

1.4. Статистичне означення ймовірності

Використання класичного означення до задач природничо-наукового або економічного характеру не завжди можливо з різних причин. Зокрема, часто неможливо подати результат експерименту як сукупність подій, які можна було б вважати рівноможливими. Наприклад, з міркувань симетрії, на яких ґрунтуються міркування про рівноймовірність подій, вивести ймовірність того, що народжена дитина була хлопчиком, неможливо.

З цієї причини поряд з класичним визначенням ймовірності користуються також **статистичним визначенням ймовірності**, приймаючи за ймовірність події її відносну частоту.

Відносна частота, поряд з ймовірністю, належить до основних понять теорії ймовірностей. Якщо позначити через μ – число появ події в n – незалежних випробуваннях, то відношення числа появ події до загального числа проведених випробувань називають **відотною частотою появи даної події**, тобто

$$W = \frac{\mu}{n}, \quad (1.5)$$

де μ – число появ події, n – загальне число випробувань, W – відносна частота.

Порівнюючи класичне визначення ймовірностей і визначення відотної частоти, можна зробити такий висновок: визначення ймовірностей не вимагає, щоб проводились випробування в дійсності; визначення відотної частоти вимагає фактичного проведення випробувань. Тобто ймовірність визначають до випробування, а відносну частоту – після випробування.

Приклад 1.9. Відділ технічного контролю виявив у партії з 90 деталей 3 браковані деталі. Знайти відносну частоту бракованих деталей.

Розв'язання. Позначимо через A таку подію, як поява бракованої деталі. Загальне число деталей $n = 90$. Бракованих деталей є $\mu = 3$. Тоді за формулою (1.5) маємо

$$W(A) = \frac{3}{90} = \frac{1}{30} \approx 0,03.$$

Якщо дослідним шляхом встановлена відносна частота, то одержане число можна прийняти за наближене значення ймовірності.

Наприклад: за даними статистики, відносна частота народження дівчат на 1000 дітей характеризується такими числами за кожен місяць:

Місяці	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Частота w	0,486	0,489	0,490	0,471	0,478	0,482	0,462	0,484	0,485	0,491	0,482	0,473

Відносна частота коливається близько 0,482, яке можна прийняти за наближене значення ймовірності народжування дівчат.

1.5. Геометричне означення ймовірності

Класичне означення ймовірностей використовується лише для експериментів з обмеженим числом рівномірних елементарних подій, тобто коли простір елементарних подій обмежений.

Для математичного опису досліду з нескінченним числом рівноможливих результатів використовують **геометричне означення ймовірності**.

Ймовірність випадкової події A дорівнює

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \quad (1.6)$$

де $m(A)$ – довжина, площа чи об'єм підмножини A ; $m(\Omega)$ – довжина, площа чи об'єм області Ω .

Якщо множина Ω вимірюється в лінійних одиницях, то $P(A)$ дорівнюватиме відношенню довжини, якщо Ω вимірюється в квадратних одиницях, то $P(A)$ дорівнюватиме відношенню площ.

Таке означення ймовірності має просту геометричну інтерпретацію: це частина, яку складає довжина, площа чи об'єм множини A від довжини, площі чи об'єму усієї області Ω . Випадкові події в такому разі реалізуються як певні геометричні об'єкти.

Приклад 1.10. (Задача про зустріч). Два студенти A і B домовились зустрітися в певному місці між 19 і 20 год. Той, хто приходить першим, чекає на другого протягом 20 хв., і не дочекавшись, відходить. Чому дорівнює ймовірність зустрічі студентів A і B , якщо прихід кожного з них протягом вказаної години може відбутись випадково в незалежні моменти?

Розв'язання. Позначимо момент приходу студента A через x , а студента B – через y . Щоб зустріч відбулась, необхідно, щоб виконувалась умова:

$$\begin{aligned} |x - y| &\leq 20 \\ -20 &\leq x - y \leq 20 \end{aligned}$$

Маємо $x - 20 \leq y$, $x + 20 \geq y$.

