її гілки, позначатимемо кожен гілку лінією, що сполучає відповідні вузли, - крапки на схемі. Зображена таким чином скелетна схема має вид рис. 1.3.

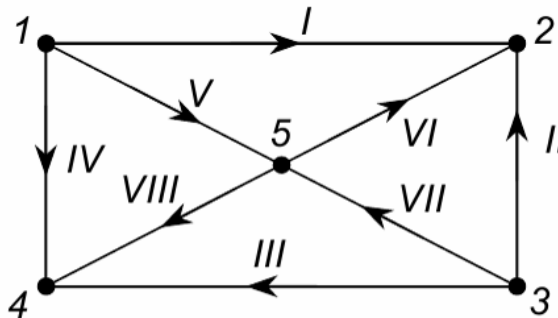


Рисунок 1.3 – Приклад скелетної схеми

У схемі є 5 вузлів і 8 гілок. Оберемо позитивні напрями струмів гілок. Побудуємо сукупність гілок, які не утворюють замкнутого контуру і пов'язану зі всіма вузлами схеми (див. рис. 1.4). Таких сукупностей може бути декілька. Вони називаються деревом схеми. Гілки дерева називаються ребрами; гілки, що не входять в дерево, - хордами.

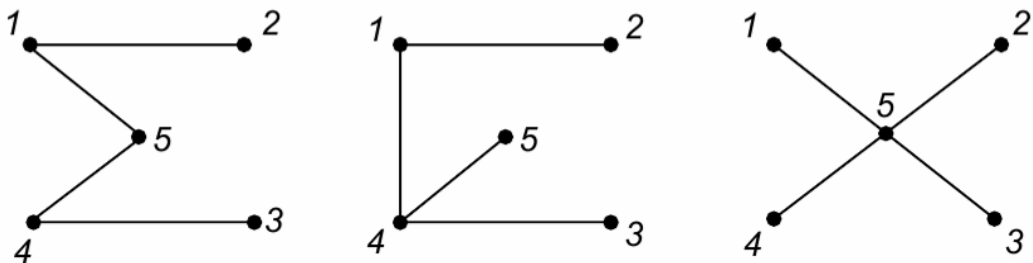


Рисунок 1.4 – Приклади побудови дерев схеми

Оскільки всі вузли схеми зв'язані між собою сукупністю ребер схеми, то кількість незалежних напруг в схемі дорівнює кількості ребер обраного дерева. В той же час не можна записати жодного рівняння по 2 закону Кирхгофа, в яких входила б тільки напруга ребер, оскільки будь-який замкнутий контур

утворюється хоч би однією хордою. Таким чином, напруга на хордах може бути визначена, виходячи з другого закону Кирхгофа.

У схемі можна виділити декілька контурів для запису 2-го закону Кирхгофа. Виділимо серед них тільки ті, які проходять тільки через одну хорду, а останні - ребра. Такі контури отримали назви головних контурів. Напрями головних контурів визначаються співпадаючими з напрямками струму єдиної хорди, яка входить в них. Візьмемо за основу дерево вибраної скелетної схеми виду рис. 2.5. Тоді головні контури, кількість яких дорівнює кількості хорд $\sigma = 4$, мають вигляд, зображений на рис. 2.5. Кількість рівнянь, записаних по 2 закону Кирхгофа рівне числу хорд, дорівнює σ . З них можна виразити напругу хорд через напругу ребер, які є незалежними.

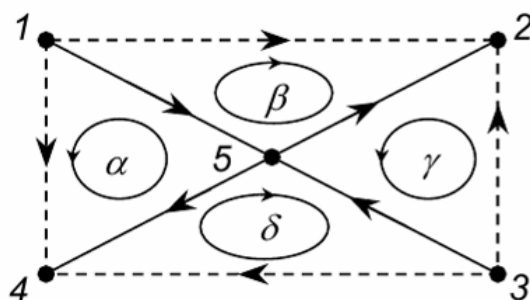


Рисунок 1.5 – Головні контури схеми

З іншого боку, струми всіх ребер дерева можна завжди виразити через струми хорд. Це витікає з того, що завжди можна вибрати такий перетин схеми, в які входить лише одне ребро, оскільки вони, за визначенням, не утворюють замкнутих контурів. Такі перетини схеми називаються головними перетинами, число їх дорівнює числу ребер і позначається ν . Для нашого випадку маємо дерево і перетини вигляду рис. 2.6. При цьому напрям головного перетину співпадає з напрямом струму єдиного ребра.

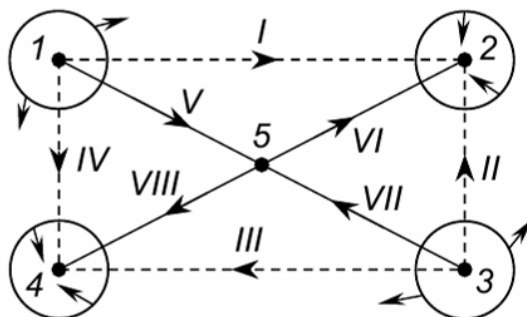


Рисунок 1.6 – Дерево і перетини схеми

По першому закону Кирхгофа струми ребер виражаються через струми хорд, які є незалежними, а число рівнянь по 1-у закону Кирхгофа дорівнює числу ребер ν .

Таким чином, загальне число рівнянь, складених по 1-му і 2-му законам Кирхгофа, рівне: $\nu + \sigma = l$, тобто числу гілок схеми. Таким чином, в принципі, система l рівнянь, записана за законом Ома для схеми в матричному вигляді, доповнена l рівняннями по законам Кирхгофа, тобто принципово створюється можливість її рішення, оскільки є система $2l$ рівнянь з $2l$ невідомими.

Виникає питання про практичний підхід до складання системи рівнянь по законах Кирхгофа.

Введемо поняття матриці головних контурів Γ і головних перетинів Π . Матриця головних контурів - прямокутна матриця розміром $[\sigma, l]$ (перший індекс - номер рядка, другий номер стовпця), у якій для кожного контура відведений рядок, а для кожної гілки - стовець. У перетині k -го рядка і s -го стовпця записується $\Gamma_{ks} = +1$, якщо k -ий контур проходить через s -тую гілку і співпадає з нею по напрямку; елемент $\Gamma_{ks} = -1$, якщо s -та гілка проходить через k -ий контур і протилежна з ним по напрямку, і, нарешті, елемент $\Gamma_{ks} = 0$, якщо до контуру k s -та гілка не входить.

Розглянемо матрицю головних контурів для нашого прикладу:

$$\Gamma = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} I & II & III & IV & V & VI & VII & VIII \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{array} \end{array}$$

Раніше було введено вектор напруги на гілках U_ϵ розміру $[l, l]$. Якщо тепер перемножити матрицю Γ на вектор U_ϵ , то отримаємо систему рівнянь по другому закону Кирхгофа у вигляді:

$$\Gamma \cdot U_\epsilon = 0$$

Скалярний запис останнього рівняння дасть σ скалярних рівнянь по другому закону Кирхгофа.

Розглянемо спосіб складання рівнянь по 1-у закону Кирхгофа. Визначимо матрицю головних перетинів Π розміру $[v, l]$, де кожному головному перетину відведений рядок, а кожній гілці - стовець. Правило складання матриці Π аналогічно: елемент $\pi_{ks} = 1$, якщо k -тий перетинів включає s -ту гілку і напрями їх співпадають, елемент $\pi_{ks} = -1$; якщо напрями перетину і гілки протилежні, і, нарешті, елемент $\pi_{ks} = 0$, якщо перетин k не включає s -ту гілку.

Перемноживши матрицю Π на вектор струмів гілок I_ϵ , отримаємо матричне рівняння по 1-у закону Кирхгофа. У скалярній формі запису, вказане рівняння є системою v алгебраїчних рівнянь по 1-у закону Кирхгофа.

Таким чином, останні отримані нами рівняння в сукупності з рівняннями закону Ома дають систему $2l$ рівнянь, що описують таку схему. Вирішення отриманих $2l$ скалярних рівнянь, або матричних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} U_\epsilon = Z_\epsilon \cdot I_\epsilon + E_\epsilon \\ \Gamma \cdot U_\epsilon = 0 \\ \Pi \cdot I_\epsilon = 0 \end{cases}$$

достатньо трудомістко. Розглянемо можливість приведення його до зручнішої форми і скорочення числа змінних в рівняннях.

2. Метод контурних струмів

Введемо поняття вектора-стовпця контурних струмів I . Розмір вектора $[\sigma, l]$, він має вигляд:

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_\sigma \end{bmatrix};$$

Елементи матриці Γ показують, як k -ий контур входить в s -ту гілку схеми. Матрицю Γ можна використовувати для зв'язку величин контурних струмів із струмами гілок. Для цього необхідно виконати множення матриці Γ на вектор I . Для цього, необхідно транспонувати матрицю Γ , замінивши індекси у елементів місцями: $[\Gamma_{ij}]_t = [\Gamma_{ji}]$. Тепер матриця Γ_t має розмір $[l, \sigma]$, тоді можна здійснювати множення:

$$I_\sigma = \Gamma_t \cdot I$$

Останнє рівняння відображає залежність l струмів гілок від σ контурних струмів. Оберемо останні як незалежні змінні, тобто шукатимемо контурні струми, що протікають, за визначенням, через хорди схеми.

