

Розділ 1. Основні поняття теорії ймовірностей

1.1 Випадкові події

Основними поняттями теорії ймовірностей є поняття події та її ймовірності. Під випробуванням далі будемо розуміти здійснення певної сукупності умов. Подією називається результат, який може бути отриманий внаслідок здійснення деякого випробування. Найпростіший приклад випробування – підкидання монети. Результат цього випробування, наприклад, поява герба, є подією.

Розрізняють достовірні, неможливі та випадкові події. Подія називається вірогідною, якщо вона у результаті даного випробування обов'язково здійсниться. Подія називається неможливою, якщо вона не може відбутися в умовах даного випробування. Подія називається випадковою, якщо вона може відбутися або не відбутися внаслідок даного випробування.

Події називають несумісними, якщо настання однієї з них виключає можливість настання інших подій у тому ж випробуванні. Кілька подій утворюють повну групу, якщо у результаті випробування обов'язково настане хоча б одна з них. Якщо події, що утворюють повну групу, є попарно несумісними, то у результаті випробування з'явиться лише одна з цих подій. Далі будемо розглядати повні групи попарно несумісних подій.

Події називаються рівноможливими, якщо можна стверджувати, що жодна з них не є більш можливою, ніж інша подія.

Для кількісного порівняння між собою подій за мірою можливості їх настання вводиться поняття ймовірності.

Ймовірністю події називається кількісна міра об'єктивної можливості її настання.

Нехай випадкові події можуть багаторазово повторюватися при виконанні одних і тих же умов. Тоді їх називають масовими однорідними випадковими подіями.

Теорія ймовірностей – це наука, що вивчає закономірності масових однорідних випадкових подій.

1.2 Простір елементарних подій

Для математичного описання випадкових подій використовують поняття елементарної події. Подія, що може настати у результаті здійснення одного і лише одного випробування, називається елементарною. У результаті випробування може настати одна і лише одна елементарна подія.

Кожному випробуванню відповідає певна множина Ω елементарних подій ω_i , кожна з яких може настати у результаті здійснення цього випробування. Цю множину називають простором елементарних подій. Кожне випробування полягає у тому, що навмання (незалежно від спостерігача) вибирається окремий елемент з множини Ω . Простір елементарних подій утворює повну групу попарно несумісних подій.

Будь-яка підмножина A простору елементарних подій Ω визначає певну випадкову подію A . Цю підмножину називають також множиною можливих наслідків випробування, що сприяють події A . Неможливій події відповідає пуста множина $\emptyset$, вірогідній події відповідає множина Ω .

Якщо простір елементарних подій Ω є скінченним або зліченим, то він називається дискретним, інакше говорять про неперервний простір елементарних подій.

1.3. Операції над подіями

Оскільки події – це деякі підмножини простору елементарних подій, то для них можна ввести такі самі операції, як і для множин у теорії множин.

Говоритимемо, що подія A сприяє появі події B ($A \subset B$), якщо з настанням події A обов'язково відбувається і подія B . У цьому випадку множина елементарних подій, що визначає подію A , є підмножиною множини,

що визначає подію B . Якщо подія A сприяє появі події B і подія B сприяє появі події A , то події A та B називають еквівалентними (рівносильними) і пишуть $A=B$.

Сумою двох подій A та B називають таку подію C , що відбувається, коли відбувається принаймні одна з двох подій, A чи B . При цьому використовують позначення $C=A+B$ або $C=A \cup B$. Множина C , що відповідає події $C=A+B$, є об'єднанням множин елементів з простору елементарних подій Ω , що відповідають подіям A та B .

Добутком двох подій A та B називають таку подію C , що відбувається, коли одночасно відбуваються обидві події, A та B . При цьому пишуть: $C=AB$, або $C=A \cap B$. Добутку подій A і B відповідає множина C елементів простору елементарних подій, що є об'єднанням множин A та B .

Різницею подій A та B називають таку подію C , яка відбувається, коли відбувається подія A і не відбувається подія B . Використовують позначення: $C=A \setminus B$. Різниці подій $C=A \setminus B$ відповідає множина, що є різницею множин A та B (із множини A вилучаються елементи, що належать множині B).

