**Лекція 2. Бінарні відношення та алгоритми перевірки їх властивостей**

1. **Основні поняття та теореми**

**Означення** Говорять, що елементи *а* та *в* утворюють *упорядковану пару* (*а,в*), якщо порядок їх запису важливий, тобто, (*а,в*) і (*в,а*) – різні упорядковані пари при умов, що *а і в* різні.

**Означення** *Декартовим добутком двох множин А* та *В* називається множина упорядкованих пар, в яких перший елемент належить множині *А*, а другий - множині *В*:

.

**Означення** Нехай задано дві множини *А* та *В*. *Бінарним відношенням R* з *множини А в множину В* називається будь-яка підмножина декартового добутку множин *А* та *В*:

.

Якщо пара (*а,в*) належить бінарному відношенню *R*, то використовують запис *аRв.*

Якщо *А=В*, то говорять, що *R* є *бінарним відношенням на множині* *А*.

**Приклади.** 1) 

 така, що  - бінарне відношення з множини *А* в множину *В*.

1.  - множина натуральних чисел,  - бінарне відношення на множині  .

**Означення** Нехай *R* є бінарним відношенням на множині *А*. Відношення

*  називається *оберненим*;
*  називається *доповненням*;
*  називається *тотожнім* або *діагоналлю*;
*  називається *універсальним*.

**Зауваження.** Багатомісні відношення конструюються з бінарних, використовуються в теорії баз даних, «реляційних» баз данних. (Relation – відношення).

**Означення** Нехай  - відношення з *А* в *С*,  - відношення з *С* в *В*. *Композицією відношень*  та  називається відношення  з А в В, яке визначається так:

.

**Задача 1.** Знайти композицію відношень

 та , заданих на множині натуральних чисел.

**Властивості відношень**

**Означення** Відношення  називається

* *Рефлексивним*, якщо ;
* *Антирефлексивним*, якщо ;
* *Симетричним*, якщо ;
* *Антисиметричним*, якщо ;
* *Транзитивним*, якщо ;
* *Повним* або *лінійним*, якщо .

**Теорема** Відношення 

* Рефлексивне  ;
* Антирефлексивне  ;
* Симетричне  ;
* Антисиметричне  ;
* Транзитивне  ;
* Повним або лінійним  .

**Задача 2.** Користуючись теоремою, перевірити виконання властивостей відношення  на множині 

**2. Представлення відношень в ЕОМ**

Нехай  і . Перенумеруємо елементи множини *А*. Тоді відношення *R* можна представити марицею  за правилом



**Теорема** .

**Наслідок** Матриця *к*-того степеня відношення *R* дорівнює *к*-тому степеню матриці цього відношення.

**Задача 3.** Знайти матрицю композиії відношень з задачі 1

**Теорема.** 1) ,

2) ,

3) Якщо  , то .

**Задача 4.** Який вигляд має матриця відношення:

* Рефлексивного,
* Антирефлексивного,
* Симетричного,
* Антисиметричного,
* Транзитивного,
* Повного.