Розглянемо рівняння за законом Ома у вигляді:

$$U_\sigma = Z_\sigma \cdot I_\sigma + E_\sigma$$

Підставимо в це рівняння значення I_σ , рівне $\Gamma_t \cdot I$. Отримаємо:

$$U_\sigma = Z_\sigma \cdot \Gamma_t \cdot I + E_\sigma$$

Помножимо останню рівність на матрицю контурів Γ зліва. Отримаємо:

$$\Gamma \cdot U_\sigma = \Gamma \cdot Z_\sigma \cdot \Gamma_t \cdot I + \Gamma \cdot E_\sigma$$

За другим законом Кирхгофа $\Gamma \cdot U_\sigma = 0$, тоді введемо відповідні спрощення:

$$\Gamma \cdot Z_\sigma \cdot \Gamma_t = Z \quad \Gamma \cdot E_\sigma = -E \Rightarrow Z \cdot I = E$$

Розглянемо розмірність отриманих виразів:

$$\begin{aligned} [\Gamma_t] &= [l, \sigma], \quad Z_\sigma = [l, l] \\ [Z_\sigma \cdot \Gamma_t] &= [l, \sigma] \quad \Gamma = [\sigma, l] \Rightarrow Z = [\sigma, \sigma] \end{aligned}$$

Таким чином, матриця Z – квадратна матриця розміру $[\sigma, \sigma]$, яка отримала назву матриці опорів схеми:

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1\sigma} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2\sigma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{\sigma 1} & z_{\sigma 2} & \dots & z_{\sigma\sigma} \end{bmatrix}$$

Вектор E має розмірність:

$$\Gamma = [\sigma, l] \quad E_\sigma = [l, 1] \Rightarrow E = [\sigma, 1]$$

Вектор E – вектор з.р.с. схеми.

Знаходження Z і E не представляє проблем, оскільки всі компоненти цих матриць відомі. Таким чином, ми приходимо до матричного рівняння вигляду

$$Z \cdot I = E,$$

відповідному σ скалярних рівнянь, вирішення яких можна здійснити, обернувши матрицю Z :

$$I = Z^{-1} \cdot E$$

Т. ч., число скалярних рівнянь або порядок векторного рівняння понижений з $2l$ до σ .

Принципових труднощів при вирішенні рівняння немає.

На практиці, особливо при вирішенні рівнянь для реальних електричних схем, набув більшого поширення метод вузлових потенціалів в матричному вигляді, який у ряді випадків зручніший.

3. Метод вузлових потенціалів

Введемо поняття вектора-стовпця потенціалів схеми U . Відлічуватимемо потенціали всіх вузлів схеми від деякого базисного вузла, який не охоплений жодним перетином. Тоді вектор-стовпець вузлових потенціалів

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_v \end{bmatrix};$$

має розмірність $[v, 1]$, рівну числу вузлів схеми без одного, тобто числу ребер дерева.

Як було показано раніш, у матриці головних перетинів $\Pi [v, l]$ елементи матриці Π визначають перетини, на яких закінчуються гілки схеми. При цьому число елементів матриці, відмінних від 0 в кожному стовпці, завжди дорівнює 2, оскільки це означає, що гілку сполучає два вузли схеми. Винятки становлять гілки, що виходять з базисного вузла, або в нього що входять, оскільки для них число відмінних від 0 елементів в стовпці дорівнює 1.

Таким чином, напруга на гілці можна характеризувати різницею потенціалів між вузлами, причому якщо гілка сполучає вузли i і j , та напруга дорівнює $U_g = U_i - U_j$; якщо гілка виходить з базисного вузла схеми, то напруга на ній дорівнює потенціалу іншого вузла. Тому вектор напруги на гілках розмірністю $[l, 1]$ можна визначити у вигляді матричного твору матриць Π і U , проте при цьому матриця Π повинна бути заздалегідь транспонована тобто:

$$[\pi_{ij}]_t = [\pi_{ji}].$$

При цьому розмір матриці $\Pi_t = [l, v]$, а вираз для напруги на гілках схеми має вигляд:

$$U_g = \Pi_t \cdot U.$$

Вираз для закону Ома для представлення гілок у вигляді паралельного об'єданого джерела струму і провідності:

$$I_g = Y_g \cdot U_g + J_g.$$

Підставляючи у вказаний вираз значення U_g , виражене через $\Pi_t \cdot U$, отримаємо:

$$I_g = Y_g \cdot \Pi_t \cdot U + J_g.$$

Помножимо це рівняння на матрицю Π зліва:

$$\Pi \cdot I_g = \Pi \cdot Y_g \cdot \Pi_t \cdot U + \Pi \cdot J_g.$$

По першому закону Кирхгофа в матричному вигляді:

$$\Pi \cdot I_g = 0.$$

Проведемо перепозначення:

$$\Pi \cdot Y_g \cdot \Pi_t = Y \quad J = -\Pi \cdot J_g.$$

Де Y — квадратна матриця розміром $[v, v]$, яка отримала назву матриці провідності схеми, вектор J — вектор розміру $[v, 1]$, що називається вектором задаючих струмів схеми.

Помножимо отримане рівняння на Y^{-1} зліва і отримаємо:

$$Y \cdot U = J \quad \text{або} \quad U = Y^{-1} \cdot J.$$

Це співвідношення реалізує метод вузлових потенціалів в матричному вигляді.

Останні співвідношення дозволяють провести розрахунок схеми по методу вузлових потенціалів, проте, для отримання результату необхідно визначити значення матриць Y і J . Таке завдання вирішується шляхом двократного перемножування матриць Π , Y_e і Π_t , а вектор задаючих струмів схеми J визначається шляхом множення матриці Π на вектор J_e . Проте таке рішення задачі вельми громіздко, оскільки вимагає виконання операцій з матрицями. Існує формалізований спосіб побудови матриць Y і J , який витікає з властивостей матриці. Покажемо цей спосіб, а потім доведемо його.

1. Можна стверджувати, що якщо схема складається тільки з двополюсників, то матриця Y діагонально симетрична, тобто для будь-яких k і s , що належать інтервалу $k, s \in [1, v]$ справедливе співвідношення: $y_{ks} = y_{sk}$ (розмір матриці Y — $[v, v]$, що визначається кількості рівнянь щодо вузлових потенціалів, що дорівнює кількості перетинів схеми на одиницю меншій, ніж кількість вузлів).

2. Елемент діагоналі y_{kk} дорівнює сумі провідності гілок, що перетинаються k -тим перетином. При цьому y_{kk} називається власною провідністю k -го перетину.

3. y_{ks} — сума провідності гілок, загальних для k -го і s -го перетинів; y_{ks} називається взаємною провідністю k -го і s -го перетинів.

При цьому порядок складання матриці полягає в наступному:

1) заготовлюється квадратна таблиця розміром $v \times v$, тобто числом рядків і стовпців, рівним кількості головних перетинів.

2) по черзі розглядаються всі гілки, що входять в схему, і їх провідність вписується з відповідним знаком у відповідні клітки у вигляді доданків.

3) провідність гілок алгебраїчно підсумовується з тими елементами квадратної матриці, які розташовані на перетині рядків і стовпців, які мають номер тих, що перетинають цю гілку головних перетинів. При цьому знак складових взаємної провідності визначається взаємним розташуванням головних перетинів.

Припустимо, що в схемі є А, В, С, D перетини. Чергова гілка проходить через перетини А, С, D, напрями яких зображені на рис. 3.1: (Можна припустити, що ця гілка є хордою, оскільки через ребро, за визначенням, проходить лише один перетин).

При цьому складові матриці Y відповідні вказаній гілці, мають вигляд:

A	B	C	D	
$+y_6$	0	$-y_6$	$+y_6$	A
0	0	0	0	B
$-y_6$	0	$+y_6$	$-y_6$	C
$+y_6$	0	$-y_6$	$+y_6$	D

Очевидно, що якщо гілка перетинає m перетинів, то вона записується в m^2 кліток таблиці. Провідність ребер дерева записується в клітки матриці тільки один раз.

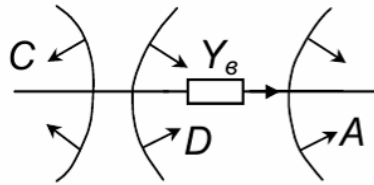


Рисунок 3.1 – Розташування перетинів і гілки схеми

Вектор задаючих струмів схеми J — вектор-стовпець, k -та компонента якого дорівнює сумі алгебри струмів, що підтікають до k -того перетину. Причому знак «+» обирається у випадку, якщо струм гілки протилежний напрямку перетину, а знак «-», якщо напрями перетину і струму співпадають.