Подією, протилежною до події A , називають подію $\bar{A}=\Omega \setminus A$, яка відбувається, коли не відбувається подія A . Подію $\bar{A}$ визначає множина, яка є доповненням множини A до множини Ω .

Для введених операцій над подіями виконуються співвідношення, що відповідають формулам теорії множин.

1 $\bar{\bar{A}} = A$	7 $A + A = A$	13 $A + \emptyset = A$
2 $A + B = B + A$	8 $A \cdot A = A$	14 $A + \Omega = A$
3 $AB = BA$	9 $A \cdot B + C = (A + C) \cdot (B + C)$	15 $A \cdot \emptyset = \emptyset$
4 $(A + B) + C = A + (B + C)$	10 $A + \bar{A} = \Omega$	16 $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$
5 $(A \cdot B)C = A(B \cdot C)$	11 $A \cdot \bar{A} = \emptyset$	17 $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$
6 $(A + B)C = AC + BC$	12 $A \cdot \Omega = A$	

1. 4 Аксиоматичне означення ймовірності

Будь-яка випадкова подія A , яка може з'явитися внаслідок випробування, відповідає певній підмножині простору елементарних подій Ω . Її елементами є елементарні події, що сприяють події A . Множина всіх подій, що можуть настати у результаті випробування – це множина всіх підмножин простору Ω . Кожній з цих подій можна поставити у відповідність дійсне число, що відображає міру можливості її появи, тобто ймовірність даної події. Видатний математик О.М. Колмогоров запропонував визначати поняття ймовірності події за допомогою наступної системи аксіом:

1. Кожній події A можна поставити у відповідність дійсне число $P(A)$, таке, що $0 \leq P(A) \leq 1$, яке називається ймовірністю події A .
2. Ймовірність вірогідної події дорівнює 1: $P(\Omega) = 1$.
3. Ймовірність появи хоча б однієї з n попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій: $P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$, де $A_1, A_2, \dots, A_n$ – попарно несумісні події.

Якщо простір елементарних подій є нескінченним, то система аксіом ймовірності 1 – 3 доповнюється аксіомою неперервності:

4. Для послідовності подій $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, такої, що $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ і $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, виконується рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$.

Виходячи з даної системи аксіом, властивості ймовірностей та залежності між ними можна отримати у вигляді теорем.

1.5 Класичне означення ймовірності

Нехай деяке випробування визначає скінченний простір елементарних подій, що є рівноможливими, а n – кількість всіх елементарних подій ω_1 ,

$\omega_2, \dots, \omega_n$ цього простору. Оскільки елементарні події є попарно несумісними, то сума їх ймовірностей дорівнює 1, тому $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Нехай події A сприяють m елементарних подій (наслідків випробування) $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$, тобто $A = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_m$. Тоді за аксіомою 3 п. 1.4 маємо:

$$P(A) = P(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_m) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_m) = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}.$$

Таким чином, отримали формулу для визначення ймовірності події A у випадку коли простір елементарних подій є скінченним, а самі елементарні події – рівноможливими:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (1.1)$$

де n – загальна кількість всіх рівноможливих елементарних подій, m – кількість елементарних подій, що сприяють події A .

Формула (1.1) надає класичне означення ймовірності. Його можна сформулювати наступним чином.

Ймовірністю події A називають відношення кількості сприятливих для цієї події можливих елементарних подій (наслідків випробування) до загальної кількості всіх рівноможливих несумісних елементарних подій, що утворюють повну групу (простір елементарних подій).

З класичного означення ймовірності випливає, що ймовірність вірогідної події дорівнює 1 (у цьому випадку $m = n$), а ймовірність неможливої події дорівнює 0, оскільки у формулі (1.1) $m = 0$.

Приклад. Знайти ймовірність того, що кількість очок, що випали після кидання грального кубика на його верхній грані, ділиться націло на 3.

