

Тема 5. Неперервні випадкові величини

5.1. Функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини

Розглянемо неперервну випадкову величину X , яка може приймати всі значення з деякого, скінченного або нескінченного проміжку на числовій прямій. У цьому випадку неможливо перелічити всі її можливі значення та їх ймовірності. Для характеристики випадкової величини даного типу використовують функцію розподілу ймовірностей $F(x) = P(X < x)$.

Означення. Випадкову величину називають неперервною, якщо її функція розподілу є неперервною, кусочно диференційовною функцією (її похідна може мати точки розриву першого типу).

Функція розподілу неперервної випадкової величини має такі самі властивості, що й функція розподілу дискретної випадкової величини:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. $F(x)$ є неспадною функцією, тобто $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$.
3. Ймовірність $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

Крім цих властивостей, неперервні випадкові величини мають також специфічні властивості, пов'язані з неперервністю їх функцій розподілу.

4. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме деяке фіксоване значення, дорівнює нулю.

Доведення. Нехай x_0 – деяке фіксоване число. За властивістю 3 ймовірність потрапляння значень випадкової величини X у інтервал $[x_0, x_0 + \Delta x)$ $P(x_0 \leq X < x_0 + \Delta x) = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)$. Оскільки функція розподілу $F(x)$ є неперервною, то $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)) = 0 = P(X = x_0)$.

З властивості 4 випливає, що для неперервної випадкової величини можна розглядати лише ймовірність її потрапляння у деякий інтервал. При цьому виконується рівність:

$$P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

5. Якщо всі можливі значення неперервної випадкової величини X належать $(a; b)$, то $F(x) = 0$ при $x \leq a$, $F(x) = 1$ при $x \geq b$.

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

Приклад. Функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ x/2, & 0 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що значення цієї випадкової величини потраплять у проміжок $(1; 3)$.

Розв'язання. $P(1 < X < 3) = F(3) - F(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

5.2. Щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини та її властивості

Неперервну випадкову величину можна визначити, використовуючи похідну її функції розподілу.

Означення. Щільністю розподілу ймовірностей (диференціальною функцією розподілу) неперервної випадкової величини X називають похідну її функції розподілу:

$$f(x) = F'(x) \quad (5.1)$$

Щільність розподілу ймовірностей визначається лише для неперервних випадкових величин. Графік щільності розподілу ймовірностей $f(x)$ називають кривою розподілу.

З означення щільності розподілу ймовірностей $f(x)$ випливають її основні властивості.

1. $f(x) \geq 0$, оскільки це похідна неспадної функції.

2. Функція розподілу ймовірностей $F(x)$ випадкової величини X може бути вираженою через її щільність розподілу за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt. \quad (5.2)$$

3. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме значення з проміжку $(a; b)$, визначається за формулою:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (5.3)$$

$$4. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Приклад 1. Задана щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 2x, & 0 < x \leq 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти її функцію розподілу та ймовірність того, що внаслідок випробування випадкова величина X прийме значення з проміжку $(0,5; 1)$.

Розв'язання. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. При $x \leq 0$ $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dt = 0$, при $x \in (0; 1]$

маємо $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dt + \int_0^x 2tdt = x^2$. При $x > 1$ знаходимо:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dt + \int_0^1 2tdt + \int_1^x 0 \cdot dt = 1.$$

Таким чином, функція розподілу $F(x)$ має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$P(0,5 < X < 1) = \int_{0,5}^1 f(x)dx = \int_{0,5}^1 2xdx = 0,75.$$

Приклад 2. Задана щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X $f(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}}$. Знайти значення параметра a та функцію розподілу ймовірностей випадкової величини X .

Розв'язання. Оскільки $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, то $a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = 1$. Невизначений

інтеграл $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \arctg(e^x) + C$. Знайдемо невластний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \arctg(e^x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}. \text{ Отримуємо: } a \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{\pi}. \text{ Таким чином,}$$

щільність розподілу $f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{e^x + e^{-x}}$. Функцію розподілу знаходимо за формулою (5.1):

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{dt}{e^t + e^{-t}} = \frac{2}{\pi} \arctg(e^t) \Big|_{-\infty}^x = \frac{2}{\pi} \arctg(e^x).$$

5.3. Числові характеристики неперервних випадкових величин

Означення числових характеристик дискретних випадкових величин — математичного сподівання, дисперсії, початкових та центральних моментів, можна розповсюдити на неперервні випадкові величини.