Розглянемо приклад, заснований на приведеній вище скелетній схемі деякого ланцюга рис. 3.2:

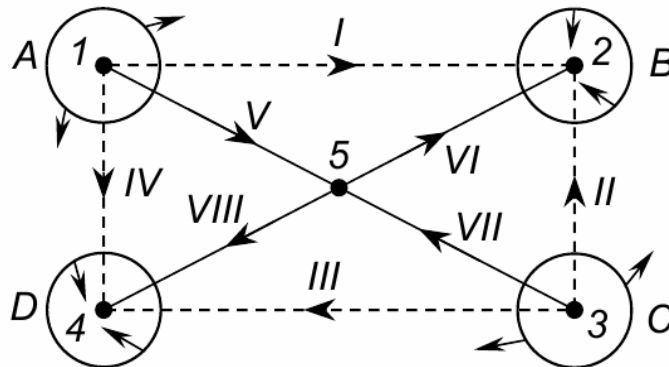


Рисунок 3.2 – Приклад скелетної схеми

Відповідно до вибраного напрямку струмів і головних перетинів, матриця Y має вигляд:

$$Y = \begin{array}{c|cccc|c} & A & B & C & D & \\ \hline & y_1 + y_4 + y_5 & y_1 & 0 & y_4 & A \\ \hline & y_1 & y_1 + y_2 + y_6 & y_2 & 0 & B \\ \hline & 0 & y_2 & y_2 + y_3 + y_7 & y_3 & C \\ \hline & y_4 & 0 & y_3 & y_3 + y_4 + y_8 & D \\ \hline \end{array}$$

Вектор задаючих струмів схеми:

$$J = - \begin{bmatrix} j_1 + j_4 + j_5 \\ j_1 + j_2 + j_6 \\ j_2 + j_3 + j_7 \\ j_3 + j_4 + j_8 \end{bmatrix}$$

Доведемо вказане правило складання матриці провідності і вектора задаючих струмів схеми.

За визначенням, матриця Y формується відповідно до співвідношення:

$$Y = \Pi \cdot Y_{\epsilon} \cdot \Pi_t$$

Транспонуємо обидві частини матриці, використовуючи заздалегідь сполучний закон:

$$Y_t = (\Pi \cdot Y_{\epsilon} \cdot \Pi_t)_t = ((\Pi \cdot Y_{\epsilon}) \cdot \Pi_t)_t = \Pi \cdot (\Pi \cdot Y_{\epsilon})_t = \Pi \cdot (Y_{\epsilon})_t \cdot \Pi_t$$

Оскільки матриця Y_{ϵ} діагонально симетрична і діагональна, отже $Y_{\epsilon t} = Y_{\epsilon}$. При цьому, очевидно, що результат перемножування матриць після їх транспонування не зміниться, тобто $Y_t = Y$. Це означає, що матриця Y діагонально симетрична. Тобто перша властивість матриці доведена.

Тепер позначатимемо елементи матриці буквами π_{ks} .

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots & \pi_{1k} & \dots & \pi_{1l} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \dots & \pi_{2k} & \dots & \pi_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{k1} & \pi_{k2} & \dots & \pi_{kk} & \dots & \pi_{kl} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{v1} & \pi_{v2} & \dots & \pi_{vk} & \dots & \pi_{vl} \end{bmatrix}$$

Діагональний елемент y_{kk} матриці Y виходить множенням k -ого рядка матриці Π на k -ий стовпець матриці $Y_{\epsilon} \Pi_t$. У свою чергу, k -ий стовпець матриці $Y_{\epsilon} \Pi_t$ виходить множенням матриці Y_{ϵ} на k -ий стовпець матриці Π_t . В результаті елемент y_{kk} матриці Y можна визначити у вигляді:

$$\begin{aligned} y_{kk} &= [k \text{ стр. } \Pi] \cdot [k \text{ столб. матриці } Y_{\epsilon} \cdot \Pi_t] = [k \text{ стр. } \Pi] \cdot [Y_{\epsilon} \cdot [k \text{ столб. } \Pi_t]] = \\ &= [k \text{ стр. } \Pi] \cdot Y_{\epsilon} \cdot [k \text{ стр. } \Pi_t] = [\pi_{k1}, \pi_{k2}, \dots, \pi_{kl}] \cdot Y_{\epsilon} \cdot [\pi_{k1}, \pi_{k2}, \dots, \pi_{kl}]_t \end{aligned}$$

(рядок матриці Π дорівнює стовпцю транспонованої матриці Π_t). Таким чином, можна записати, що:

$$\begin{aligned} y_{kk} &= [\pi_{k1} y_{\epsilon 1} \quad \pi_{k2} y_{\epsilon 2} \quad \dots \quad \pi_{kl} y_{\epsilon l}] \times [\pi_{k1} \quad \pi_{k2} \quad \dots \quad \pi_{kl}]_t = \\ &= [\pi_{k1}^2 \cdot y_{\epsilon 1} + \pi_{k2}^2 \cdot y_{\epsilon 2} + \dots + \pi_{kl}^2 \cdot y_{\epsilon l}] = \sum_{i=1}^l \pi_{ki}^2 \cdot y_{\epsilon i} \end{aligned}$$

Таким чином, провідність k -го перетину визначається сумою провідності гілок, що входять в цей перетин із знаком (+), оскільки для всіх гілок, що входять в перетин $\pi_{ki} = \pm 1$, тобто $\pi_{ki}^2 = 1$. Для гілок, які в перетини не входять $\pi_{ki} = 0$.

Таким чином, друга властивість матриці Y доведено.

Для недіагональних елементів матриці Y - провідності між перетинами k і s (де $k \neq s$), аналогічно можна записати, що

$$y_{ks} = [\pi_{k1}, \pi_{k2}, \dots, \pi_{kl}] \cdot Y_{\epsilon} \cdot [\pi_{s1}, \pi_{s2}, \dots, \pi_{sl}]^t$$

Оскільки матриця Y_{ϵ} діагональна, то останнє співвідношення можна розкрити в скалярному вигляді:

$$y_{ks} = [\pi_{k1} \cdot \pi_{s1} \cdot y_{\epsilon 1} + \pi_{k2} \cdot \pi_{s2} \cdot y_{\epsilon 2} + \dots + \pi_{kl} \cdot \pi_{sl} \cdot y_{\epsilon l}] = \sum_{i=1}^l \pi_{ki} \cdot \pi_{si} \cdot y_{\epsilon i}$$

Таким чином, стало очевидним і третя властивість матриці Y :

Твір $\pi_{ki} \cdot \pi_{si}$ відмінний від нуля лише для тих гілок, які проходять одночасно через два перетини k і s , причому дорівнює $+1$, якщо перетини направлені один щодо одного однаково, і дорівнює -1 , якщо перетини направлені зустрічно.

Отримані співвідношення також доводять правильність методики складання матриці Y при канонічному виді схеми із загальним базисним вузлом. Тобто, якщо перетини обрані однаковим чином щодо вузлів схеми (наприклад, всі - назовні), то при визначенні взаємної провідності перетинів знак провідності гілок завжди негативний.

Розглянемо питання щодо вектора J . За визначенням, $J = -\Pi \cdot J_{\epsilon}$. Для k -тої компоненти вектора:

$$j_k = -[\pi_{k1}, \pi_{k2}, \dots, \pi_{kl}] \cdot J_{\epsilon} = -[\pi_{k1} \cdot j_{\epsilon 1} + \pi_{k2} \cdot j_{\epsilon 2} + \dots + \pi_{kl} \cdot j_{\epsilon l}] = -\sum_{i=1}^l \pi_{ki} \cdot j_{\epsilon i}$$

Тому k -та компонента вектора J дорівнює сумі задаючих струмів гілок, причому компоненту береться із знаком «-», якщо струм співпадає по напрямку з перетином схеми, і «+», якщо струм протилежний перетину схеми.

Складність матриці Y і процесу її складання істотно визначається вибором головних перетинів схеми. Специфікою радіоелектронних схем є те, що один з вузлів схеми зазвичай приймають за базисний (нульовий), якому привласнюється нульовий потенціал. У реальних схемах практично всі вузли виявляються зв'язаними тією або іншою провідністю з нульовим. При цьому процедура складання матриці Y істотно спрощується. Головні перетини можна обрати такими, що охоплюють всі вузли, окрім базисного, причому кожен головний перетин охоплює тільки 1 вузол. Дерево схеми обирається таким чином, щоб воно складалось з гілок, які йдуть від базисного до всіх вузлів схеми. При цьому кожен перетин характеризується своїм потенціалом, рівним напрузі на відповідному ребрі, тобто гілці, що сполучає цей вузол з базисним. Напрями головних перетинів обираються так, щоб вони були направлені назовні.

Відповідно до вказаного вище правила, власна провідність перетинів завжди обчислюватиметься як арифметична сума провідності гілок, витікаючих з відповідного вузла, узятих із знаком плюс, а взаємна провідність перетинів враховується із знаком мінус, оскільки перетини завжди протилежно направлені. Для вектора задаючих струмів схеми правило не змінюється. Із

знаком «-» враховуються струми, витікаючі з перетинів, із знаком «+» - впадаючі.

