

Розділ 6. Система випадкових величин

6.1 Поняття системи кількох випадкових величин

Для випадкових величин, що розглядалися раніше, їх кожне можливе значення визначалося одним числом. Такі випадкові величини називають одновимірними. При дослідженні випадкових явищ часто доводиться мати справу з випадковими величинами, можливими значеннями яких є n -вимірні вектори. Такі випадкові величини називають n -вимірними. Наприклад, у задану область площини навімання ставлять точку. Її положення – це випадкова величина, що характеризується випадковим радіус-вектором (X, Y) цієї точки, тобто тут маємо справу з двовимірною випадковою величиною. Погода у певному місці у певний час доби може бути охарактеризованою за допомогою системи випадкових величин (X_1, X_2, X_3, X_4) , де X_1 – температура повітря, X_2 – вологість, X_3 – тиск, X_4 – швидкість вітру.

Якщо кожній елементарній події з простору елементарних подій поставити у відповідність вектор $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ кожною координатою якого є випадкова величина, то на просторі елементарних подій задана n -вимірна випадкова величина або система випадкових величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Двовимірну випадкову величину (X, Y) можна розглядати як випадкову точку, або як випадковий вектор на площині.

У залежності від типу випадкових величин, що утворюють таку систему, розрізняють системи дискретних випадкових величин, системи неперервних випадкових величин, а також змішані системи. Далі будемо розглядати двовимірні випадкові величини (X, Y) .

6.2 Закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини

Означення. Законом розподілу двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) називають перелік всіх її можливих значень, тобто пар чисел (x_i, y_j) та ймовірностей отримання цих значень $p_{ij} = P(X = x_i \wedge Y = y_j)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Звичайно такий закон розподілу записують у вигляді таблиці, що має наступний вигляд.

Y	X			
	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	$\dots$	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	$\dots$	p_{n2}

...	...	...	...	...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	...	p_{nm}

Тут $p_{ij} = P(X = x_i \wedge Y = y_j)$. Всі можливі події $X = x_i \wedge Y = y_j$ при $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ утворюють повну групу несумісних подій, тому $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$.

Приклад 1. Здійснюються два постріли по цілі. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,7. Знайти закон розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) , вважаючи X – кількість влучань, Y – кількість промахів.

Розв’язання. Випадкова величина X може приймати значення $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Можливі значення випадкової величини Y – $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$. Знайдемо ймовірності $p_{ij} = P(X = x_i \wedge Y = y_j)$ при $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$.

$$p_{11} = P(X = 0 \wedge Y = 0) = 0; \quad p_{12} = P(X = 0 \wedge Y = 1) = 0;$$

$$p_{13} = P(X = 0 \wedge Y = 2) = (0,2)^2 = 0,04; \quad p_{21} = P(X = 1 \wedge Y = 0) = 0;$$

$$p_{22} = P(X = 1 \wedge Y = 1) = 0,7 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,7 = 0,42; \quad p_{23} = P(X = 1 \wedge Y = 2) = 0;$$

$$p_{31} = P(X = 2 \wedge Y = 0) = (0,7)^2 = 0,49; \quad p_{32} = P(X = 2 \wedge Y = 1) = 0;$$

$$p_{33} = P(X = 2 \wedge Y = 2) = 0.$$

Закон розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) представимо у вигляді наступної таблиці:

Y	X		
	x_1	x_2	x_3
y_1	0	0	0,49
y_2	0	0,42	0
y_3	0,09	0	0

$$\text{Контроль: } \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_{ij} = 0,49 + 0,42 + 0,09 = 1.$$

Знаючи закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) , можна знайти закони розподілу кожної з її складових, тобто випадкових величин X та Y . Події $X = x_1 \wedge Y = y_1$, $X = x_1 \wedge Y = y_2, \dots, X = x_1 \wedge Y = y_m$ є несумісними, тому за формулою додавання ймовірностей несумісних подій отримуємо:

$$P(X = x_1) = \sum_{j=1}^m P(X = x_1 \wedge Y = y_j) = \sum_{j=1}^m p_{1j}. \text{ Аналогічно, для}$$

довільного можливого значення випадкової величини $X = x_i$ знаходимо, що

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^m P(X = x_i \wedge Y = y_j) = \sum_{j=1}^m p_{ij}. \text{ Виходячи з тих же міркувань,}$$

ймовірність того, що випадкова величина Y прийме можливе значення y_j , знаходимо за формулою $P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i \wedge Y = y_j) = \sum_{i=1}^n p_{ij}$.