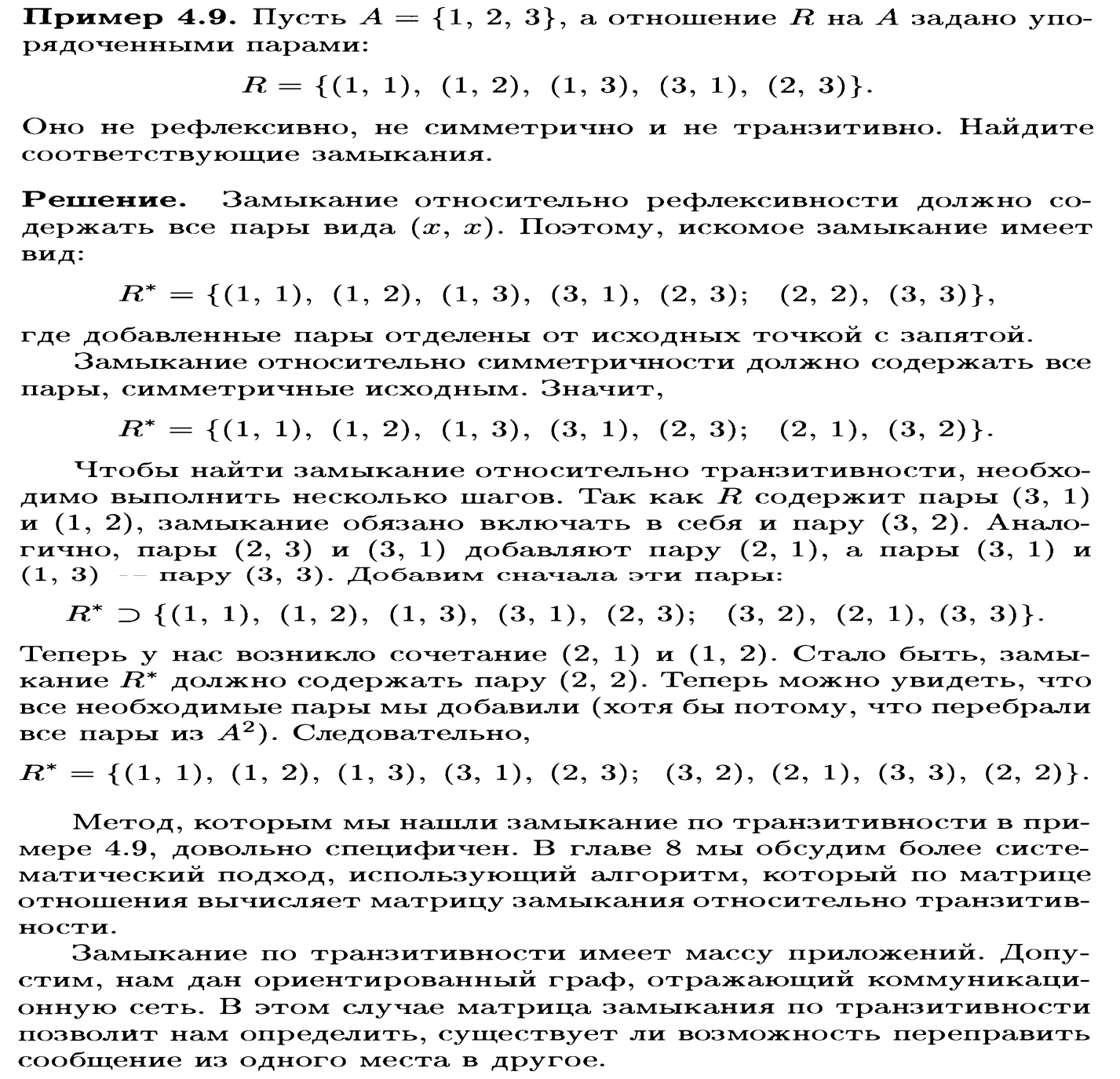
1. **Замикання відношень. Алгоритм Уоршала**

Якщо відношення на множині не має ту чи іншу властивість, то це відношення можна продовжити (додати нові пари) до нового відношення, яке буде мати потрібну властивість.