Приклад: нехай задана схема, зображена на рис. 3.3:

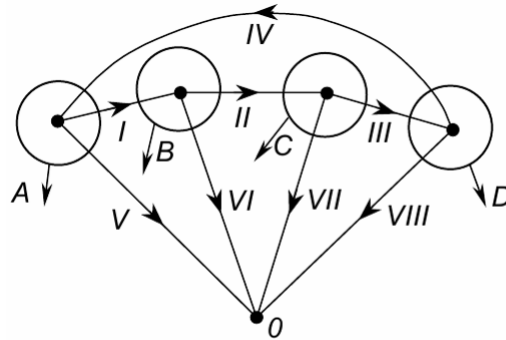


Рисунок 3.3 – Обрання дерева схеми для складання матриць провідності і головних струмів

При вказаному виборі дерева схеми матриця провідності схеми має вигляд:

$$Y = \begin{vmatrix} y_1 + y_4 + y_5 & -y_1 & 0 & -y_4 \\ -y_1 & y_1 + y_2 + y_6 & -y_2 & 0 \\ 0 & -y_2 & y_2 + y_3 + y_7 & -y_3 \\ -y_4 & 0 & -y_3 & y_3 + y_4 + y_8 \end{vmatrix}$$

Вектор задаючих струмів схеми:

$$J = \begin{vmatrix} -j_1 + j_4 - j_5 \\ j_1 - j_2 - j_6 \\ j_2 - j_3 - j_7 \\ j_3 - j_4 - j_8 \end{vmatrix}$$

Розглянуті співвідношення і правила складання матриці Y застосовуються для схем, що складаються тільки з двополюсних елементів. Проте реальні елементи електронних ланцюгів багатопольосні: наприклад, активні елементи: транзистор, польовий транзистор, операційний підсилювач, тиристор, магнітозв'язані елементи з потенційним об'єднанням обмоток і так далі. Параметри цих елементів також можуть бути представлені в матричному описі, що необхідне для розрахунку схем матричними методами.

Розглянемо триполіусник, виводи якого (вузли) позначені $1'$, $2'$, $3'$ (рис. 3.4). Оберемо напрями струмів всередину триполіусника, а вузлові потенціали відлічуються від деякого зовнішнього вузла, так що всі вузли триполіусника рівнозначні, і жоден з них не є базисним. Тоді система рівнянь триполіусника в матричному вигляді має вигляд:

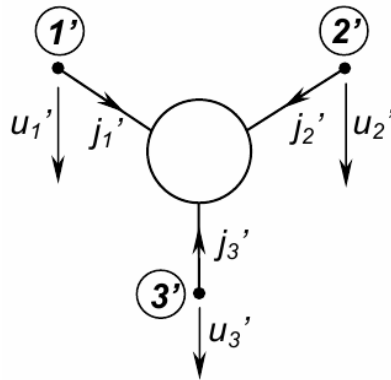


Рисунок 3.4 – Схематичне наведення триполюсника

$$\begin{bmatrix} j_1' \\ j_2' \\ j_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}' & y_{12}' & y_{13}' \\ y_{21}' & y_{22}' & y_{23}' \\ y_{31}' & y_{32}' & y_{33}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix}$$

Можна записати її компактніше у вигляді:

$$J' = Y' \cdot U'$$

Квадратна матриця Y' може бути розглянута як узагальнений параметр триполіусного елементу. Всі елементи матриці мають розмірність провідності, вона називається матрицею провідності триполіусника.

Необхідно відзначити, що матриця провідності у вказаному вигляді особлива. Лінійно незалежними є лише 4 елементи матриці з 9. Відповідно до законів Кирхгофа

$$\sum_{s=1}^3 y_{sk}' = 0 \quad (k = 1, 2, 3); \quad \sum_{k=1}^3 y_{sk}' = 0 \quad (s = 1, 2, 3)$$

Необхідно також відзначити, що матриця Y провідності триполіусника як правило, несиметрична щодо головної діагоналі, оскільки більшість реальних триполіусних елементів необратимі. При зміні номерів вузлів в матриці відповідним чином міняються рядки і стовпці матриці.

Якщо один з вузлів матриці підключений до базисного, то можна сформулювати неособливу матрицю провідності триполіусника Y' шляхом викреслювання відповідного стовпця і рядка особливої матриці. Наприклад, якщо тріхполіусник підключений відповідно до схеми рис. 3.5, то відповідні рівняння мають вигляд:

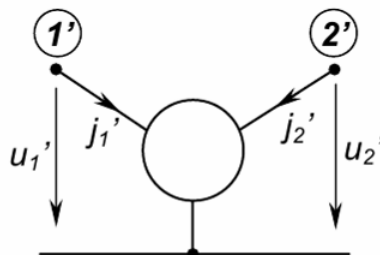


Рисунок 3.5 – Приклад підключення триполіусника

$$\begin{cases} J_1' = y_{11}' \cdot u_1' + y_{12}' \cdot u_2' \\ J_2' = y_{21}' \cdot u_1' + y_{22}' \cdot u_2' \end{cases} \quad J' = Y' \cdot U' ,$$

а матриця Y' :

$$Y' = \begin{vmatrix} y_{11}' & y_{12}' \\ y_{21}' & y_{22}' \end{vmatrix}$$

У випадку, якщо з якихось причин відома лише неособлива матриця провідності трехполюсника, то особливу можна сформувати на підставі приведених вище рівнянь, витікаючих із законів Кирхгофа:

$$\begin{vmatrix} y_{11}' & y_{12}' & -y_{11}' - y_{12}' \\ y_{21}' & y_{22}' & -y_{21}' - y_{22}' \\ -y_{11}' - y_{21}' & -y_{12}' - y_{22}' & y_{11}' + y_{21}' + y_{12}' + y_{22}' \end{vmatrix}$$

Розглянемо формування матриці провідності схеми за наявності в ній триполюсних елементів. Спочатку виключимо триполюсні елементи зі схеми і запишемо матрицю провідності частини схеми, що складається тепер тільки з двополюсників, що залишились. Для цього в схемі оберемо базисний вузол; складемо дерево схеми і отримаємо, таким чином, діагонально симетричну матрицю провідності.

Включення триполюсників змінить фактично струми вузлів (перетинів) до яких підключені елементи - трехполюсники. Нехай деякі вузли схеми p , q і r сполучені з вузлами $1'$, $2'$ і $3'$ триполюсника, відповідно. Якби схема триполюсників не містила, то матричне рівняння, записане відповідно до методу вузлових потенціалів:

$$J = Y \cdot U ,$$

означало б компактний запис рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} j_1 = \sum_{s=1}^v y_{1s} \cdot u_s \\ \dots\dots\dots \\ j_v = \sum_{s=1}^v y_{vs} \cdot u_s \end{cases}$$

Тепер, коли струми вузлів p , q і r змінилися, для них можна записати рівняння у вигляді:

$$j_p - j_1' = \sum_{s=1}^v y_{ps} \cdot u_s$$

$$j_q - j_2' = \sum_{s=1}^v y_{qs} \cdot u_s$$

$$j_r - j_3' = \sum_{s=1}^v y_{rs} \cdot u_s$$

Тут струми вузлів j_1', j_2', j_3' визначаються рівністю, трехполіусник, що описують, в матричному вигляді:

$$\begin{cases} j_1' = \sum_{k=1}^3 y_{1k} \cdot u_k' \\ j_2' = \sum_{k=1}^3 y_{2k} \cdot u_k' \\ j_3' = \sum_{k=1}^3 y_{3k} \cdot u_k' \end{cases}$$

Якщо замінити потенціали u_1', u_2', u_3' на еквівалентні u_p, u_q, u_r , отримаємо:

$$\begin{aligned} j_p &= \sum_{s=1}^v y_{ps} \cdot u_s + y_{11}' u_p + y_{12}' u_q + y_{13}' u_r \\ j_q &= \sum_{s=1}^v y_{qs} \cdot u_s + y_{21}' u_p + y_{22}' u_q + y_{23}' u_r \\ j_r &= \sum_{s=1}^v y_{rs} \cdot u_s + y_{31}' u_p + y_{32}' u_q + y_{33}' u_r \end{aligned}$$

Таким чином, вектор задаючих струмів J для схеми, що містить триполіусники, записується аналогічним чином відповідно вектору для схеми, що не містить триполіусники. Матриця провідності схеми змінюється: до елементів матриці, записаної без врахування триполіусників на перетині рядків і стовпців з номерами вузлів, відповідних точкам підключення триполіусника додаються відповідні елементи матриці провідності триполіусника. Якщо замінити номери вузлів трехполіусника $1', 2'$ і $3'$ на номери p, q і r , то залишається лише дописати відповідні елементи Y' у матрицю провідності Y у вигляді доданків:

$$Y' = \begin{vmatrix} y_{11}' & y_{12}' & y_{13}' \\ y_{21}' & y_{22}' & y_{23}' \\ y_{31}' & y_{32}' & y_{33}' \end{vmatrix} \begin{matrix} p \\ q \\ r \end{matrix}$$

Якщо один з вузлів схеми сполучений з базисним, то цей вузол не враховується при складанні матриці провідності схеми Y , а відповідні елементи матриці Y' не включаються в таблицю у вигляді доданків.