Приклад 2. В умовах прикладу 1 знайти закону розподілу випадкових величин X та Y .

Розв'язання. Щоб побудувати закон розподілу дискретної випадкової величини X , за даними таблиці прикладу 1 знайдемо ймовірності $P(X = x_i)$, $i = 1, 2, 3$. Для цього знаходимо суму ймовірностей у стовбці таблиці, що відповідає значенню x_i .

$$P(X = 0) = 0 + 0 + 0,09 = 0,09, \quad P(X = 1) = 0 + 0,42 + 0 = 0,42,$$

$$P(X = 2) = 0,49 + 0 + 0 = 0,49.$$

$$\text{Контроль: } \sum_{i=1}^3 p_i = 0,09 + 0,42 + 0,49 = 1.$$

Закон розподілу дискретної випадкової величини X має вигляд:

x_i	0	1	2
p_i	0,09	0,42	0,49

Знайдемо закон розподілу дискретної випадкової величини Y . Для обчислення ймовірності $P(Y = y_j)$ знаходимо суму ймовірностей у рядку y_j .

$$P(Y = 0) = 0 + 0 + 0,49 = 0,49, \quad P(Y = 1) = 0 + 0,42 + 0 = 0,42,$$

$$P(Y = 2) = 0,09 + 0 + 0 = 0,09.$$

Закон розподілу дискретної випадкової величини Y має вигляд:

y_j	0	1	2
p_j	0,49	0,42	0,09

$$\text{Контроль: } \sum_{j=1}^3 p_j = 0,49 + 0,42 + 0,09 = 1.$$

6.3 Функція розподілу двовимірної випадкової величини

Означення. Функцією розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) називають функцію двох змінних $F(x, y) = P(X < x \wedge Y < y)$.

За означенням, значення функції $F(x, y)$ розподілу двовимірної випадкової величини у точці (x_0, y_0) дорівнює ймовірності сумісного виконання нерівностей $X < x_0$ та $Y < y_0$, тобто ймовірності потрапляння

випадкової точки (X, Y) у область $X < x_0 \wedge Y < y_0$ на координатній площині XOY .

Для дискретної двовимірної випадкової величини функція розподілу визначається формулою:

$$F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij} \quad (6.1)$$

Розглянемо основні властивості функції розподілу двовимірної випадкової величини, що випливають з її визначення.

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$.
2. $F(x, y)$ є неспадною функцією своїх аргументів, тобто при $x_2 > x_1$ $F(x_2, y) > F(x_1, y)$, при $y_2 > y_1$ $F(x, y_2) > F(x, y_1)$.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = 0$.
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_1(y)$, $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_2(x)$, де $F_1(y) = P(Y < y)$, $F_2(x) = P(X < x)$ – функції розподілу випадкових величин Y та X .
5. $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F(x, y) = 1$.

6. Ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) у півсмуго дорівнює приросту функції розподілу за одним з аргументів:

$$P(x_1 \leq X < x_2 \wedge Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y); \quad (6.2)$$

$$P(X < x \wedge y_1 \leq Y < y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1). \quad (6.3)$$

7. Ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) у прямокутник обчислюють за формулою:

$$P(x_1 \leq X < x_2 \wedge y_1 \leq Y < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \quad (6.4)$$

6.4 Щільність розподілу неперервної двовимірної випадкової величини

Неперервну двовимірну випадкову величину, крім функції розподілу $F(x, y)$, можна задати також її щільністю розподілу $f(x, y)$.

Нехай задана неперервна двовимірна випадкова величина з функцією розподілу $F(x, y)$. Знайдемо ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) у елементарний прямокутник з сторонами Δx та Δy . За формулою (6.4) знаходимо:

$$P(x \leq X < x + \Delta x \wedge y \leq Y < y + \Delta y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y).$$

Поділивши цю ймовірність на площу прямокутника з сторонами Δx та Δy , перейдемо до границі при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$. Отримаємо:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x \wedge y \leq Y < y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y)}{\Delta x \cdot \Delta y}.$$

Якщо функція $F(x, y)$ є двічі диференційованою, то права частина останньої рівності є другою змішаною похідною функції $F(x, y)$.