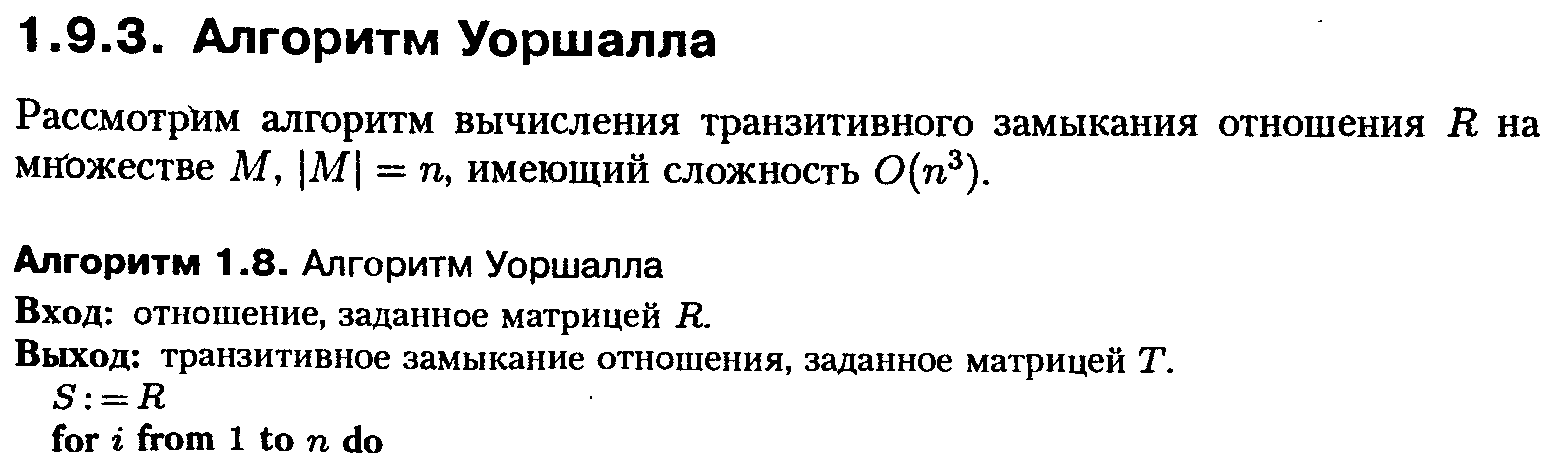
**Означення** Бінарне відношення називається *замиканням відношення*  *відносно властивості Р*, якщо

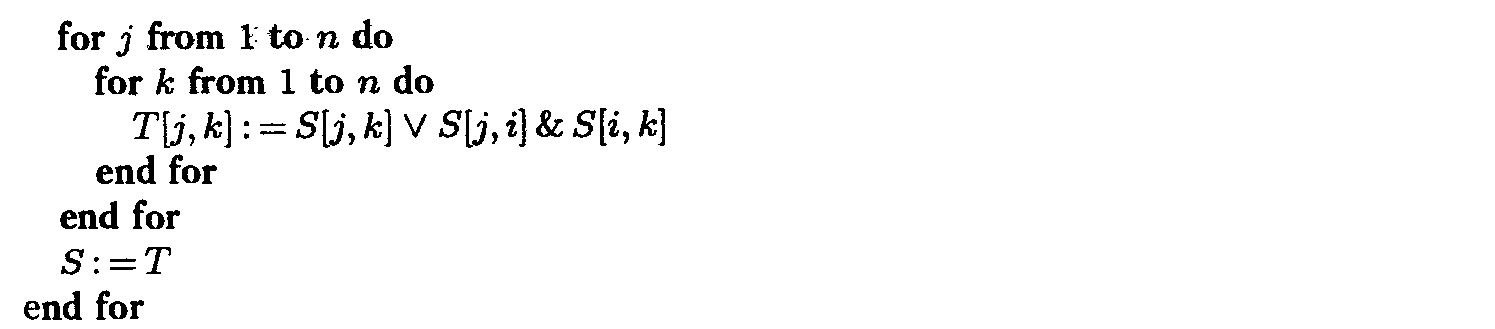
*  має властивість *Р*;
* ;
*  є підмножиною будь-якого іншого відношення, що містить  і має властивість *Р*.