Визначимо математичне сподівання неперервної випадкової величини. Нехай $f(x)$ — її щільність розподілу ймовірностей, а всі її можливі значення належать відрізка $[a; b]$. Розіб'ємо цей відрізок на n елементарних відрізків з

довжинами Δx_i , $i = 1, 2, \dots, n$, та виберемо на кожному з них довільну точку x_i . По аналогії з обчисленням математичного сподівання дискретної випадкової величини складемо суму добутків значень x_i на ймовірності потрапляння випадкової величини у інтервал, що містить x_i . Така ймовірність наближено дорівнює $f(x_i)\Delta x_i$. Отримуємо інтегральну суму $\sum_{i=1}^n x_i \cdot f(x_i)\Delta x_i$. Переходячи до границі при $\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), отримуємо визначений інтеграл $\int_a^b x \cdot f(x) dx$. Якщо випадкова величина може приймати будь-які значення, отримуємо невластний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$.

Означення 1. Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X з щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$ називають інтеграл:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx. \quad (5.4)$$

По аналогії з дисперсією дискретної випадкової величини можна означити цей показник і для неперервного випадку.

Означення 2. Дисперсією неперервної випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата її відхилення від математичного сподівання $M(X)$:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx. \quad (5.5)$$

Для обчислення дисперсії неперервної випадкової величини, як і у дискретному випадку, зручно користуватися формулою:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Цю формулу можна записати у вигляді:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right)^2. \quad (5.6)$$

Середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини X визначається аналогічно дискретному випадку, за формулою:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (5.7)$$

На відміну від дисперсії, середнє квадратичне відхилення має таку ж розмірність, як і випадкова величина.

Математичне сподівання та дисперсія неперервної випадкової величини мають такі ж властивості, як і у дискретному випадку.

Приклад 1. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X , заданої функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ x, & 0 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо щільність розподілу ймовірностей заданої неперервної випадкової величини:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1, & 0 < x \leq 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

За формулою (5.4) знаходимо математичне сподівання:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Знайдемо дисперсію за формулою (5.6).

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2 = \int_0^1 x^2 dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Початкові моменти k -го порядку неперервної випадкової величини X з щільністю розподілу $f(x)$ визначаються за формулою:

$$\nu_k = M(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)dx. \quad (5.8)$$

Центральні моменти k -го порядку неперервної випадкової величини X знаходять за формулою:

$$\mu_k = M\left((X - M(X))^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^k f(x)dx. \quad (5.9)$$

Коефіцієнт асиметрії та ексцес неперервної випадкової величини обчислюються за тими ж формулами, що й у дискретному випадку:

$$a_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}, \quad (5.10)$$

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3. \quad (5.11)$$

Тут a_x – коефіцієнт асиметрії випадкової величини, E_x – її ексцес, $\sigma_x = \sigma(X)$ – її середнє квадратичне відхилення.

Означення 3. Модю (M_o) неперервної випадкової величини X називають її можливе значення $x = M_o$, якому відповідає максимальне значення щільності розподілу ймовірностей $f(x)$.

Означення 4. Медіаною (M_e) неперервної випадкової величини X називають її значення $x = M_e$, для якого виконується рівність:

$$P(X < M_e) = P(X > M_e). \quad (5.12)$$

Приклад 2. За заданою щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини X

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2; \\ \frac{(x+2)(4-x)}{36}, & -2 < x \leq 4; \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

знайти її моду.