Означення. Функцію $f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ називають щільністю розподілу двовимірної випадкової величини з функцією розподілу $F(x, y)$.

Наведемо основні властивості щільності розподілу двовимірної випадкової величини.

$$1. f(x, y) \geq 0.$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1. \quad (6.5)$$

3. Функція розподілу $F(x, y)$ двовимірної випадкової величини виражається через її щільність розподілу $f(x, y)$ за формулою:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x_1, y_1) dx_1 dy_1. \quad (6.6)$$

4. Функції розподілу одновимірних випадкових величин X та Y , що є складовими двовимірної випадкової величини (X, Y) з щільністю розподілу $f(x, y)$, можна визначити за формулами:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \int_{-\infty}^x f(x_1, y_1) dx_1, \quad (6.7)$$

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^y f(x_1, y_1) dy_1. \quad (6.8)$$

5. Щільність розподілу одновимірних випадкових величин X та Y , що є складовими двовимірної випадкової величини (X, Y) з щільністю розподілу $f(x, y)$, можна визначити за формулами:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad (6.9)$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (6.10)$$

6. Ймовірність потрапляння двовимірної випадкової величини (X, Y) у область D координатної площини XOY знаходять за формулою:

$$P((X,Y) \in D) = \iint_D f(x,y) dx dy. \quad (6.11)$$

6.5 Основні числові характеристики двовимірної випадкової величини

Основними числовими характеристиками двовимірної випадкової величини (X,Y) є її початкові та центральні моменти. Для дискретної двовимірної випадкової величини початкові моменти ν_{ks} визначаються за формулою:

$$\nu_{ks} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^k \cdot y_j^s \cdot p_{ij}. \quad (6.12)$$

Число $p = k + s$ називають порядком моменту.

Для системи (X,Y) двох неперервних випадкових величин ця формула набуває вигляду:

$$\nu_{ks} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot y^s \cdot f(x,y) dx dy. \quad (6.13)$$

Початкові моменти першого порядку $\nu_{10} = M(X)$ та $\nu_{01} = M(Y)$ є математичними сподіваннями випадкових величин X та Y . Вони визначають на координатній площині XOY точку з координатами $(M(X), M(Y))$, яку називають центром розсіювання двовимірної випадкової величини (X,Y) .

Для обчислення центральних моментів μ_{ks} у дискретному випадку використовують формулу:

$$\mu_{ks} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - M(X))^k \cdot (y_j - M(Y))^s \cdot p_{ij}. \quad (6.14)$$

Для неперервних двовимірних випадкових величин ці показники обчислюють за формулами:

$$\mu_{ks} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^k \cdot (y - M(Y))^s \cdot f(x,y) dx dy. \quad (6.15)$$

Центральні моменти другого порядку μ_{20} та μ_{02} є дисперсіями $D(X)$ та $D(Y)$ випадкових величин X та Y . Вони характеризують розсіювання випадкової точки (X,Y) відповідно у напрямках осей OX та OY .

Центральний момент другого порядку

$$\mu_{11} = M[(X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))] \quad (6.16)$$

називають кореляційним моментом або коваріацією випадкових величин X та Y . Для нього використовують позначення μ_{xy} або $\text{cov}(x,y)$. Кореляційний момент у дискретному випадку знаходять за формулою:

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - M(X)) \cdot (y_j - M(Y)) \cdot p_{ij}. \quad (6.17)$$

Для неперервної випадкової величини маємо:

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X)) \cdot (y - M(Y)) \cdot f(x, y) dx dy. \quad (6.18)$$

Для аналізу двовимірних випадкових величин застосовують також коефіцієнт кореляції r_{xy} . Його визначають за формулою:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \quad (6.19)$$

$$\text{де } \sigma_x = \sqrt{D(X)}, \sigma_y = \sqrt{D(y)}.$$

6.6 Залежні та незалежні випадкові величини

Означення 1. Дві випадкові величини називають незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення приймає інша величина.

Теорема. Для того, щоб випадкові величини X та Y були незалежними, необхідно та достатньо, щоб функція $F(x, y)$ розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) дорівнювала добутку функцій розподілу її складових – випадкових величин X та Y :

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y). \quad (6.20)$$

Доведення. Доведемо спочатку необхідність. Нехай X та Y є незалежними випадковими величинами. Тоді події $X < x$ та $Y < y$ є незалежними, тому виконується рівність $P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y)$, тобто $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$.