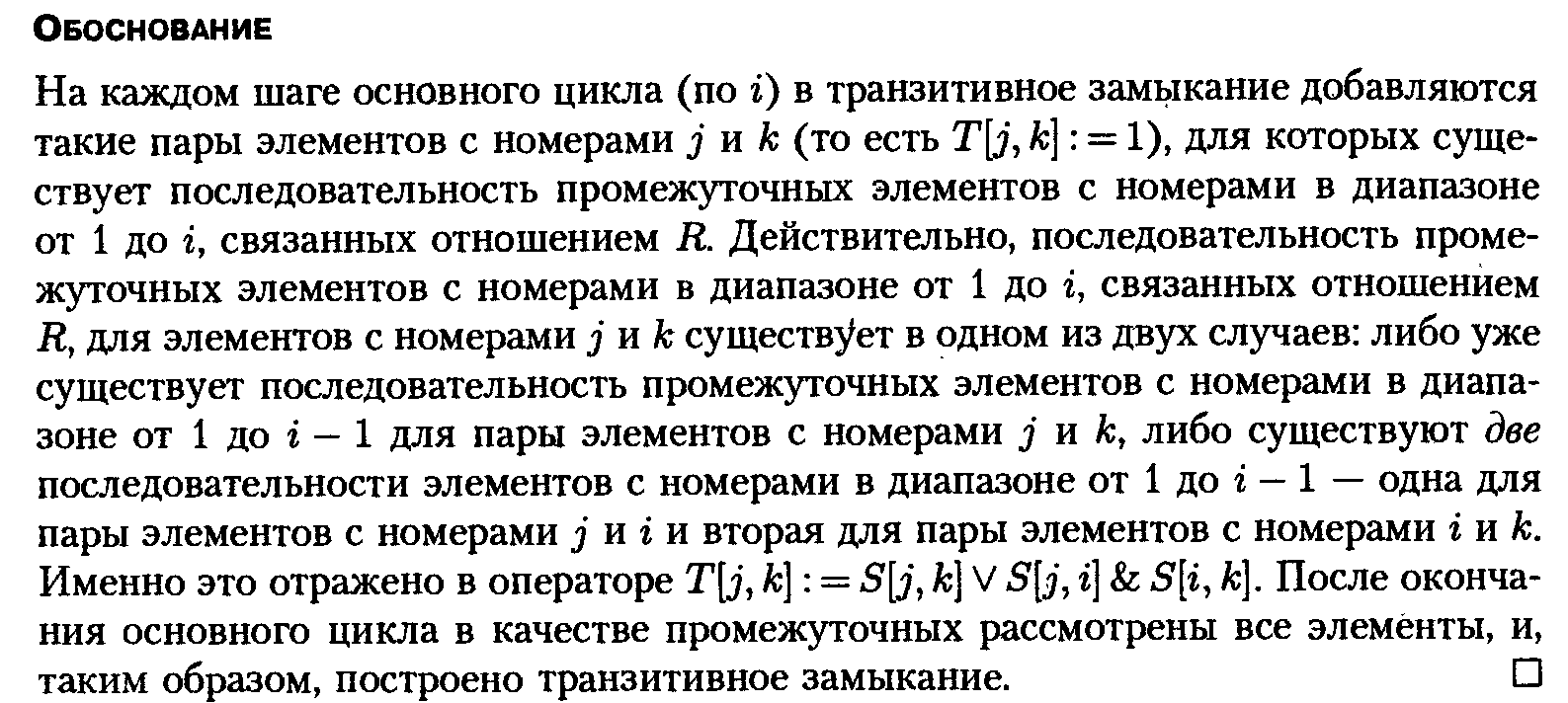
**Наприклад,** якщо у якості властивості Р розглянути транзитивність, то матимемо транзитивне замикання.