Будемо зображати x і y як координати точки на площині. За одиницю масштабу виберемо хвилину. Всі можливі результати позначимо точками квадрата зі сторонами 60, сприятливі випадки зображуємо нерівностями:

$$\begin{aligned} x - 20 &\leq y \\ x + 20 &\geq y \end{aligned}$$

у заштрихованій області (рис. 1.1):

$m(\Omega)$ – площа квадрату зі стороною 60, тому $m(\Omega) = 60^2$;

$m(A)$ – площа заштрихованої фігури, яка шукається як різниця площ квадратів зі сторонами 60 та 40 відповідно.

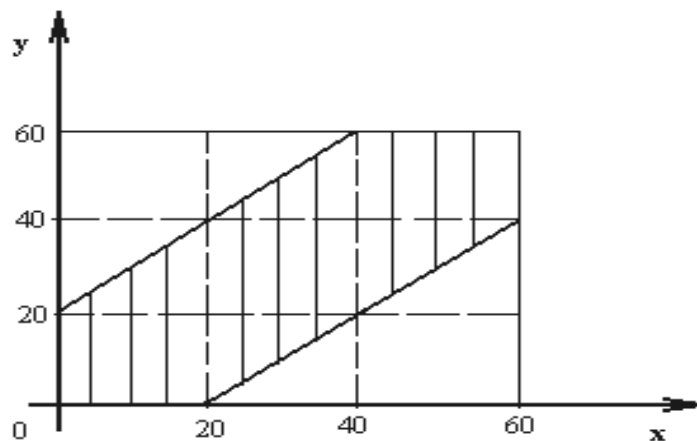


Рис. 1.1. Можливість зустрічі студентів

Тоді за формулою (1.6) одержимо:

$$\frac{-}{-}$$

Розділ 2

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

2.1. Умовна ймовірність. Залежні та незалежні події

Якщо при обчисленні ймовірності події A не вказуються ніякі умови, крім комплексу умов, то такі ймовірності називаються **безумовними** і позначаються $P(A)$.

Ймовірність настання події A , обчислена в припущенні, що подія B уже відбулася, називається **умовною ймовірністю** події A при умові B і позначається

$$P(A/B) \text{ або } P_B(A).$$

Словами це означає: ймовірність події A при умові, що подія B уже відбулась.

Приклад 2.1. В ящику міститься 5 червоних і 7 білих куль. Із ящика два рази виймають по одній кулі. Знайти ймовірність того, що за другим випробуванням буде вийнята біла куля (подія A), якщо першою була вийнята також біла куля (подія B).

Розв'язання. Всього в ящику є 12 ($5 + 7 = 12$) куль. Після першого випробування в урні залишилось 11 куль, із них 6 білих.

Отже, шукана ймовірність, на основі класичного означення ймовірностей, дорівнює:

$$P_B(A) = \frac{6}{11}.$$

Дві події A і B називаються **незалежними**, якщо ймовірність появи однієї із них не залежить від появи або не появи іншої події.

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називаються **незалежними в сукупності**, якщо ймовірність кожної з них не змінюється через настання або не настання інших подій окремо або в будь якій комбінації.

2.2. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

Сумою двох подій $A + B$ називають подію, що полягає у появі події A або події B , або обох цих подій.

Наприклад, якщо зроблено два постріли A – подія, що означає влучання при першому пострілі, а B – при другому пострілі, то $A+B$ означає влучання при першому або другому, або в обох пострілах.

Зокрема, якщо дві події A і B несумісні, то $A+B$ – подія, що полягає в появі однієї із цих подій, або події A , або події B .

Сумою $\sum_i A_i$ подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ називають таку подію, поява якої рівно-сильна появі принаймні однієї з подій $A_i, i=1, 2, \dots, n$.

Теорема 2.1. Ймовірність появи однієї з кількох несумісних подій, не важливо якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (2.1)$$

$$P(\sum_i^n A_i) = P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_{1n}). \quad (2.2)$$

Приклад 2.2. В ящику знаходиться 6 білих і 4 чорних кулі. З ящика виймають навмання 2 кулі. Яка ймовірність того, що вони однокольорові?

Розв'язання. Нехай подія A – поява двох білих куль, а подія B – поява двох чорних куль. Події A та B несумісні.

Число всіх єдиноможливих, рівноможливих і несумісних випадків дорівнює числу пар, які можна утворити з десяти різних куль.

$$n = C_{10}^2 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$$

– число загальних випадків.