Розв'язання. На $[-2; 4]$ $f(x) \geq 0$. На цьому відрізку

$$f'(x) = \frac{(-x^2 + 2x + 8)'}{36} = \frac{2 - 2x}{36} = \frac{1 - x}{18}.$$

З необхідної умови екстремуму щільності розподілу $f(x)$ – рівняння $f'(x) = 0$ знаходимо $1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$. У

знайденій стаціонарній точці $x = 1$ значення другої похідної $f''(x) = -\frac{1}{18} < 0$,

тому $x = 1$ є точкою максимуму функції $f(x)$, тому для заданої випадкової величини мода $M_0 = 1$.

Приклад 3. Щільність розподілу неперервної випадкової величини X має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2; \\ \frac{(x+2)}{6}, & -2 < x \leq 0; \\ \frac{(4-x)}{12}, & 0 < x \leq 4; \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Знайти її функцію розподілу та медіану.

Розв'язання. Знайдемо функцію розподілу $F(x)$. При $x \leq -2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0. \quad \text{При } x \in (-2; 0] \quad F(x) = \int_{-2}^x \frac{t+2}{6} dt = \frac{(t+2)^2}{12} \Big|_{-2}^x = \frac{(x+2)^2}{12}.$$

$$\text{Якщо } x \in (0; 4], \text{ то } F(x) = \int_{-2}^0 \frac{x+2}{6} dx + \int_0^x \frac{4-t}{12} dt = \frac{1}{3} - \frac{(t-4)^2}{12} \Big|_0^x = 1 - \frac{(x-4)^2}{24}.$$

При $x > 4$ $F(x) = 1$. Таким чином, функція розподілу $F(x)$ для даної випадкової величини має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2; \\ \frac{(x+2)^2}{12}, & -2 < x \leq 0; \\ 1 - \frac{(x-4)^2}{24}, & 0 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Медіану M_e випадкової величини X знайдемо з рівняння (5.12). Враховуючи, що $P(X < M_e) = F(M_e)$, $P(X > M_e) = 1 - F(M_e)$, маємо:

$$F(M_e) = 1 - F(M_e) \Rightarrow F(M_e) = 0,5.$$

З отриманого рівняння знайдемо M_e . Оскільки $F(0) = \frac{1}{3}$, то $M_e \in (0; 4]$.

Маємо: $1 - \frac{(M_e - 4)^2}{24} = \frac{1}{2}$, звідси $(M_e - 4)^2 = 12$. Оскільки $M_e \in (0; 4]$, то з останнього рівняння знаходимо, що $M_e = 4 - 2\sqrt{3}$.

5.4 Рівномірний закон розподілу неперервної випадкової величини

Означення. Розподіл випадкової величини називають рівномірним, якщо на інтервалі, якому належать всі її можливі значення, щільність розподілу цієї випадкової величини є сталою.

Прикладом випадкової величини з рівномірним законом розподілу є похибка при знятті показників з вимірювальних приладів, якщо округлення здійснюється до найближчої поділки.

З означення рівномірно розподіленої неперервної випадкової величини випливає, що її щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ c, & a < x \leq b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Значення сталої c знайдемо, використавши властивість щільності розподілу ймовірностей: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. Звідси $\int_a^b c \cdot dx = c \cdot (b - a) = 1$, тому

$c = \frac{1}{b - a}$. Таким чином, щільність розподілу ймовірностей $f(x)$ для неперервної випадкової величини з рівномірним законом розподілу має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \leq b; \\ 0, & x > b. \end{cases} \quad (5.13)$$

Знайдемо функцію розподілу $F(x)$ цієї випадкової величини. При $x \leq a$ маємо: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dt = 0$. При $x \in (a; b]$ знаходимо, що

$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \frac{t}{b-a} \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$. При $x > b$ $F(x) = 1$. Отже, функція розподілу рівномірно розподіленої випадкової величини має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (5.14)$$

Знайдемо математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення рівномірно розподіленої випадкової величини.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

$$\begin{aligned} D(X) &= M(X^2) - (M(X))^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{x^3}{3(b-a)} \Big|_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

$$\text{Середнє квадратичне відхилення } \sigma_x = \sqrt{D(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Графік щільності розподілу ймовірностей $f(x)$ рівномірно розподіленої випадкової величини є симетричним відносно прямої $x = \frac{a+b}{2}$, тому медіана

цієї випадкової величини $M_e = \frac{a+b}{2} = M(X)$. Моді випадкова величина, розподілена за рівномірним законом, не має, оскільки її щільність не має точок строгого максимуму.