Доведемо достатність. Нехай $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$. Звідси випливає, що виконується рівність $P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y)$, тобто ймовірність суміщення подій $X < x$ та $Y < y$ дорівнює добутку ймовірностей цих подій. Звідси випливає, що X та Y є незалежними випадковими величинами.

Для дискретних випадкових величин вимога цієї теореми еквівалентна вимозі виконання рівності

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j). \quad (6.21)$$

Для неперервних випадкових величин необхідна та достатня умова їх незалежності виражається рівністю

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y), \quad (6.22)$$

тобто щільність сумісного розподілу цих величин дорівнює добутку щільностей їх розподілів.

Приклад 1. Щільність розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) має вигляд:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} \sin x \cdot \sin y, & 0 \leq x \leq \pi \wedge 0 \leq y \leq \pi; \\ 0, & x < 0 \vee x > \pi \vee y < 0 \vee y > \pi. \end{cases}$$

Визначити, чи залежні між собою її складові – випадкові величини X та Y .

Розв’язання. Знайдемо щільності розподілу випадкових величин X та Y .

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin y \cdot dy = -\frac{1}{4} \sin x \cdot \cos y \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \sin x, \quad \text{де } x \in [0; \pi].$$

Якщо $x \notin [0; \pi]$, то $f_1(x) = 0$.

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin y \cdot dx = -\frac{1}{4} \sin y \cdot \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \sin y, \quad y \in [0; \pi].$$

Якщо $y \notin [0; \pi]$, то $f_2(y) = 0$.

Таким чином, щільності розподілу складових двовимірної випадкової величини (X, Y) мають вигляд:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi; \\ 0, & x \notin [0; \pi], \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin y, & 0 \leq y \leq \pi; \\ 0, & y \notin [0; \pi]. \end{cases}$$

Умова (7.22) виконана, $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, тому випадкові величини X та Y є незалежними.

Для залежних випадкових величин X та Y введемо поняття умовного закону розподілу та умовної щільності розподілу.

Означення 2. Розподіл однієї з складових двовимірної випадкової величини (X, Y) , знайдений за умови, що інша її складова прийняла певне значення, називають умовним законом розподілу.

Для двовимірної дискретної випадкової величини (X, Y) , що приймає значення (x_i, y_j) з ймовірностями p_{ij} , $i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, m$, можна знайти умовну ймовірність $P(X = x_i / Y = y_j) = P(x_i / y_j)$ того, що випадкова величина X прийме значення x_i за умови, що Y прийме значення y_j , користуючись теоремою множення ймовірностей: $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$. Звідси знаходимо,

що $P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$. З останньої рівності випливає, що

$$P(x_i / y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^n p_{ij}}. \quad (6.23)$$

Аналогічним чином отримуємо умовні ймовірності

$$P(y_j / x_i) = \frac{p_{ij}}{\sum_{j=1}^m p_{ij}}. \quad (6.24)$$

Для неперервних випадкових величин аналогічно можна визначити умовні щільності розподілу:

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}, \quad f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}. \quad (6.25)$$

Якщо випадкові величини X та Y є незалежними, то всі умовні щільності розподілу ймовірностей співпадають з безумовними, тобто виконуються рівності: $f(x/y) = f_1(x)$, $f(y/x) = f_2(y)$. Якщо умовні та безумовні щільності розподілу ймовірностей не співпадають, то випадкові величини X та Y є залежними. Для залежних випадкових величин вводяться поняття умовного математичного сподівання та умовної дисперсії.

Формули, що дозволяють обчислити умовні математичні сподівання для дискретних випадкових величин, мають вигляд:

$$\begin{aligned} M(X / y_j) &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(x_i / y_j), \\ M(y / x_i) &= \sum_{j=1}^m y_j \cdot P(y_j / x_i). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Умовне математичне сподівання для неперервних залежних випадкових величин X та Y визначають за формулами:

$$M(X / y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x/y) dx, \quad M(Y / x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(y/x) dy. \quad (6.27)$$