Активні елементи електронної техніки: транзистори, операційні підсилювачі, в еквівалентній схемі можуть бути представлені як залежні джерела струму або напруги, що відображають їх підсилювальні властивості. Виникає питання про матричний опис схем з такими елементами.

По-перше, розглядатимемо лише залежні джерела струму, керовані напругою, оскільки цей вид залежних джерел найпростіше включається в матричний опис (інші типи залежних джерел; в принципі, можуть бути перетворені у вказаний, або використані при іншому підході до опису схем - у вигляді гібридних матриць).

По-друге, використовуємо описаний вище підхід, коли спочатку при складанні матриці Y всі залежні джерела з схеми виключені. При цьому з двополюсних елементів, що залишилися, утворюється діагонально симетрична матриця Y_0 , для якої справедливе співвідношення:

$$J_0 = Y_0 \cdot U$$

де J_0 — вектор задаючих струмів схеми, U — вектор вузових потенціалів.

Якщо припустити, що є деяке залежне джерело струму, підключене до вузлів p і q схеми, а його величина визначається співвідношенням (рис. 3.6):

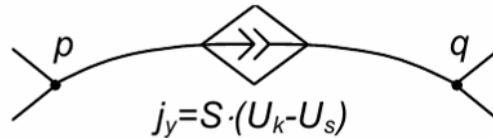


Рисунок 3.6 – Підключення залежного джерела струму

$$j_y = S \cdot (U_k - U_s)$$

де U_k , U_s — потенціали вузлів k і s схеми, а S — крутизна управління (А/В), то рівняння, що описують струм в перетинах, матимуть вигляд:

$$\begin{cases} j_p - (S \cdot U_k - S \cdot U_s) = \sum_{i=1}^v y_{pi} \cdot u_i \\ j_q + (S \cdot U_k - S \cdot U_s) = \sum_{i=1}^v y_{qi} \cdot u_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} j_p = \sum_{i=1}^v y_{pi} \cdot u_i + S \cdot U_k - S \cdot U_s \\ j_q = \sum_{i=1}^v y_{qi} \cdot u_i - S \cdot U_k + S \cdot U_s \end{cases}$$

Кожне із залежних джерел струму, керованих напругою, характеризується записом коефіцієнта S у чотирьох клітках матриці:

...	k	...	s	...	
...	...	...	...	...	...
...	$+S$	...	$-S$	...	p
...	...	...	...	...	...
...	$-S$	...	$+S$	...	q
...	...	...	...	...	...

Якщо один з вузлів, до яких підключено джерело струму, сполучений з базисним (наприклад q), то в матрицю додаються лише два елементи $+S$ і $-S$, розташованих на одному рядку матриці. Якщо сполучений з базисним один з вузлів джерела, то залишаються два елементи $+S$ і $-S$, розташованих в одному стовпці матриці. Якщо джерело сполучене з базисним вузлом і управляється напругою, відлічуваною від базисного вузла, то в матрицю Y дописується лише один коефіцієнт $+S$ або $-S$.

В цілому, відповідно до сформульованого вище правила для складання матриці провідності Y і вектора-стовпця задаючих струмів J , якщо напрям залежного джерела струму співпадає з напрямом головного перетину (а саме назовні), а потенціал вузла входить в характеристику, що управляє, із знаком

«+» (вузли p і k у наведеному прикладі), то параметр (крутизна управління), що управляє, записується у відповідну клітку матриці із знаком «+». Якщо обидві цих умови не виконуються, то крутизна управління також записується із знаком «+». Якщо виконується лише одна з умов, то крутизна управління записується із знаком «-».

4. Приклад побудови матриці провідності

Необхідно побудувати матрицю провідності схеми Y підсилювального каскаду на польовому транзисторі із загальним стоком (рис.4.1).

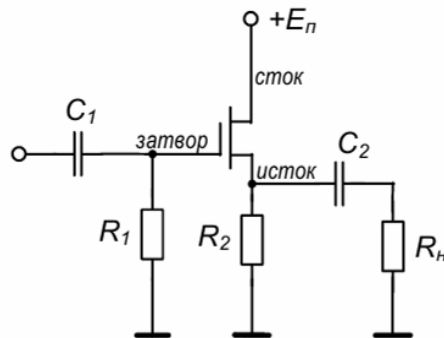


Рисунок 4.1 – Електрична схема підсилювача на польовому транзисторі

З електричної схеми підсилювача побудуємо еквівалентну схему каскаду по змінному струму (рис. 4.2)

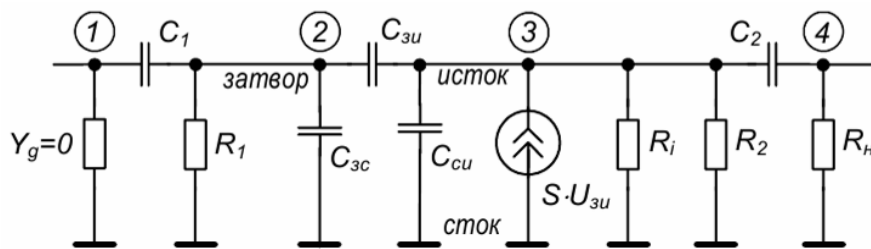


Рисунок 4.2 - Еквівалентна схема каскаду по змінному струму

Для спрощення запису елементів матриці перетворимо схему, замінивши, по можливості, послідовно і паралельно включені елементи загальною комплексною провідністю рис. 4.3:

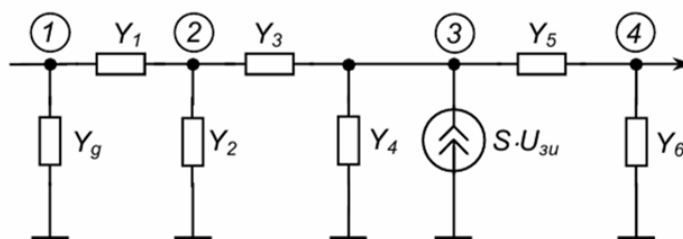


Рисунок 4.3 – Спрощена еквівалентна схема каскаду по змінному струму

$$\begin{aligned}
Y_g &= 0; & Y_1 &= j\omega C_1; & Y_2 &= \frac{1}{R_1} + j\omega C_{zc} \\
Y_3 &= j\omega C_{zu}; & Y_4 &= \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + j\omega C_{cu} \\
Y_5 &= j\omega C_2; & Y_6 &= \frac{1}{R_n}
\end{aligned}$$

Схема приведена до канонічного вигляду. Побудуємо дерево схеми у вигляді рис. 4.4.

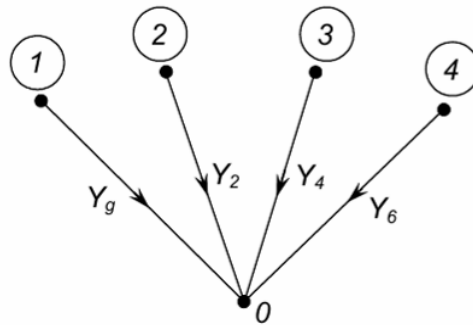


Рисунок 4.4 – Дерево схеми каскаду по змінному струму

$j\omega C_1$	$-j\omega C_1$	0	0
$-j\omega C_1$	$j\omega(C_1 + C_{zc} + C_{zu}) + \frac{1}{R_1}$	$-j\omega C_{zu}$	0
0	$-j\omega C_{zu} - S$	$j\omega(C_2 + C_{cu} + C_{zu}) + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + S$	$-j\omega C_2$
0	0	$-j\omega C_2$	$j\omega C_2 + \frac{1}{R_n}$

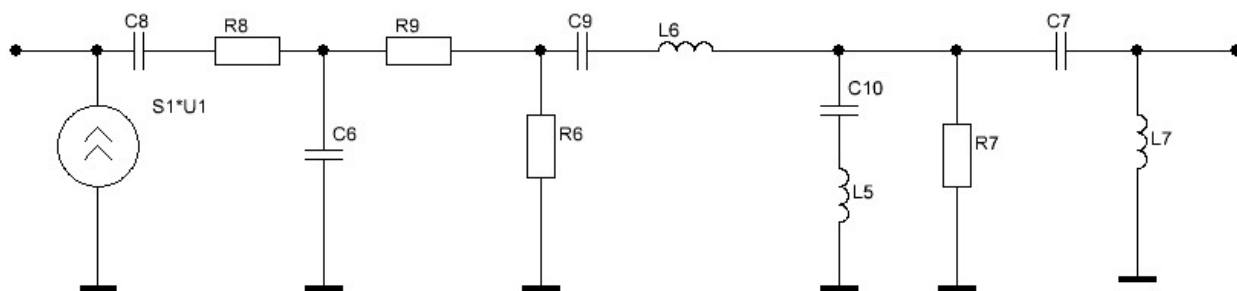
Без врахування залежного джерела струму матриця Y_0 має вигляд:

$$Y_0 = \begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline & Y_g + Y_1 & -Y_1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & -Y_1 & Y_1 + Y_2 + Y_3 & -Y_3 & 0 & 2 \\ \hline & 0 & -Y_3 & Y_3 + Y_4 + Y_5 & -Y_5 & 3 \\ \hline & 0 & 0 & -Y_5 & Y_5 + Y_6 & 4 \\ \hline \end{array}$$