Число випадків, сприятливих для появи двох білих куль, дорівнює $C_6^2 = 15$, двох чорних – $C_4^2 = 6$.

Тоді за формулою (2.1) маємо:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{15}{45} + \frac{6}{45} = \frac{7}{15}.$$

2.3. Теорема множення залежних і незалежних подій

Добутком двох подій A і B називають таку третю подію C , що полягає в одночасній появі цих подій.

Добутком $\prod_i A_i$ подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ називають таку подію, поява якої рівнозначна появі кожної з цих подій $A_i, i=1, 2, \dots, n$.

Якщо події A і B залежні між собою, причому відомі $P(A), P_B(A)$, то ймовірність добутку цих подій, тобто ймовірність того, що з'явилась подія A і B шукається за допомогою теореми.

Теорема 2.2. Якщо події A і B незалежні між собою, то ймовірність добутку цих подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (2.3)$$

Ймовірність появи кількох подій, незалежних сукупно, обчислюється за формулою:

$$P(\prod_i A_i) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_1). \quad (2.4)$$

Приклад 2.3. У трьох коробках знаходиться по 10 деталей. У першій коробці – 8, в другій – 7 і в третій – 9 стандартних деталей. Із кожної коробки навмання виймають по одній деталі. Знайти ймовірність того, що всі три вийняті деталі будуть стандартними.

Розв'язання. Ймовірність того, що з першої коробки вийнята стандартна деталь (подія A), дорівнює:

$$P(A) = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Ймовірність того, що з другої коробки вийнята стандартна деталь (подія B), дорівнює:

$$P(B) = \frac{7}{10} = 0,7.$$

Ймовірність того, що із третьої коробки вийнята стандартна деталь (подія C), дорівнює:

$$P(C) = \frac{9}{10} = 0,9.$$

Оскільки події A , B , C незалежні, то шукана ймовірність (за теоремою множення – формула (2.4) дорівнює:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504.$$

Теорема 2.3. Ймовірність добутку двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї із цих подій на умовну ймовірність другої, обчислену за умови, що відбулась перша подія.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B). \quad (2.5)$$

Якщо маємо три події A , B , C , залежні між собою, то теорема множення ймовірностей матиме вигляд:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C). \quad (2.6)$$

Оскільки $A \cdot B = B \cdot A$, то і для множення ймовірностей має місце закон комутативності:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A). \quad (2.7)$$

Приклад 2.4. Студент знає 20 із 25 питань програми. Знайти ймовірність того, що студент знає три питання, які були в екзаменаційному білеті.

Розв'язання. Ймовірність того, що студент знає перше питання (подія A), дорівнює:

$$P(A) = \frac{20}{25}.$$

Ймовірність того, що студент знає друге питання (подія B), дорівнює:

$$P(B) = \frac{19}{24}$$

(оскільки події A , B залежні між собою).

Ймовірність того, студент знає третє питання (подія C), дорівнює:

$$P(C) = \frac{18}{23}.$$

(оскільки події A , B , C залежні між собою).

На основі формули (2.6) маємо:

$$P(A \cdot B \cdot C) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115} \approx 0,5.$$

2.4. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Суму двох сумісних подій можна подати у вигляді:

$$A + B = A \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{A} + A \cdot B.$$

Геометрично суму двох сумісних подій A і B показано на рис 2.1.

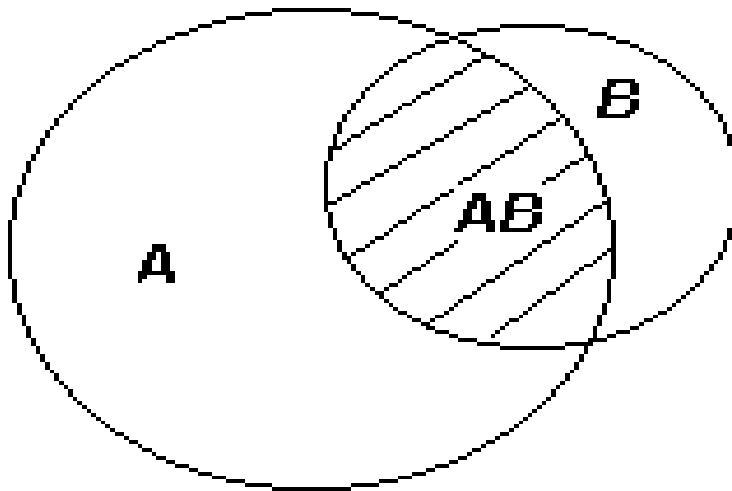


Рис. 2.1. Сума сумісних подій

Теорема 2.4. Ймовірність появи хоча б однієї із двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності добутку цих подій, тобто:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \quad (2.8)$$

Зауваження: при використанні формули (2.8) треба мати на увазі, що події A і B можуть бути і залежними, і незалежними.