Розв’язання. Нехай подія A – {кількість очок, що випали на верхній грані кубика, ділиться націло на 3}. Випробування полягає у одноразовому киданні грального кубика. Його можливі наслідки (елементарні події) ω_i – {на верхній грані кубика з’явилося i очок}, $i = 1, 2, \dots, 6$ утворюють простір елементарних подій для цього випробування. Таким чином, $n = 6$. Сприятливими для події A

елементарними подіями є ω_3 та ω_6 , тобто кількість сприятливих для A елементарних подій $m = 2$. За формулою (1.1) $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

1.6 Основні формули комбінаторики

Розділ математики, у якому розглядаються задачі про кількість комбінацій, що задовольняють певним умовам, які можна скласти з заданих об'єктів, називається комбінаторикою. У цих задачах об'єктами дослідження є скінченні множини. При безпосередньому застосуванні класичного означення ймовірності правила та формули комбінаторики часто використовуються для безпосереднього підрахунку кількості всіх можливих та сприятливих наслідків випробування. Основними правилами комбінаторики є правила суми та добутку.

Правило суми. Якщо деякий об'єкт A може бути вибраний із деякої сукупності об'єктів k способами, а інший об'єкт B – s способами, то вибрати A або B можна $k + s$ способами.

Правило добутку. Якщо об'єкт A можна вибрати з сукупності деяких об'єктів k способами, а після кожного такого вибору об'єкт B можна вибрати з цієї ж сукупності s способами, то пара об'єктів (A, B) у вказаному порядку може бути вибраною $k \cdot s$ способами.

Приклад 1. Скільки існує двохзначних натуральних чисел, що діляться націло на 5?

Розв'язання. Першу цифру у запису такого числа можна вибрати $k = 9$ способами, а другу цифру – $s = 2$ способами (0 або 5). Всього існує $k \cdot s = 9 \cdot 2 = 18$ таких чисел.

Різні скінченні множини, що відрізняються між собою складовими елементами і (або) їх порядком, називаються комбінаціями. Розрізняють три види комбінацій: розміщення, перестановки, сполучення. Вони можуть бути

утвореними без повторення окремих елементів або з їх повторенням. Розглянемо різні типи комбінацій.

1. Розміщення.

Розміщеннями з n елементів по m називають комбінації, кожна з яких містить по m елементів, вибраних з n -елементної множини, та відрізняється від інших складовими елементами та порядком їх розташування. Кількість розміщень з n елементів по m без повторень позначається A_n^m та визначається за формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (1.2)$$

Приклад 2. Студентська група нараховує 25 студентів. Скільки існує способів вибрати у цій групі старосту та його заступника?

Розв'язання. Необхідно підрахувати кількість розміщень з 25 студентів по 2 без повторень, оскільки знаходимо кількість комбінацій з 2 елементів, що відрізняються не лише елементами, але й порядком їх розташування. Тому кількість таких способів $A_{25}^2 = \frac{25!}{(25-2)!} = 24 \cdot 25 = 600$.

Якщо при утворенні розміщень з n елементів по m включати у їх число і такі, що містять елементи, які повторюються, то маємо кількість розміщень з повтореннями

$$\bar{A}_n^m = n^m. \quad (1.3)$$

Приклад 3. Скільки можна утворити десятизначних телефонних номерів, у запису яких присутні лише цифри 1, 2, 4, 7?

Розв'язання. Цифри у запису кожного номера розрізняються між собою, розрізняється також їх порядок розташування і при цьому вони у запису номера можуть повторюватися. Тому кількість таких телефонних номерів дорівнює числу розміщень з 4 елементів по 10 з повтореннями: $\bar{A}_4^{10} = 4^{10}$.

2. Перестановки.

Перестановками з n елементів називають комбінації з n елементів, у кожному з яких входять всі елементи, що відрізняються між собою лише порядком розташування елементів. Кількість перестановок з n елементів без повторень знаходиться за формулою:

$$P_n = n! \quad (1.4)$$

Приклад 4. Скільки чотиризначних натуральних чисел, цифри у запису яких не повторюються, можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3?