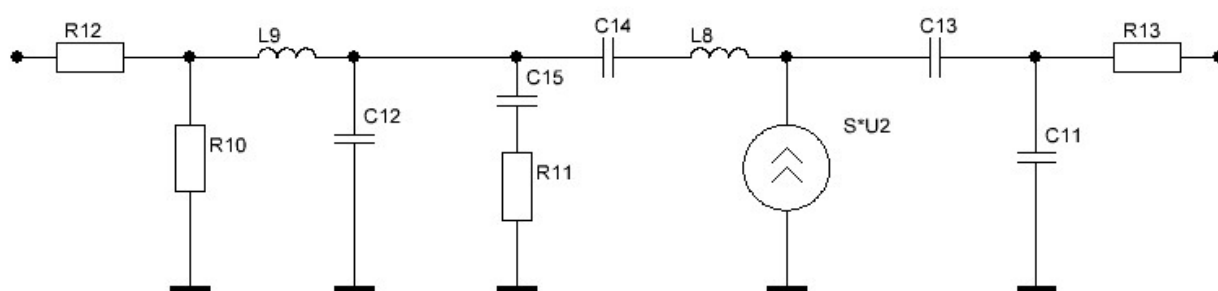
Повна матриця провідності Y :

$$Y = \begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline & Y_1 & -Y_1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & -Y_1 & Y_1 + Y_2 + Y_3 & -Y_3 & 0 & 2 \\ \hline & 0 & -Y_3 - S & Y_3 + Y_4 + Y_5 + S & -Y_5 & 3 \\ \hline & 0 & 0 & -Y_5 & Y_5 + Y_6 & 4 \\ \hline \end{array}$$

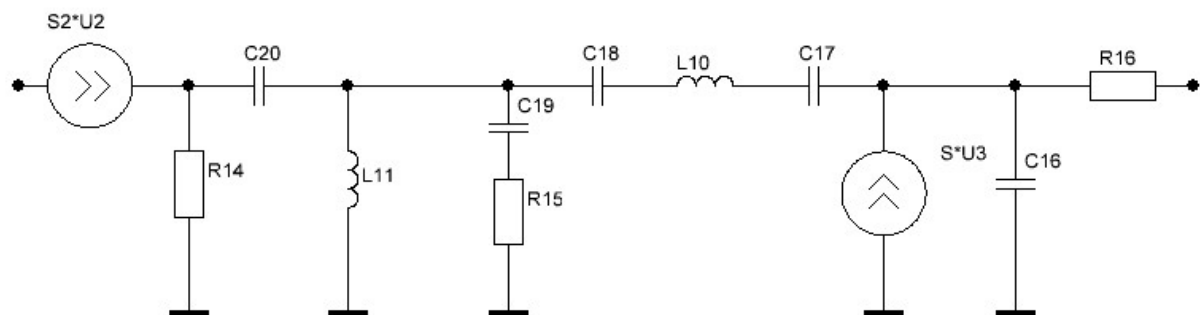
ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ



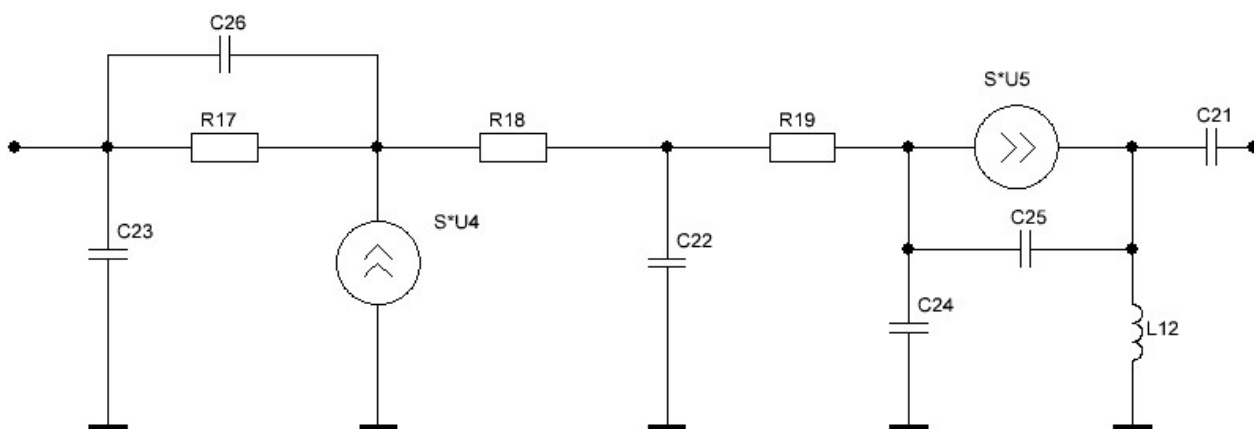
Варіант 1



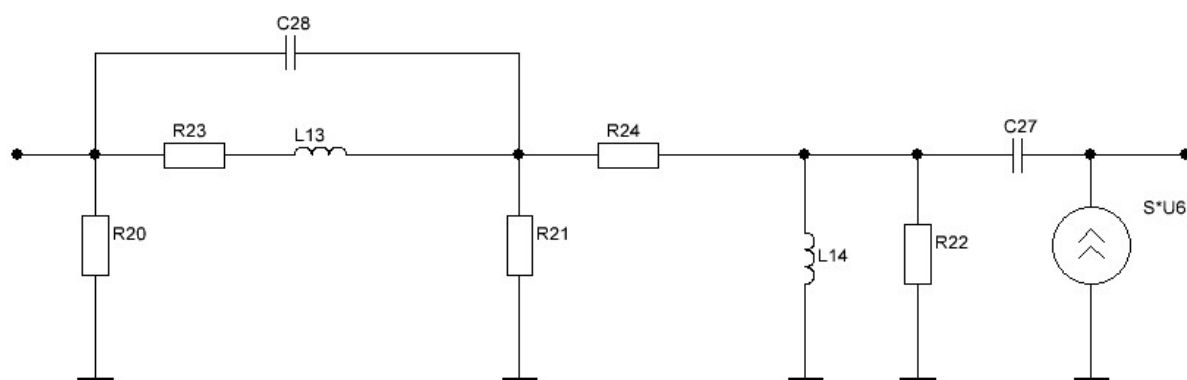
Варіант 2



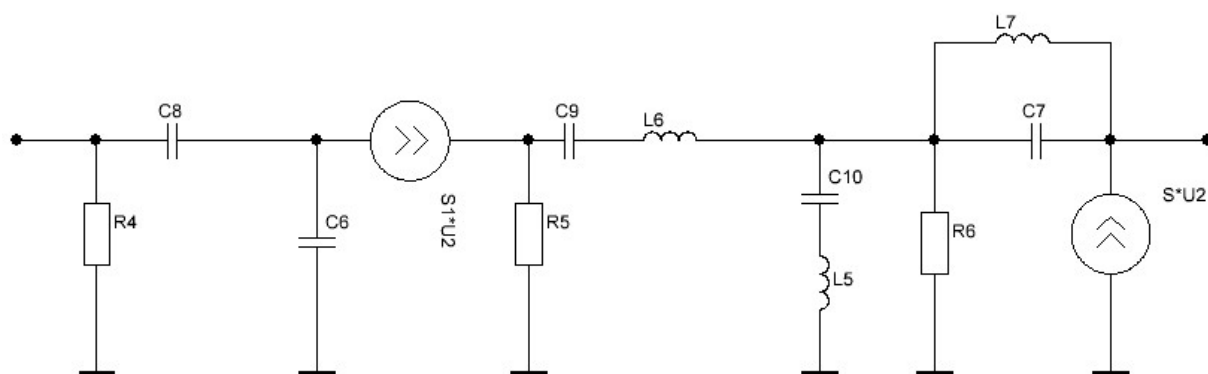
Варіант 3



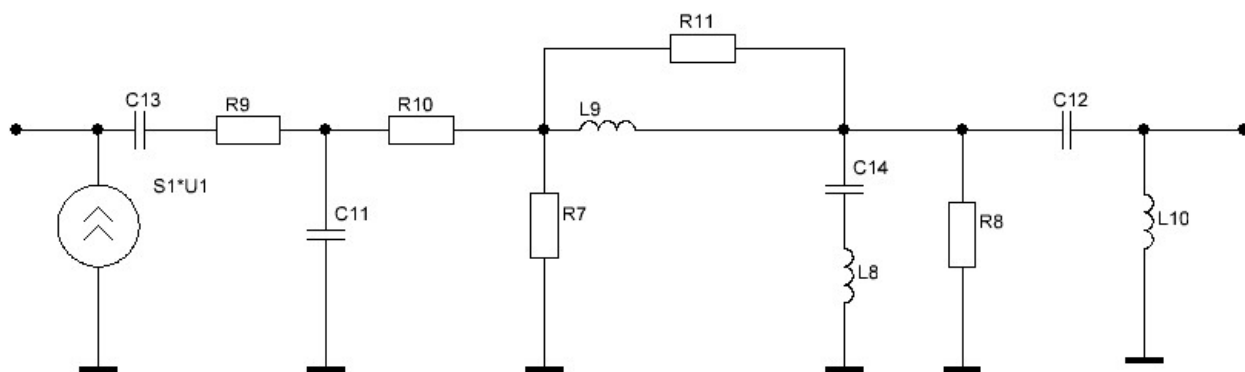
Варіант 4



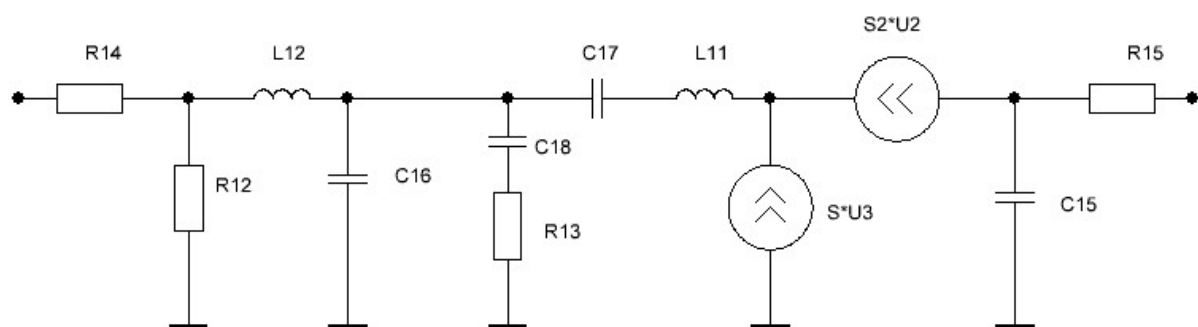
Вариант 5



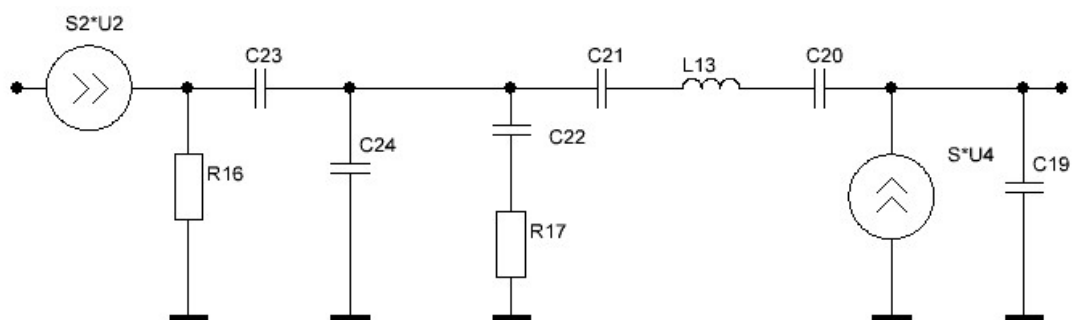
Вариант 6



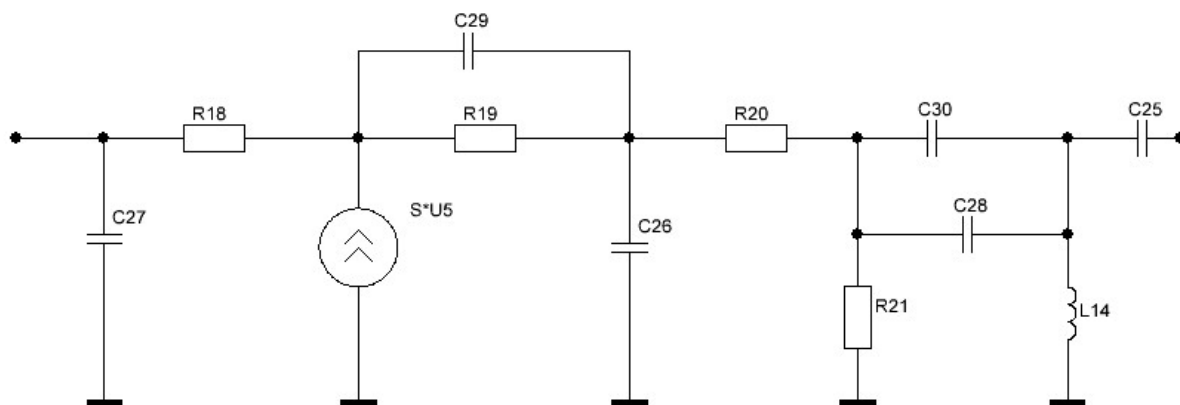
Вариант 7



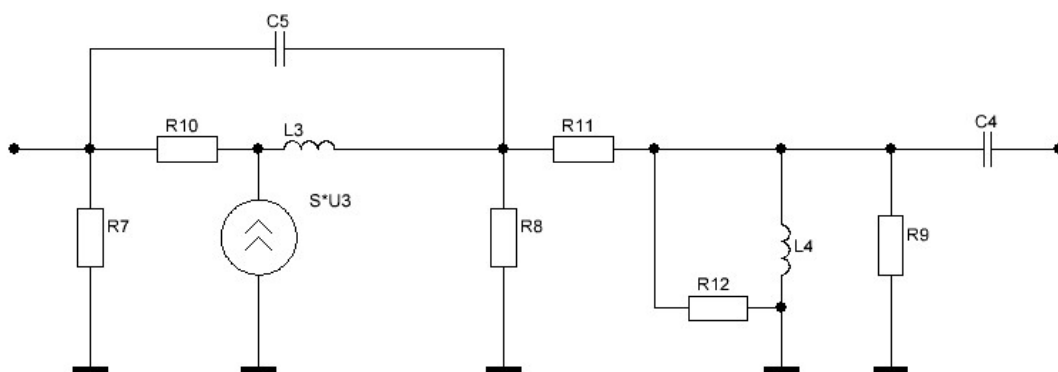
Вариант 8



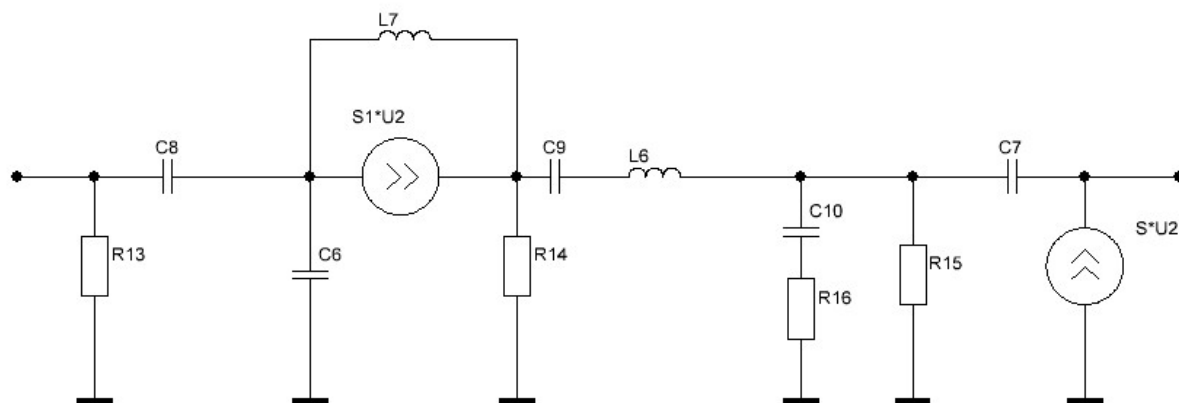
Вариант 9