Для сумісних і незалежних подій теорема додавання запишеться формулою:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B). \quad (2.9)$$

Для сумісних і залежних подій теорема додавання запишеться формулою:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B). \quad (2.10)$$

Приклад 2.5. Для виконання завдання замовник звернувся до двох виконавців. Ймовірність того, що перший виконавець надасть згоду виконати замовлення дорівнює 0,8, а другий – 0,9. Знайти ймовірність того, що замовлення буде прийнято принаймні одним з цих виконавців.

Розв’язання. Позначимо події:

A – завдання прийнято для виконання;

A_1 – перший виконавець дав згоду виконати завдання;

A_2 – другий виконавець дав згоду виконати завдання.

Тоді $A = A_1 + A_2$. Оскільки згода виконати замовлення першим виконавцем не виключає згоди виконання замовлення іншим, події сумісні. Тоді:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2).$$

Події A_1 та A_2 незалежні, тому що ймовірність згоди кожного виконавця не залежить від того, чи дав згоду інший виконавець. Тому

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Отже:

$$P(A) = 0,8 + 0,9 - 0,8 \cdot 0,9 = 0,98.$$

2.5. Протилежні події. Ймовірність протилежної події

Протилежними називають дві єдиноможливі події, які утворюють повну групу подій. Подію, протилежну події A (тобто ненастання події A), позначають через $\bar{A}$.

Наприклад: влучання і промах при пострілі в задану ціль – протилежні події. Складання іспиту і провал іспиту – протилежні події. Якщо подія A – влучання в ціль, то $\bar{A}$ – промах. Якщо A – подія складання іспиту, то $\bar{A}$ – подія провалу іспиту.

Теорема 2.5. Ймовірність суми протилежних подій дорівнює одиниці, тобто:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (2.11)$$

Приклад 2.6. Ймовірність того, що банк надасть кредит, дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що банк відмовить у кредитуванні.

Розв'язання. Події A – банк надасть кредит та $\bar{A}$ – банк відмовить у кредиті – протилежні. Використовуючи формулу (2.11) ймовірність буде дорівнювати:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

Приклад 2.7. В ящику в довільному порядку розкладено 20 деталей, причому 5 з них стандартні. Навмання беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що принаймні одна з них буде стандартною (подія A).

Розв'язання. Задачу можна розв'язати двома способами.

Перший спосіб. Принаймні одна з взятих деталей буде стандартною, якщо відбудеться одна з трьох несумісних подій:

A_1 – одна деталь стандартна і дві нестандартні,

A_2 – дві деталі стандартні і одна нестандартна,

A_3 – три деталі стандартні.

Подію A можна записати у вигляді суми цих трьох подій:

$$A = A_1 + A_2 + A_3.$$

За теоремою додавання формула (2.2) маємо:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

Знаходимо ймовірність кожної з цих подій (використовуємо задачу про вибірку приклад 1.8):

$$P(A_1) = \frac{C_5^1 \cdot C_{15}^2}{C_{20}^3} = \frac{5}{1} \cdot \frac{14 \cdot 15}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{18 \cdot 19 \cdot 20} = \frac{35}{76},$$

$$P(A_2) = \frac{C_5^2 \cdot C_{15}^1}{C_{20}^3} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{15}{1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{18 \cdot 19 \cdot 20} = \frac{5}{38},$$

$$P(A_3) = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{18 \cdot 19 \cdot 20} = \frac{1}{114}.$$