Умовна дисперсія у дискретному випадку має вигляд:

$$\begin{aligned} D(X / y_j) &= \sum_{i=1}^n (x_i - M(X / y_j))^2 \cdot P(x_i / y_j), \\ D(Y / x_i) &= \sum_{j=1}^m (y_j - M(Y / x_i))^2 \cdot P(y_j / x_i). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Для неперервного випадку формули для обчислення умовної дисперсії набувають вигляду:

$$\begin{aligned} D(X / y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X / y))^2 \cdot f(x/y) dx, \\ D(Y / x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M(Y / x))^2 \cdot f(y/x) dy. \end{aligned} \quad (6.29)$$

З формул, що визначають умовні математичні сподівання та умовні дисперсії, випливає, що $M(X / y) = m_x(y)$ та $D(X / y) = \sigma_x^2(y)$ є функціями змінної y , а $M(Y / x) = m_y(x)$ та $D(Y / x) = \sigma_y^2(x)$ – функціями змінної x . Якщо

система випадкових величин (X, Y) є неперервною, то ці функції є також неперервними.

Приклад 2. Щільність розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) має вигляд:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6\pi}, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1; \\ 0, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} > 1. \end{cases}$$

Визначити, чи є залежними її складові X та Y . Знайти умовні математичні сподівання та умовні дисперсії цих випадкових величин.

Розв'язання. Знайдемо щільності розподілу ймовірностей випадкових величин X та Y .

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}} \frac{dy}{6\pi} = \frac{2}{9\pi} \sqrt{9-x^2}, |x| \leq 3. \text{ При } |x| > 3 \quad f_1(x) = 0.$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}} \frac{dx}{6\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-y^2}, |y| \leq 2. \text{ При } |y| > 2 \quad f_2(y) = 0.$$

Оскільки $f(x, y) \neq f_1(x) \cdot f_2(y)$, то випадкові величини X та Y є залежними. Знайдемо їх умовні щільності розподілу ймовірностей $f(x/y)$ та $f(y/x)$. За формулами (7.25) маємо:

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{4-y^2}}, |x| \leq 3; \\ 0, |x| > 3. \end{cases}$$

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{9-x^2}}, |y| \leq 2; \\ 0, |y| > 2. \end{cases}$$

Умовні математичні сподівання знаходимо за формулами (6.27):

$$M(X/y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x/y) dx = \int_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}} \frac{x dx}{\sqrt{4-y^2}} = 0;$$

$$M(Y/x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(y/x) dy = \int_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}} \frac{y dy}{\sqrt{9-x^2}} = 0.$$

Умовні дисперсії знаходимо за формулами (6.29):

$$\begin{aligned}
D(X/y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X/y))^2 \cdot f(x/y) dx = \frac{1}{3} \int_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-y^2}} = \\
&= \frac{1}{3\sqrt{4-y^2}} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}} = \frac{3}{4}(4-y^2); \\
D(Y/x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M(Y/x))^2 \cdot f(y/x) dy = \int_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}} \frac{y^2 dy}{\sqrt{9-x^2}} = \\
&= \frac{3}{4\sqrt{9-x^2}} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}} = \frac{4}{27}(9-x^2).
\end{aligned}$$

Приклад 3. Закон розподілу дискретної двовимірної випадкової величини (X, Y) заданий таблицею. Знайти закон розподілу складових X та Y , умовні закони розподілу випадкової величини X за умови $Y=2$ та випадкової величини Y за умови $X=1$. Знайти $M(X/Y=2)$ та $M(Y/X=1)$.

X	Y			
	-1	0	1	2
1	0,1	0,25	0,3	0,15
2	0,1	0,05	0,0	0,05

Розв'язання. Випадкова величина X може приймати значення 1 та 2. Знайдемо ймовірності появи цих значень.

$$P(X=1) = 0,1 + 0,25 + 0,3 + 0,15 = 0,8;$$

$$P(X=2) = 0,1 + 0,05 + 0,0 + 0,05 = 0,2.$$

Можливими значеннями випадкової величини $Y \in -1, 0, 1, 2$. Ймовірності набуття випадковою величиною Y цих значень відповідно дорівнюють:

$$P(Y=-1) = 0,1 + 0,1 = 0,2; \quad P(Y=0) = 0,25 + 0,05 = 0,3;$$

$$P(Y=1) = 0,3; \quad P(Y=2) = 0,15 + 0,05 = 0,2.$$

Закони розподілу складових двовимірної випадкової величини (X, Y) мають наступний вигляд.

