**Лекція 3 Відображення та функції. Представлення функцій в ЕОМ**

Під *відображенням* з множини *А* у множину *В* розуміють всяке бінарне відношення *f* з *А* в *В*, яке задовольняє умову:

.

Якщо крім цього виконується умова , то *f* називається *всюду визначеним відображенням* або *функцією*.

Якщо *f -* функція, то замість  пишуть  або .

**Представлення функцій в ЕОМ.**

Нехай  є функцією одного аргументу, причому *А* скінченна множина (тобто ) і «не дуже велика».

Найбільш загальним представленням такої функції є масив **array [A] of B**, де *А* – тип данних, які представляють елементи множини *А*, а *В* - тип данних, які представляють елементи множини *В*. Якщо середа програмування допускає лише масиви з натуральними індексами, тоді елементи множини *А* нумеруються:  і функція представляється у вигляді масиву **array [1,2,…,n] of B**.

Функція кількох аргументів представляється багатовимірним масивом.

Представлення функції за допомогою масиву є ефективним (за кількістю часу), оскільки реалізація масиву частіше всього вимагає сталого часу, не залежить від розміру масиву.

У випадку «великої» або нескінченої множини *А* цей спосіб стає неефективним з точки зору економії пам’яті. В цьому випадку в деяких мовах програмування означення функції вводяться ключовим словом **function.**

***Ми зупинимось лише на фкнкціях зі скінченою областю визначення, а саме на булевих функціях****.*

**Означення** Нехай задано множину . *Булевою функцією* від ** змінних називається відображення .

Отже, областю визначення булевої функції є множина всіх -вимірних булевих векторів, а областю значення – множина . Позначають . *Областю істинності булевої функції* називається множина -вимірних булевих векторів з області визначення, на яких функція приймає значення 1.

**Теорема** Число всіх булевих функцій від  змінних дорівнює .

При  кількість булевих функцій дорівнює 16

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **0011**  **0101** | **Позначення (формула)** | **Назва** |
|  | 0000 | 0 | Константа 0 |
|  | 0001 |  | Кон’юнкція |
|  | 0010 |  | Заперечення імплікації |
|  | 0011 |  | Проекція на перший елемент |
|  | 0100 |  | Заперечення оберненої імплікації |
|  | 0101 |  | Проекція на другий елемент |
|  | 0110 |  | Сума за модулем 2 |
|  | 0111 |  | Диз’юнкція |
|  | 1000 |  | Стрілка Пірса (заперечення диз’юнкції) |
|  | 1001 |  | Еквіваленція |
|  | 1010 |  | Заперечення на другий елемент |
|  | 1011 |  | Обернена імплікація |
|  | 1100 |  | Заперечення на перший елемент |
|  | 1101 |  | Імплікація |
|  | 1110 |  | Штрих Шеффера (заперечення кон’юнкції) |
|  | 1111 | 1 | Константа 1 |

**Зауваження.** В таблиці істинності булевої функції всі –вимірні булеві вектори з області її визначення завжди треба розташовувати в лексикографічному порядку, тобто так, щоб вони відповідали послідовності десяткових чисел від 0 до . Ці десяткові числа будемо називати номерами булевих векторів у разі необхідності. Зрозуміло, що лише за такої домовленості має сенс поняття «вектор значень булевої функції».

**Досконалі нормальні форми булевої функції**

**Означення** *Конституентою* 1 (*конституентою* 0) булевої функції  називається будь-яка елементарна кон’юнкція (елементарна диз’юнкція) довжини .

**Приклад** Для функції  елементарна кон’юнкція  є конституантою 1, а для функції  ні. Для функції  елементарна диз’юнкція  не є конституентою 0.

**Наслідок.** Число різних конституент 1 булевої функції від  змінних дорівнює .

**Означення** *Досконалою диз’юнктивною нормальною формою* *(ДДНФ)* булевої функції від  змінних називається диз’юнкція тих її конституент 1, які відповідають булевим векторам з області істинності цієї функції.

**Приклади** досконалих ДНФ:

1. ;
2. ;
3. .

**Теорема** Для кожної булевої функції, відмінної від константи 0, існує єдина ДДНФ.

**Означення** *Досконалою кон’юнктивною нормальною формою* *(ДКНФ)* булевої функції від  змінних називається кон’юнкція тих її конституент 0, які відповідають булевим векторам, що не входять в область істинності.

**Приклади** досконалих КНФ:

1. ;
2. ;
3. .