5.5. Показниковий розподіл випадкової величини. Функція надійності

Означення. Випадкову величину X називають розподіленою за показниковим законом, якщо її щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Тут λ – деяка додатна стала.

Знайдемо функцію розподілу ймовірностей $F(X)$ випадкової величини X , розподіленої за показниковим законом. При $x \leq 0$ $F(X) = 0$. При $x > 0$ отримуємо:

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Функція розподілу у випадку показникового закону має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases} \quad (5.16)$$

Якщо $x \rightarrow +\infty$, то $F(x) \rightarrow 1$.

Знайдемо математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X , розподіленої за показниковим законом.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \left\| \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \lambda e^{-\lambda x} dx; \\ du = dx; \quad v = -e^{-\lambda x}. \end{array} \right\| = x e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} +$$

$$+ \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Двічі інтегруючи частинами у правій частині останньої рівності, отримуємо: $\int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$. Звідси знаходимо, що дисперсія

$$D(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Таким чином, отримано формули для обчислення математичного сподівання та дисперсії випадкової величини, розподіленої за показниковим законом:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad (5.17)$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (5.18)$$

Середнє квадратичне відхилення для цієї випадкової величини

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Випадкові величини з показниковим законом розподілу широко використовуються у теорії масового обслуговування, теорії надійності, фізиці, біології. Зокрема, показниковий розподіл є характерним для випадкової величини T – часу безвідмовної роботи деякого пристрою. Функція розподілу ймовірностей цієї випадкової величини має вигляд:

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (5.19)$$

Вона визначає ймовірність відмови пристрою за час t . Ймовірність протилежної події, тобто безвідмовної роботи цього пристрою за час t визначається рівністю:

$$R(t) = P(T \geq t) = 1 - P(T < t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}. \quad (5.20)$$

Функцію $R(t)$ (5.20) називають функцією надійності. Тут λ – це інтенсивність відмов пристрою (середня кількість відмов за одиницю часу).

Приклад. Час роботи електролампи є випадковою величиною з показниковим законом розподілу. Знайти ймовірність того, що час її безвідмовної роботи буде не меншим 600 годин, якщо у середньому час її безвідмовної роботи складає 400 годин.

Розв’язання. За умовою, математичне сподівання часу безвідмовної роботи електролампи дорівнює 400 годин, тобто $M(X) = 400 = 1/\lambda$. Звідси знаходимо, що $\lambda = 1/400$. Знаходимо шукану ймовірність:

$$P(T \geq 600) = R(600) = e^{-\frac{600}{400}} = e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,2254.$$

5.6. Нормальний закон розподілу

Означення. Нормальним називають розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини з щільністю розподілу

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \quad (5.21)$$

Випадкова величина з щільністю розподілу (5.21) називається випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Для того, щоб визначити нормальний розподіл (5.21), потрібно вказати його параметри a та σ .

Покажемо, що значення параметра a є математичним сподіванням випадкової величини X , розподіленої за нормальним законом, а значення параметра σ – її середнім квадратичним відхиленням.

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за нормальним законом.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Для обчислення цього інтеграла виконаємо заміну змінної $z = \frac{(x-a)}{\sigma}$, тоді $x = \sigma z + a$, $dx = \sigma dz$, $z \in (-\infty; +\infty)$. Перейшовши до змінної z , отримаємо:

$$M(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z + a) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Обчислимо невластний інтеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz$.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \sigma z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \sigma z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = J_1 + J_2.$$

Оскільки $\int z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int e^{-\frac{z^2}{2}} d\left(\frac{z^2}{2}\right) = -e^{-\frac{z^2}{2}}$, то маємо:

$$J_1 = -e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_0^{+\infty} - e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^0 = 0.$$

Інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – це відомий інтеграл Пуассона, він дорівнює $\sqrt{2\pi}$, тому

інтеграл $J_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot a \cdot \sqrt{2\pi} = a$. Остаточнo отримуємо

значення математичного сподівання випадкової величини, розподіленої за нормальним законом:

$$M(X) = J_1 + J_2 = a,$$

тобто параметр a у щільності нормального розподілу випадкової величини дорівнює її математичному сподіванню.