**Алгоритм Уоршалла (знаходження транзитивного замикання)**





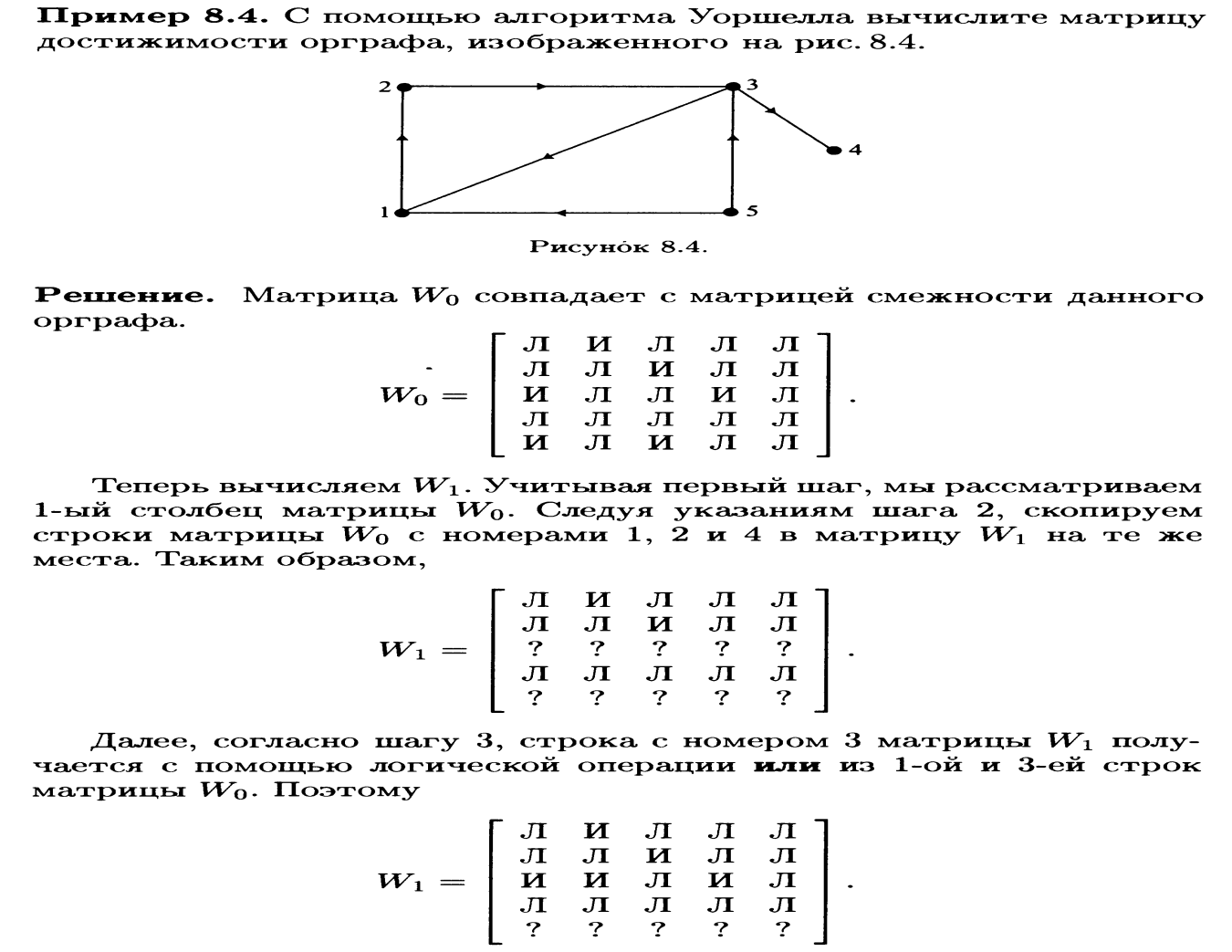


**Зауваження.** Задача знаходження транзитивного замикання відношення рівносильна задачі знаходження матриці досяжності орієнтованого графу.

В ході роботи алгоритму будується послідовність матриць, остання є матрицею транзитивного замикання відношення.

При обчислені матриці треба:

1. Взяти к-тий стовпець матриці;
2. Рядок з номером, в якому на *к*-тому місці стоїть 0, переписати в *і*-тий рядок матриці ;
3. Знайти диз’юнкцію рядка з номером, в якому на *к*-тому місці стоїть 1, з *к*-тим рядком і результат записати *і*-тим рядком мариці .



1. **Відношення еквівалентності та порядку**

**Означення.** Бінарне відношення на множині  називається *відношенням* *еквівалентності***,** якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.

**Приклади:** 1)відношення рівності на будь-якій числовій множині.

Дійсно, для будь-яких чисел :

*а)* ; б) ; в) .

2) відношення паралельності на множині прямих площини, оскільки для будь-яких прямих :

а) ||; б) якщо ||, то ||; в) якщо || і ||, то ||.

3) відношення подібності на множині всіх трикутників.

**Означення.** Нехай на множині  задано відношення , що є відношенням еквівалентності. *Класом, породженим елементом* , називається підмножина елементів множини , що перебувають із елементом  у відношенні . Позначається , тобто . Сукупність класів еквівалентності називається *фактор-множиною* даної множини за даним відношенням еквівалентності. Позначається .