Додавши знайдені величини, отримаємо:

$$P(A) = \frac{35}{76} + \frac{5}{38} + \frac{1}{114} = \frac{137}{228}.$$

Другий спосіб. Події A (принаймні одна з взятих деталей буде стандартною) і $\bar{A}$ (жодна зі взятих деталей не стандартна) протилежні, тому за формулою:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \text{ або } P(A) = 1 - P(\bar{A}). \quad (2.11)$$

Ймовірність появи події $\bar{A}$ дорівнює:

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{15}^3}{C_{20}^3} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{18 \cdot 19 \cdot 20} = \frac{91}{228}.$$

Отже, шукана ймовірність:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{91}{228} = \frac{137}{228}.$$

2.6. Ймовірність появи хоча б однієї події

Нехай в результаті випробовування може з'явитися n подій, причому відомі ймовірності цих подій. Ймовірність того, що з'явиться хоча б одна із цих подій шукається за теоремою.

Теорема 2.6. Ймовірність появи хоча б однієї із подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежних сукупно, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$.

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n, \quad (2.12)$$

де $q_i = 1 - p_i$ – ймовірності відповідних протилежних подій.

Приклад 2.8. Ймовірність влучання в ціль із трьох рушниць, відповідно, дорівнює $p_1=0,7$, $p_2=0,8$, $p_3=0,9$. Знайти ймовірність хоч би одного влучання (подія A) при одному залпі із трьох рушниць.

Розв'язання. Події A_1, A_2, A_3 – влучання в ціль із трьох рушниць незалежні сукупно. Ймовірність промахів, відповідно, будуть рівні:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,7 = 0,3 = P(\bar{A}_1);$$

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,8 = 0,2 = P(\overline{A_2});$$

$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0,9 = 0,1 = P(\overline{A_3}).$$

Шукана ймовірність за формулою (2.12) буде дорівнювати:

$$P(A) = 1 - 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,994.$$

Зокрема, якщо події $A_1, A_2, \dots, A_n$ мають однакову ймовірність, рівну p , тобто $P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = p$, то ймовірність появи – хоч би однієї із цих подій дорівнює:

$$P(A) = 1 - q^n. \quad (2.13)$$

Приклад 2.9. Укладено 4 однотипних договори страхування терміном на 1 рік. Ймовірність того, що за будь-яким договором протягом року надійде запит на відшкодування, дорівнює 0,1. Припускаючи, що надходження запитів незалежні між собою, знайти ймовірність того, що

А. Запити надійдуть за чотирма договорами.

Б. Запити не надійдуть за жодним договором.

В. Запит надійде принаймні за одним договором.

Розв'язання. Нехай A_i , $i=1, 2, 3, 4$ – подія, яка полягає в тому, що запит надійде за i -тим договором. Тоді $\overline{A_i}$ протилежна подія до події A_i . Тому:

$$P(A_i) = p = 0,1, P(\overline{A_i}) = q = 1 - p = 1 - 0,1 = 0,9.$$

А. Оскільки події A_i незалежні, то за формулою незалежних подій:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = 0,1^4 = 0,0001.$$

Б.

$$P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4}) = 0,9^4 = 0,6561.$$

В. Нехай подія A – запит надійде принаймні за одним договором є протилежною подією до події $\overline{A}$ – запит не надійде за жодним договором. Скориставшись формулою (2.13) одержимо:

$$P(A) = 1 - 0,9^4 = 0,3439.$$

2.7. Формула повної ймовірності

Нехай подія B може відбутися з однією і лише однією із n -попарно несумісних подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, тобто

$$A = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + \dots + A \cdot H_n.$$

Потрібно знайти ймовірність події A . На основі теореми додавання несумісних подій маємо:

$$P(A) = P(A \cdot H_1) + P(A \cdot H_2) + \dots + P(A \cdot H_n).$$

Далі, використавши теорему множення залежних подій, отримаємо:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A)$$

або

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A). \quad (2.14)$$

Формулу (2.14) називають **формулою повної ймовірності**.

Подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, які утворюють повну групу, тобто:

$$P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1. \quad (2.15)$$

Приклад 2.10. Маємо дві коробки деталей. Ймовірність того, що в першій коробці деталь стандартна, дорівнює 0,8, а в другій – 0,9. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь із будь-якої коробки буде стандартна.

Розв'язання. Нехай A – подія – вийнята стандартна деталь.