Знайдемо дисперсію випадкової величини, розподіленої за нормальним законом.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Аналогічно обчисленню математичного сподівання, виконаємо у отриманому інтегралі заміну $z = \frac{(x-a)}{\sigma}$. Отримаємо:

$$D(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \sigma^2 dz = \left\| \begin{array}{l} u = z; \, dv = ze^{-\frac{z^2}{2}} dz; \\ du = dz; \, v = \int dv = -e^{-\frac{z^2}{2}} \end{array} \right\| = \left(-z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = \sigma^2.$$

Таким чином, дисперсія нормально розподіленої випадкової величини дорівнює параметру σ^2 у виразі (5.21) для її щільності розподілу ймовірностей. Середнє квадратичне відхилення випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, $\sqrt{D(X)} = \sigma$.

Нормальний закон розподілу з щільністю (5.21) при довільних значеннях a та σ називається загальним нормальним розподілом, для нього використовують позначення $N(a, \sigma)$. Нормальний розподіл $N(0, 1)$ з параметрами $a=0$ та $\sigma=1$ називають нормованим нормальним розподілом. Щільність нормованого нормального розподілу має вигляд:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (5.22)$$

Якщо X – це випадкова величина, що має загальний нормальний розподіл $N(a, \sigma)$, то випадкова величина $U = \frac{X - a}{\sigma}$ має нормований нормальний розподіл $N(0, 1)$.

Випадкові величини, розподілені за нормальним законом, знаходять широке застосування на практиці. Це пов'язано з тим, що випадкова величина X має нормальний розподіл, коли вона є сумою великої кількості незалежних у сукупності випадкових величин, вплив кожної з яких на величину X є незначним.

5.7 Крива Гауса та її властивості

Означення. Графік щільності нормального розподілу $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ називають кривою Гауса або нормальною кривою.

Функція $y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ визначена при $x \in (-\infty; +\infty)$, при цьому для довільного дійсного x $f(x) > 0$. Оскільки $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, то вісь Ox є горизонтальною асимптотою для кривої Гауса.

Дослідимо щільність нормального розподілу $f(x)$ на екстремум, для чого знайдемо похідну цієї функції.

$$f'(x) = -\frac{(x-a)^2}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

З рівності $f'(x) = 0$ випливає, що єдиною стаціонарною точкою функції $f(x)$ є $x = a$. Оскільки на проміжку $(-\infty; a)$ $f'(x) > 0$, а на $(a; +\infty)$ $f'(x) < 0$, то $x = a$ є точкою максимуму, при цьому $f_{\max} = f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Графік функції $f(x)$ є симетричним відносно вертикальної прямої $x = a$.

Знайдемо точки перегину кривої Гауса. Для цього визначимо $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{1}{\sigma^2} \left(e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \right) = -\frac{1}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2} \right).$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-a}{\sigma} = \pm 1 \Rightarrow x = a \pm \sigma.$$

При цьому на проміжку $(-\infty; a - \sigma) \cup (a + \sigma; +\infty)$ $f''(x) > 0$, тут крива Гауса опукла вниз, на $(a - \sigma; a + \sigma)$ $f''(x) < 0$, ця крива є опуклою вгору. Точки $x = a \pm \sigma$ є точками перегину кривої Гауса.

Відзначимо, що зміна величини параметра a не змінює форми кривої Гауса. При зростанні a вона зміщується вправо вздовж осі Ox . При збільшенні значення параметра σ максимальна ордината кривої Гауса спадає, а крива стає більш пологою (стискується до осі Ox), при зменшенні σ нормальна крива розтягується у додатному напрямі осі Oy .