X	1	2		Y	-1	0	1	2
P	0,8	0,2		P	0,2	0,3	0,3	0,2

Умовний закон розподілу випадкової величини X за умови $Y=2$ отримаємо, поділивши ймовірності p_{ij} у стовпчику, що відповідає значенню $Y=2$, на $P(Y=2)=0,2$. Отримуємо значення умовних ймовірностей:

$$P(X = 1/Y = 2) = 0,15 : 0,2 = 0,75; P(X = 2/Y = 2) = 0,05 : 0,2 = 0,25.$$

Для отримання умовного закону розподілу випадкової величини Y за умови $X = 1$ поділимо ймовірності p_{ij} у рядку, що відповідає $X = 1$, на ймовірність $P(X = 1) = 0,8$:

$$P(Y = -1/X = 1) = 0,1 : 0,8 = 0,125, P(Y = 0/X = 1) = 0,25 : 0,8 = 0,3125;$$

$$P(Y = 1/X = 1) = 0,3 : 0,8 = 0,375; P(Y = 2/X = 1) = 0,15 : 0,8 = 0,1875.$$

Умовні закони розподілу мають вигляд:

X	1	2		Y	-1	0	1	2
$P(X/Y = 2)$	0,75	0,25		$P(Y/X = 1)$	0,125	0,3125	0,375	0,1875

За цими умовними законами розподілу знаходимо умовні математичні сподівання:

$$M(X/Y = 2) = 1 \cdot 0,75 + 2 \cdot 0,25 = 1,25,$$

$$M(Y/X = 1) = -1 \cdot 0,125 + 0 \cdot 0,3125 + 1 \cdot 0,375 + 2 \cdot 0,1875 = 0,625.$$

6.7 Корельованість випадкових величин

Для характеристики зв'язку між випадковими величинами X та Y використовують кореляційний момент μ_{xy} та коефіцієнт кореляції r_{xy} . Формули для обчислення цих показників наведені у п. 6.5 (формули (6.18) та (6.19)).

Теорема. Кореляційний момент двох незалежних випадкових величин дорівнює нулю.

Доведення. Кореляційний момент $\mu_{xy} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))]$. Оскільки X та Y є незалежними випадковими величинами, то $X - M(X)$ та $Y - M(Y)$ також є незалежними випадковими величинами. Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань, тому $\mu_{xy} = M[X - M(X)] \cdot M[Y - M(Y)]$. Оскільки, за властивістю математичного сподівання $M[X - M(X)] = M[Y - M(Y)] = 0$, то $\mu_{xy} = 0$.

З цієї теореми випливає, що коефіцієнт кореляції $r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = 0$, якщо X та Y є незалежними випадковими величинами. Можна довести, що для довільних випадкових величин X та Y $|r_{xy}| \leq 1$.

Означення. Дві випадкові величини X та Y називають корельованими, якщо їх коефіцієнт кореляції $r_{xy} \neq 0$. Якщо $r_{xy} = 0$, то випадкові величини X та Y є некорельованими.

З цього означення випливає, що будь-які корельовані випадкові величини є залежними, проте залежні випадкові величини можуть бути корельованими або некорельованими.

Нехай задано двовимірну випадкову величину (X, Y) , де X та Y є залежними випадковими величинами. Кожну з них можна розглядати як функцію іншої. Якщо $|r_{xy}| = 1$, то має місце лінійна залежність $Y = g(X) = \alpha X + \beta$. Якщо коефіцієнти α та β цієї залежності є такими, що математичне сподівання $M[Y - g(X)]$ набуває найменшого з можливих значень, то функцію $g(X) = \alpha X + \beta$ називають середньоквадратичною лінійною регресією Y на X . При цьому залежність $g(X)$ має вигляд:

$$g(X) = m_y + r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - m_x). \quad (6.30)$$

Коефіцієнт $\beta = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ називають коефіцієнтом регресії Y на X , а пряму

$$Y = m_y + r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - m_x) \quad (6.31)$$

називають прямою середньоквадратичної регресії Y на X .

Рівняння прямої середньоквадратичної регресії X на Y має вигляд:

$$X = m_x + r_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (Y - m_y) \quad (6.32)$$

Величину $r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ у рівнянні (6.32) називають коефіцієнтом регресії X на Y .