H_1 – деталь може бути вийнята із першої коробки;

H_2 – деталь може бути вийнята з другої коробки, тобто:

$$A = A \cdot H_1 + A \cdot H_2.$$

На основі формули повної ймовірності (2.14), маємо:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A).$$

Ймовірність вибору коробки:

$$P(H_1) = \frac{1}{2}; \quad P(H_2) = \frac{1}{2}.$$

Ймовірність стандартної деталі з відповідної коробки:

$$P_{H_1}(A) = 0,8; \quad P_{H_2}(A) = 0,9.$$

Підставивши значення, одержимо:

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot 0,8 + \frac{1}{2} \cdot 0,9 = 0,85.$$

2.8. Ймовірність гіпотез. Формула Байєса

Нехай знову подія A може відбутися з однією і лише однією із n -попарно незалежних подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, тобто:

$$A = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + \dots + A \cdot H_n.$$

Події $H_1, H_2, \dots, H_n$, називають **гіпотезами**.

Нехай подія A – відбулася. Треба знайти ймовірність події H_i , із якою відбулася подія A , тобто $P_A(H_i)$. На основі теореми множення ймовірностей, маємо:

$$P(H_i A) = P_{H_i}(A) \cdot P(H_i) = P(A) \cdot P_A(H_i),$$

звідси:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)}.$$

Використавши формулу повної імовірності (2.14), одержимо:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}. \quad (2.16)$$

Формулу (2.15) називають **формулою Байєса** (за ім'ям англійського математика, який опублікував в 1764 р. цю формулу) або **формулами гіпотез**.

Формула Байєса дає можливість переоцінити ймовірність гіпотез після того, як стає відомим результат випробування, внаслідок якого з'явилась подія A .

Приклад 2.11. Маємо 6 ящиків: 2 ящики із складу H_1 , в яких є 3 білі та 2 червоні кулі, 1 ящик із складу H_2 , в якому є 4 білі та 1 червона кулі, 3 ящики зі складу H_3 , в яких є 2 білі і 3 червоні кулі. Навмання вибирають ящик і навмання вибирають кулю. Знайти ймовірність того, що

- А. Біла куля вийнята із складу H_1 .
- Б. Біла куля вийнята із складу H_2 .
- В. Біла куля вийнята із складу H_3 .

Розв'язання.

Ймовірність вибору ящиків з першого складу: $P(H_1) = \frac{2}{6}$.

Ймовірність вибору ящиків з другого складу: $P(H_2) = \frac{1}{6}$.

Ймовірність вибору ящиків з третього складу: $P(H_3) = \frac{3}{6}$.

Подія A – вийнята біла куля.

Ймовірність білої кулі при умові вибору першого складу: $P_{H_1}(A) = \frac{3}{5}$.

Ймовірність білої кулі при умові вибору другого складу: $P_{H_2}(A) = \frac{4}{5}$.

Ймовірність білої кулі при умові вибору третього складу: $P_{H_3}(A) = \frac{2}{5}$.

Знайдемо за формулою повної ймовірності (2.14):

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}.$$

За формулою Байєса (2.16), маємо:

$$\text{А. } P_A(H_1) = \frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{16}{30}} = \frac{3}{8} \approx 0,38.$$

$$\text{Б. } P_A(H_2) = \frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{16}{30}} = \frac{4}{16} = 0,25.$$

$$\text{В. } P_A(H_3) = \frac{P(H_3)P_{H_3}(A)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)} = \frac{\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{16}{30}} = \frac{3}{8} \approx 0,38.$$

Порівнюючи вказані ймовірності, можна зробити висновок, що біла куля була вийнята із коробок першого або третього складів, оскільки ймовірність цих подій найбільша.

Запитання для самоконтролю

1. Які події називаються незалежними?
2. Що називають умовною ймовірністю події A за умови появи події B ?
3. Ймовірності яких подій називаються безумовними.
4. Що називають сумою подій?
5. Сформулюйте теорему додавання ймовірностей несумісних подій.
6. Які події називаються протилежними?
7. Чому рівна сума протилежних подій?
8. За якою формулою шукається ймовірність появи хоча б однієї події?
9. Запишіть формулу для знаходження ймовірність появи хоча б однієї подій, якщо виконується рівність $P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = p$.
10. Що називають добутком подій?
11. Сформулюйте теорему множення ймовірностей залежних подій.
12. Сформулюйте теорему множення ймовірностей незалежних подій.
13. Запишіть формулу додавання сумісних і залежних подій.
14. Запишіть формулу додавання сумісних і незалежних подій.
15. Виведіть формулу повної ймовірності.
16. Чому рівна сума подій, які утворюють повну групу подій?
17. Виведіть формулу Байєса.