Оскільки функція $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ є щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини, то $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$. Таким чином, для довільних a та σ площа між кривою Гауса та віссю Ox дорівнює одиниці.

5.8 Функція розподілу ймовірностей для нормального закону. Функція Лапласа.

Функція $F(x)$ розподілу ймовірностей для загального нормального розподілу $N(a, \sigma)$ має вигляд:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt. \quad (5.23)$$

Функція нормованого нормального розподілу $N(0, 1)$ визначається рівністю

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (5.24)$$

Означення. Функція $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ називається функцією Лапласа.

Функція Лапласа має наступні властивості.

1. $\Phi(0) = 0$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 0,5$.

3. Функція Лапласа є непарною:

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left\| \begin{array}{l} -t = u, \\ dt = -du \end{array} \right\| = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\Phi(x).$$

4. При $x \geq 5$ $\Phi(x) \approx 0,5$, при $x \leq -5$ $\Phi(x) \approx -0,5$.

Функцію розподілу ймовірностей $F(x)$ (5.23) випадкової величини, розподіленої по загальному нормальному закону, можна виразити через функцію Лапласа.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Оскільки $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = 1$ (інтеграл від щільності розподілу

неперервної випадкової величини), а крива Гауса є симетричною відносно

прямої $x = a$, то $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = 0,5$.

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \left\| \begin{array}{l} z = \frac{t-a}{\sigma}; t = \sigma z + a; dt = \sigma dz; \\ t = a \Rightarrow z = 0; t = x \Rightarrow z = \frac{x-a}{\sigma} \end{array} \right\| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{(x-a)}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

Таким чином, отримуємо формулу:

$$F(x) = 0,5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \quad (5.25)$$

З врахуванням рівності (5.25) отримуємо формулу для визначення ймовірності потрапляння випадкової величини X , що має загальний нормальний розподіл ймовірностей, у заданий інтервал $(\alpha; \beta)$:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \quad (5.26)$$

Приклад. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням $a=30$ та середнім квадратичним відхиленням $\sigma=10$. Знайти ймовірність потрапляння цієї випадкової величини у інтервал $(10; 50)$.

Розв'язання. $\alpha=10, \beta=50$. $\frac{\beta-a}{\sigma} = \frac{50-30}{10} = 2$, $\frac{\alpha-a}{\sigma} = \frac{10-30}{10} = -2$.

Підставивши у формулу (5.26), отримуємо шукану ймовірність:

$$P(10 < X < 50) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544.$$

5.9 Обчислення ймовірності заданого відхилення від математичного сподівання. Правило «трьох сигм».

Знайдемо ймовірність того, що відхилення випадкової величини X , розподіленої за нормальним законом, від її математичного сподівання a за абсолютною величиною буде меншим, ніж задане число $\varepsilon > 0$, тобто обчислимо $P(|X - a| < \varepsilon)$.

$$P(|X - a| < \varepsilon) = P(a - \varepsilon < X < a + \varepsilon) = \Phi\left(\frac{a + \varepsilon - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \varepsilon - a}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Таким чином, знайдено значення шуканої ймовірності:

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \quad (5.27)$$

Приклад. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням $a=20$ та середнім квадратичним відхиленням $\sigma=10$. Знайти ймовірність того, що відхилення цієї випадкової величини від її математичного сподівання за абсолютною величиною буде менше 3.

Розв'язання. За умовою $\varepsilon=3$, $\frac{\varepsilon}{\sigma} = 0,3$. Використовуючи формулу (5.27), знаходимо цю ймовірність: $P(|X - 20| < 3) = 2\Phi(0,3) = 2 \cdot 0,1179 = 0,2358$.

Виберемо у формулі (5.27) $\varepsilon = \sigma t$. Маємо: $P(|X - a| < \sigma t) = 2\Phi(t)$. При значенні $t=3$ $P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973$. Звідси випливає, що подія $|X - a| > 3\sigma$ є практично неможливою. Це дозволяє сформулювати правило «трьох сигм»:

Якщо випадкова величина розподілена за нормальним законом, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевищує потроєного середнього квадратичного відхилення: $|X - a| < 3\sigma$.