Розв’язання. Оскільки запис чотиризначного числа не може починатися з нуля, то кількість таких чисел $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 18$.

Якщо серед n елементів перестановки перший елемент повторюється k_1 раз, другий елемент – k_2 рази, m -й елемент – k_m разів ($k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$), то кількість перестановок з повтореннями, складених з цих елементів, обчислюється за формулою:

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!} \quad (1.5)$$

Приклад 5. Скільки різних шестизначних чисел можна записати з допомогою трьох одиниць та трьох двійок?

Розв’язання. Кількість таких чисел $P_6(3, 3) = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$.

3. Сполучення.

Комбінації з n елементів по m , що відрізняються між собою хоча б одним елементом, називаються сполученнями. Сполучення, що містять однакові елементи, вважаються однаковими незалежно від порядку розташування цих елементів (на відміну від розміщень). Кількість сполучень з n елементів по m без повторень окремих елементів знаходимо за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n - m)!} \quad (1.6)$$

Приклад 6. Під час зустрічі 20 осіб потиснули один одному руку. Скільки всього було зроблено рукостискань?

Розв'язання. Кількість рукостискань $C_{20}^2 = \frac{20!}{2! \cdot (20-2)!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$.

Якщо при утворенні сполучень n елементів по m у їх число включаються сполучення, у яких окремі елементи повторюються, то кількість сполучень з n елементів по m визначається за формулою:

$$\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m. \quad (1.7)$$

Приклад 7. У асортименті кондитерської 7 видів тістечок. Покупець хоче замовити 4 тістечка. Скількома способами він це може зробити?

Розв'язання. Кількість способів дорівнює кількості сполучень з повтореннями з 7 елементів по 4: $\bar{C}_7^4 = C_{7+4-1}^4 = C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$ способів.

Розглянемо приклади застосування формул комбінаторики до знаходження ймовірностей випадкових подій за класичним означенням (класичною схемою).

Приклад 8. У ящику знаходиться 20 деталей, 8 з яких є бракованими. Знайти ймовірність того, що з взятих навмання трьох деталей одна буде бракованою.

Розв'язання. Випробуванням тут є виймання з ящика трьох деталей. Кількість n всіх можливих елементарних подій (результатів випробування) дорівнює числу способів, якими з 20 деталей можна вийняти 3. Оскільки порядок розташування вийнятих деталей не має значення, то $n = C_{20}^3$. Сприятливі наслідки випробування отримуємо при вийманні однієї бракованої та двох стандартних деталей. Одну браковану деталь можна вийняти з ящика 8 різними способами, дві стандартні деталі – $C_{20-8}^2 = C_{12}^2$ способами. За правилом добутку, кількість m способів, якими можна вийняти з ящика одну браковану та дві стандартні деталі, дорівнює $8 \cdot C_{12}^2$. За класичним означенням ймовірності маємо:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{8 \cdot C_{12}^2}{C_{20}^3} = \frac{8 \cdot 12!}{2! \cdot 10!} \cdot \frac{3! \cdot 17!}{20!} = \frac{44}{95}.$$

Приклад 9. З коробки, що містить картки з літерами «е», «и», «к», «т», «т», «м», «м», «а», «а», «а» навмання виймають одну картку за іншою та викладають у порядку виймання. Знайти ймовірність того, що у результаті отримаємо слово «математика».

Розв’язання. Кількість n всіх можливих наслідків випробування тут дорівнює кількості перестановок з 10 елементів з повтореннями, а саме $P_{10}(1, 1, 1, 2, 2, 3)$, з них сприятливих лише один, той, що відповідає потрібному слову. За класичним означенням ймовірності отримуємо:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{1}{P_{10}(1, 1, 1, 2, 2, 3)} = \frac{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3!}{10!} = \frac{1}{151200}.$$

1.7 Статистична ймовірність

До основних недоліків застосування класичного означення до обчислення ймовірностей випадкових подій відносяться:

- можливість нескінченної кількості наслідків у деяких випробуваннях;
- можливість того, що елементарні події, що можуть відбутися внаслідок випробування не будуть рівноймовірними;
- неможливість у деяких випадках представити подію, що цікавить дослідника, у вигляді множини елементарних подій.