**Означення.** Говорять, що задано *розбиття множини* , якщо , причому  для будь-яких .

**Теорема**Нехай ,  - відношення еквівалентності на множині , тоді фактор-множина  є розбиттям множини .

**Алгоритм побудови розбиття *Ф* множини**

1. обираємо будь-який елемент *а* множини *М,*
2. будуємо його клас еквівалентності *А,*
3. знаходимо різницю множин *М* та *А,*
4. обираємо будь-який елемент *в* з різниці,
5. будуємо його клас еквівалентності *В,*
6. і т.д., поки різниця не стане порожньою множиною.

*Ф* є об’єднанням класів *А, В*, …

**Задача.** Показати, що відношення рівнопотужності множин на булеані є відношенням еквівалентності та побудувати фактор-множину.

**Означення.** Бінарне відношення  на множині  називається *відношенням порядку*, якщо воно транзитивне й антисиметричне. Множина, на якій задано відношення порядку, називається впорядкованою.

**Приклад.** Нехай  – довільна множина, – її булеан. Відношення  є відношенням порядку.

**Означення.** Відношення порядку називається:

* *відношенням часткового порядку,* якщо воно неповне*;*
* *відношенням лінійного порядку,* якщо воно повне.

Відношення часткового порядку називається:

* *відношенням строгого часткового порядку*, якщо воно антирефлексивне,
* *відношенням нестрогого* *часткового порядку*, якщо рефлексивне

Відношення лінійного порядку називається:

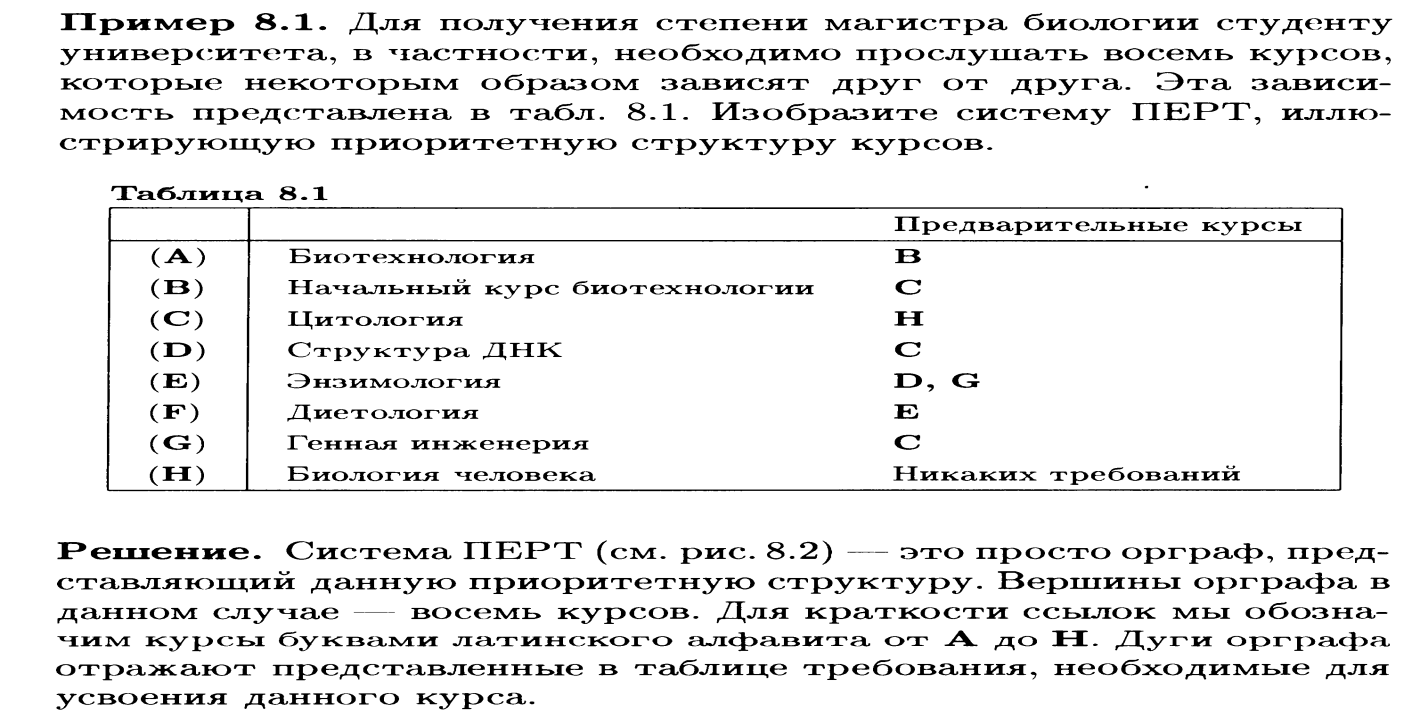
* *відношенням строгого лінійного порядку*, якщо воно антирефлексивне,
* *відношенням нестрогого лінійного* *порядку*, якщо воно рефлексивне.