Задачі для самостійного розв'язування

1. В урні знаходиться 6 білих і 4 чорних кулі. З урни виймають навмання 2 кулі. Яка ймовірність того, що вони однокольорові?
2. У коробці знаходиться 30 куль. Із них 15 червоних, 10 синіх і 5 білих. Із коробки навмання виймають кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята куля – кольорова.
3. В ящику в довільному порядку розкладено 20 деталей, причому 5 з них стандартних. Беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що принаймні одна з узятих деталей буде стандартною (подія A).
4. Під час складання іспиту студентом ймовірність одержання п'ятірки дорівнює 0,3; четвірки – 0,45; двійки – 0,1; не з'явитись на екзамен – 0,05. Яка ймовірність того, що студент одержить позитивну оцінку?
5. У відділі технічного контролю швейної фабрики представлено на огляд 80 жіночих костюмів, з них 50 одного фасону і 30 – іншого. Визначити ймовірність того, що взяті навмання для огляду два костюми виявляться різних фасонів.

6. Стан використання підприємствами наданих їм кредитів контролюється центральним та обласним банками. Центральний банк перевіряє вибірково 10%, а обласний – 20% підприємств. Яка ймовірність того, навмання вибране підприємство буде перевірене центральним банком і не перевірене обласним, якщо рішення щодо перевірки на різних рівнях ухвалюється незалежно?

7. Продавець обслуговує в магазині два відділи. Ймовірність того, що протягом певного часу йому доведеться відпустити товар з I відділу, дорівнює 0,8; з II відділу – 0,7. Яка ймовірність того, що протягом певного часу продавець не відпускатиме товару?

8. Три студенти одночасно складають іспит. Ймовірність складання іспиту на «відмінно» першим студентом – 0,2; другим – 0,5; третім – 0,3. Знайти ймовірність того, що три студенти складуть іспит на «відмінно».

9. Прилад складається з трьох вузлів, кожний з яких незалежно від інших може протягом часу t відмовити у роботі. Вихід з ладу хоча б одного вузла призводить до зупинки приладу загалом. За час t ймовірність безвідмовної роботи першого вузла дорівнює 0,8; другого – 0,9; третім – 0,7. Знайти надійність приладу загалом.

10. Серед 50 електроламп є три нестандартні. Знайти ймовірність того, що дві взяті одночасно електролампи виявляються нестандартними.

11. Ймовірність того, що подія відбудеться хоча б один раз у трьох незалежних випробуваннях, дорівнює 0,916. Знайти ймовірність появи події в одному випробуванні.

12. Для отримання кредиту підприємець звертається до двох банків. Ймовірність того, що перший банк не відмовить в наданні кредиту становить 0,75, інший – 0,8. Знайти ймовірність того, що:

- а) хоча б один банк дасть згоду на кредитування;
- б) обидва банки відмовляться надавати кредит;
- в) один дасть згоду на кредитування.

13. У першій урні 10 куль, з них 8 білих. У другій урні 20 куль, з них 4 білих. Із кожної урни навмання взято по одній кулі, а потім із двох обраних навмання взято одну. Знайти ймовірність того, що остання куля буде білою.

14. Студент розшукує потрібну йому формулу у трьох довідниках. Ймовірність того, що формула міститься у першому довіднику дорівнює 0,6, у другому – 0,7, в третьому – 0,8. Знайти ймовірність того, що формула міститься:

- а) тільки в одному довіднику;
- б) тільки в двох довідниках;
- в) в усіх трьох довідниках;
- г) хоча б в одному із довідників.

15. Бізнесмен має контракти з трьома банками і може брати кредити в кожному з них. Протягом 5 попередніх років перший банк погодився надати кредит 6 разів, другий банк – 7 разів, третій – 9 разів при 10 зверненнях до