З цих причин, поряд з класичною схемою, використовують також інші способи обчислення ймовірностей. При статистичному методі знаходження ймовірності вважають, що вона дорівнює відносній частоті появи події у серії з багатьох випробувань.

Відносною частотою (частістю) події A називають відношення кількості m випробувань, у яких ця подія відбулася, до загальної кількості n здійснених випробувань:

$$\nu(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.8)$$

Приклад. У серії з 100 пострілів стрілець 86 разів влучив у ціль. Відносна частота влучення у ціль даним стрільцем $\nu = 0,86$.

Якщо випробування здійснюються в однакових умовах у достатньо великих кількостях, то відносна частота появи події у цих дослідах виявляє властивість стійкості. Ця властивість полягає у тому, що при здійсненні кількох серій з великої кількості випробувань відносна частота події змінюється мало, коливаючись навколо деякої сталої величини, що дорівнює ймовірності даної події. Таким чином, статистичною ймовірністю події є відносна частота її появи у серії з достатньо великої кількості випробувань. Для існування статистичної ймовірності події A потрібна:

- можливість, хоча б принципова, здійснення необмеженого числа випробувань, у кожному з яких може з'явитися ця подія;
- стійкість відносних частот появи події A у різних серіях з достатньо великої кількості випробувань.

1.8 Геометрична ймовірність

Класичну схему обчислення ймовірностей не можна застосувати для випробувань з нескінченною кількістю можливих наслідків. Досить часто у подібних випадках можна використати геометричні ймовірності, тобто ймовірності потрапляння поставленої випадковим чином точки у деяку область (відрізок, фігуру на площині, просторове тіло тощо).

Нехай $mes G$ – міра області G (довжина, площа чи об'єм), що визначається у залежності від розмірності області. Якщо $g \subset G$, то ймовірність потрапляння випадкової точки у область g визначається за формулою:

$$P = \frac{mes g}{mes G} \quad (1.9)$$

У даному випадку вважається, що точка навмання наноситься у область G , сукупність точок якої утворює простір елементарних подій для цього

випробування. Область $g \subset G$ відповідає підмножині елементарних подій, що є сприятливими наслідками випробування.

Приклад 1. На площині накреслено два концентричні кола, радіуси яких відповідно дорівнюють 5см та 10см. Знайти ймовірність того, що точка, поставлена навмання у більшому крузі, потрапить при цьому у кільце, утворене накресленими колами.

Розв'язання. Для знаходження потрібної ймовірності використаємо формулу (1.9). Тут область G – це більший круг, g – кільце. Оскільки мірою області на площині є площа, то отримуємо: $mes G = S_g = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$, $mes g = S_g = \pi(10^2 - 5^2) = 75\pi$. Шукана ймовірність $P = \frac{mes g}{mes G} = \frac{75\pi}{100\pi} = 0,75$.

Приклад 2. (Задача про зустріч). Двоє студентів домовилися зустрітися у визначеному місці на протязі часу від 12.00 до 13.00. Кожний з них чекає іншого 20 хвилин, після чого йде. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожен з цих студентів з рівною ймовірністю може прийти у будь-який момент часу на протязі вказаної години незалежно від іншого.

Розв'язання. Нехай x та y – моменти появи відповідно першого та другого студента (у годинах від 12.00): $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Простором елементарних подій у даній задачі є множина всіх точок (x, y) квадрата $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Умову, за якої зустріч студентів відбудеться, запишемо у вигляді: $|x - y| \leq \frac{1}{3}$. Таким чином, множина точок $|x - y| \leq \frac{1}{3}$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ визначає множину сприятливих для зустрічі наслідків. Застосуємо формулу (1.9). Тут $mes G = S_G = 1^2 = 1$, $mes g = S_g = 1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$.

Підставивши ці значення у (1.9), отримуємо $P = \frac{5}{9}$.