**Приклади.**

* відношення «» (бути власною підмножиною) на булеані деякої множини є відношенням строгого часткового порядку,
* відношення «» на множині  є відношенням строгого лінійного порядку,
* відношення «» (бути підмножиною) на булеані деякої множини є відношенням нестрогого часткового порядку,
* відношення «» на множині  є відношенням нестрогого лінійного порядку.

1. **Алгоритм топологічного сортування**

Доведено, що будь-який частковий порядок може бути продовжений до лінійного порядку, тобто може бути включений до лінійного порядку (в сенсі включення бінарних відношень). Доведенням є існування алгоритму його побудови. Він називається *алгоритмом топологічного сортування*.



Нехай студент має намір визначити порядок, в якому він буде вивчати предмети, враховуючи їх залежність один від одного. Це можна зробити за допомогою *алгоритму топологічного сортування*.

Алгоритм створює послідовність узгоджених міток для вершин безконтурного орграфу таким чином, що коли 1,2,3,…,*п* – мітки вершин і *uv* – дуга орграфа з вершини *u* з міткою *і* до вершини *v* з міткою *j*, то *i<j*.

**Розв’язання**.

**Крок 0** Відношення складається з пар

(B,A),(C,B),(H,C),(C,D),(D,E),(G,E),(E,F),(C,G),(0,H)

**Крок 1** Призначаємо мітку 1 елементу Н (бо є пара (0,Н)), замінюємо Н на 0 у всіх інших парах. Маємо (B,A),(C,B),(0,C),(C,D),(D,E),(G,E),(E,F),(C,G)

**Крок2** Призначаємо мітку 2 елементу С і в решті пар робимо заміну С на 0:

(B,A),(0,B),(0,D),(D,E),(G,E),(E,F),(0,G)

**Крок 3** Наступна мітка 3 може бути призначена або елементу В, або G, або D. Нехай ми вибрали В.

(0,A), (0,D),(D,E),(G,E),(E,F),(0,G)

**Крок 4** Мітку 4 призначимо елементу А: (0,D),(D,E),(G,E),(E,F),(0,G)

**Крок 5** Мітку 5 призначимо елементу D: (0,E),(G,E),(E,F),(0,G)

**Крок 6** Мітку 6 призначимо елементу G: (0,E),(0,E),(E,F)

**Крок 7** Мітку 7 призначимо елементу Е: (0,F)

**Крок 8** Мітку 8 призначимо елементу F.

Отже, один із можливих списків курсів має вигляд:

Н,С,В,А,D,G,E,F.

**Реалізація алгоритму у випадку матричного представлення відношення**

1. Знайти в матриці відношення перший рядок з усіма нулями.
2. Присвоїти елементу, який відповідає цьому рядку, №1, а всі 1 у відповідному стовпці замінити на 0. Більше цей рядок не розглядати.
3. На настуному кроці знову шукати рядок лише з нулями. Алгоритм закінчує роботу, коли всі елементи множини отримають номери. Шуканий лінійний порядок являє собою послідовність елементів множини, виписану в порядку спадання їх номерів.

**Зауваження.** Якщо вихідне відношення було нестрогим, то при складанні його матриці діагональні елементи ігноруємо.