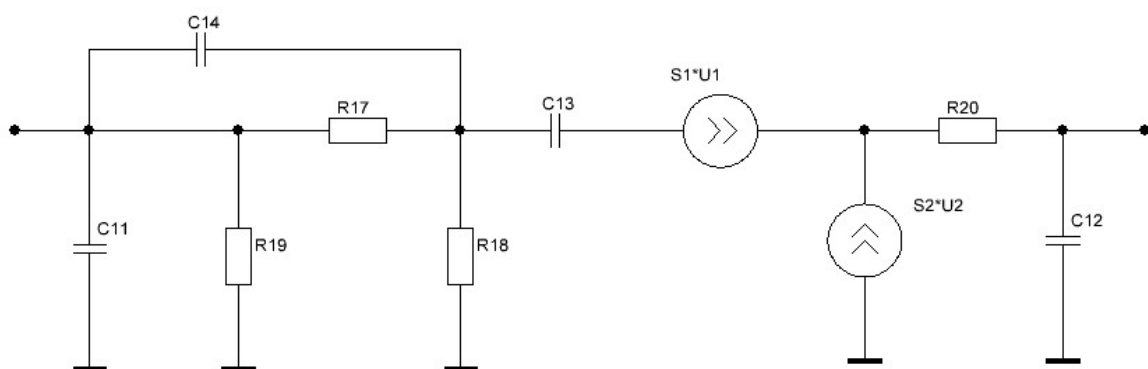
Вариант 10



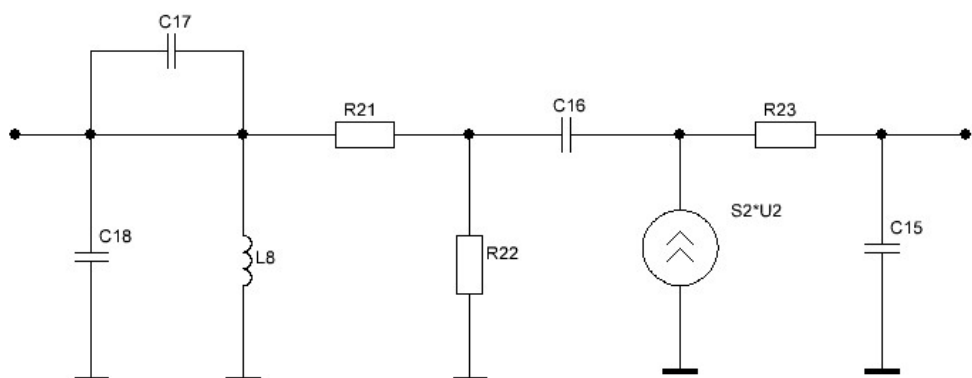
Вариант 11



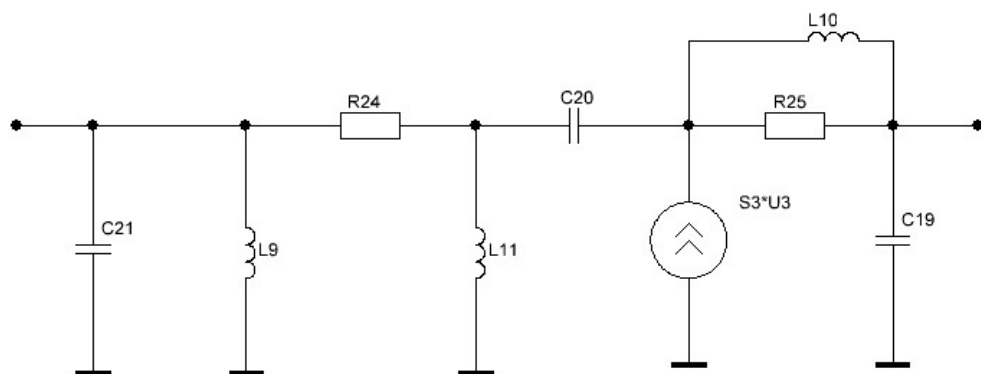
Вариант 12



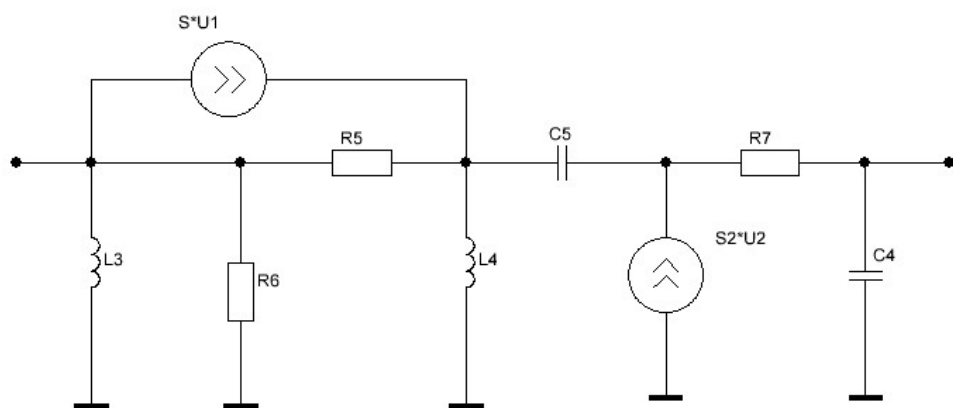
Варіант 13



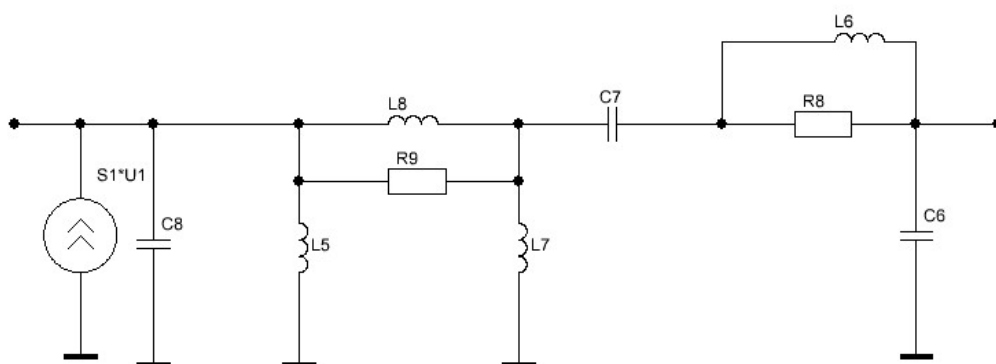
Варіант 14



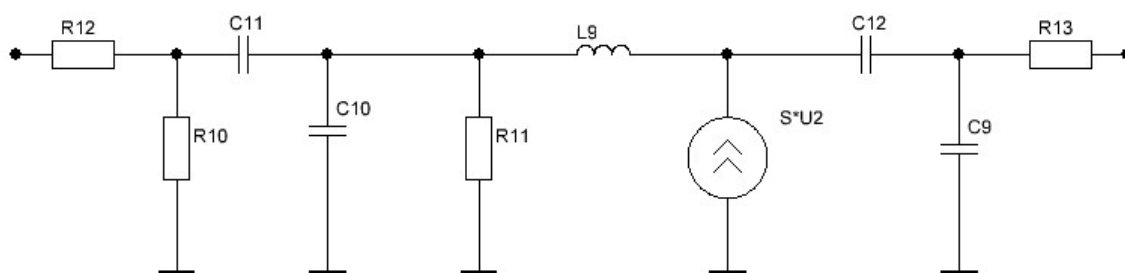
Варіант 15



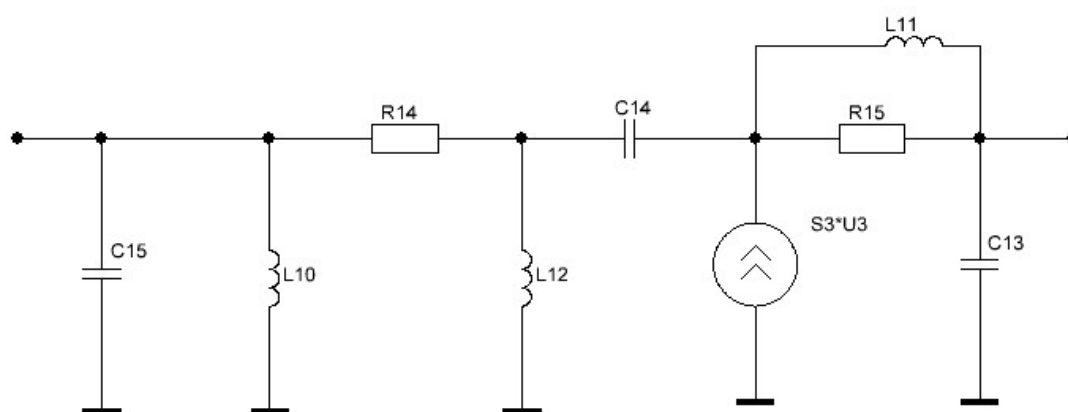
Варіант 16



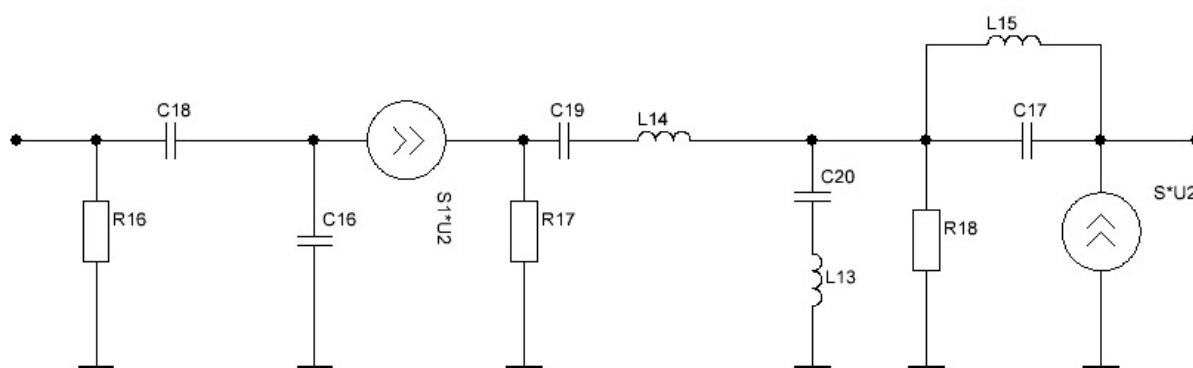
Варіант 17



Варіант 18



Варіант 19



Варіант 20