**Теорема** Для кожної булевої функції від  змінних, відмінної від константи 1, існує єдина ДКНФ.

**Алгоритм побудови ДДНФ (ДКНФ) за таблицею істинності.**

1) Виділити булеві вектори, на яких функція приймає значення 1 (значення 0);

2) Записати відповідні цим векторам конституенти 1 (конституенти 0);

3) Записати диз’юнкцію (кон’юнкцію) отриманих конституент 1 (конституент 0).

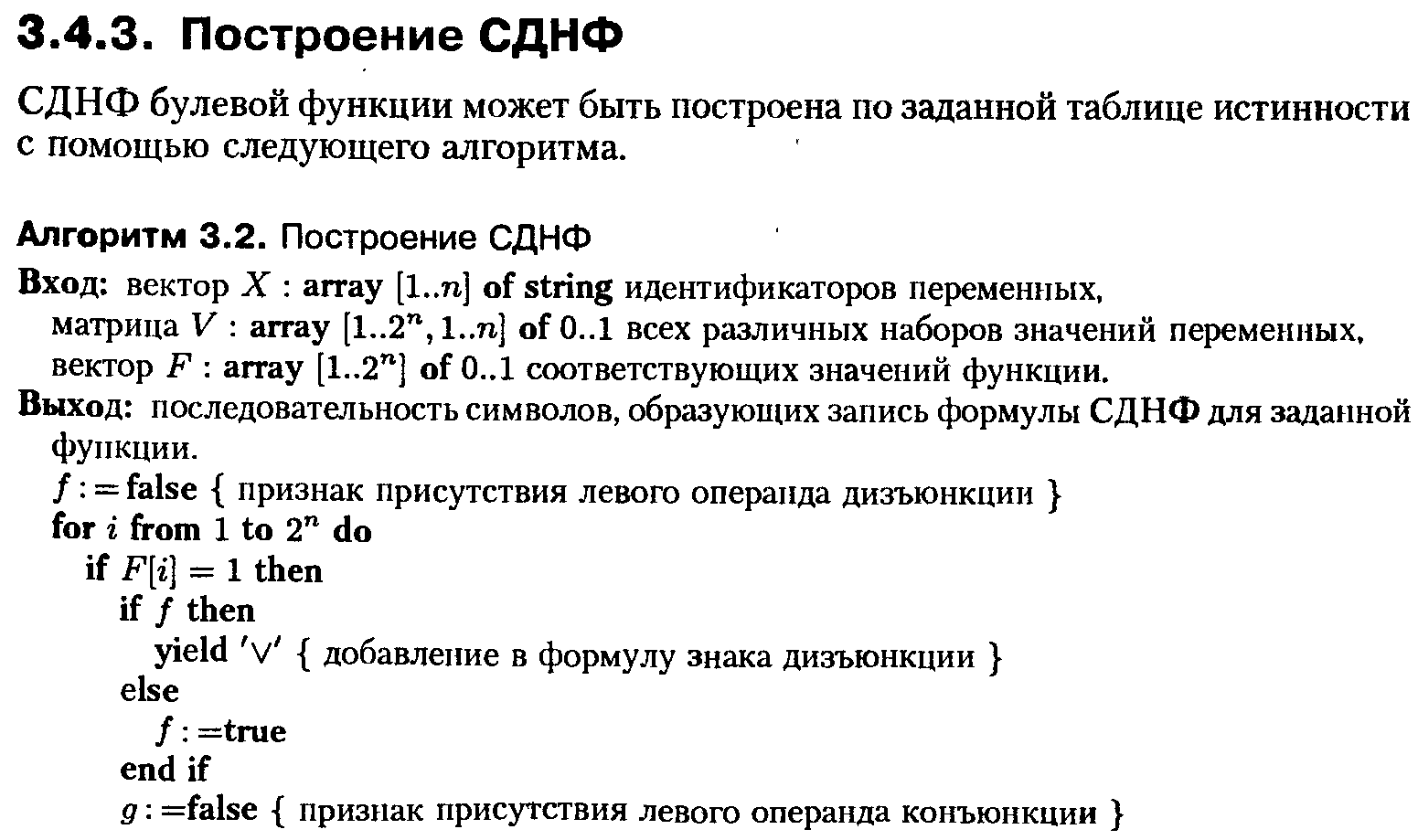
**Приклад** Нехай булева функція  задана вектором значень . Побудуємо її таблицю істинності в явному вигляді, вказавши для кожного набору, при якому  набуває значення 1, відповідну конституенту одиниці, а для кожного набору, при якому  набуває значення 0, – відповідну конституенту нуля.

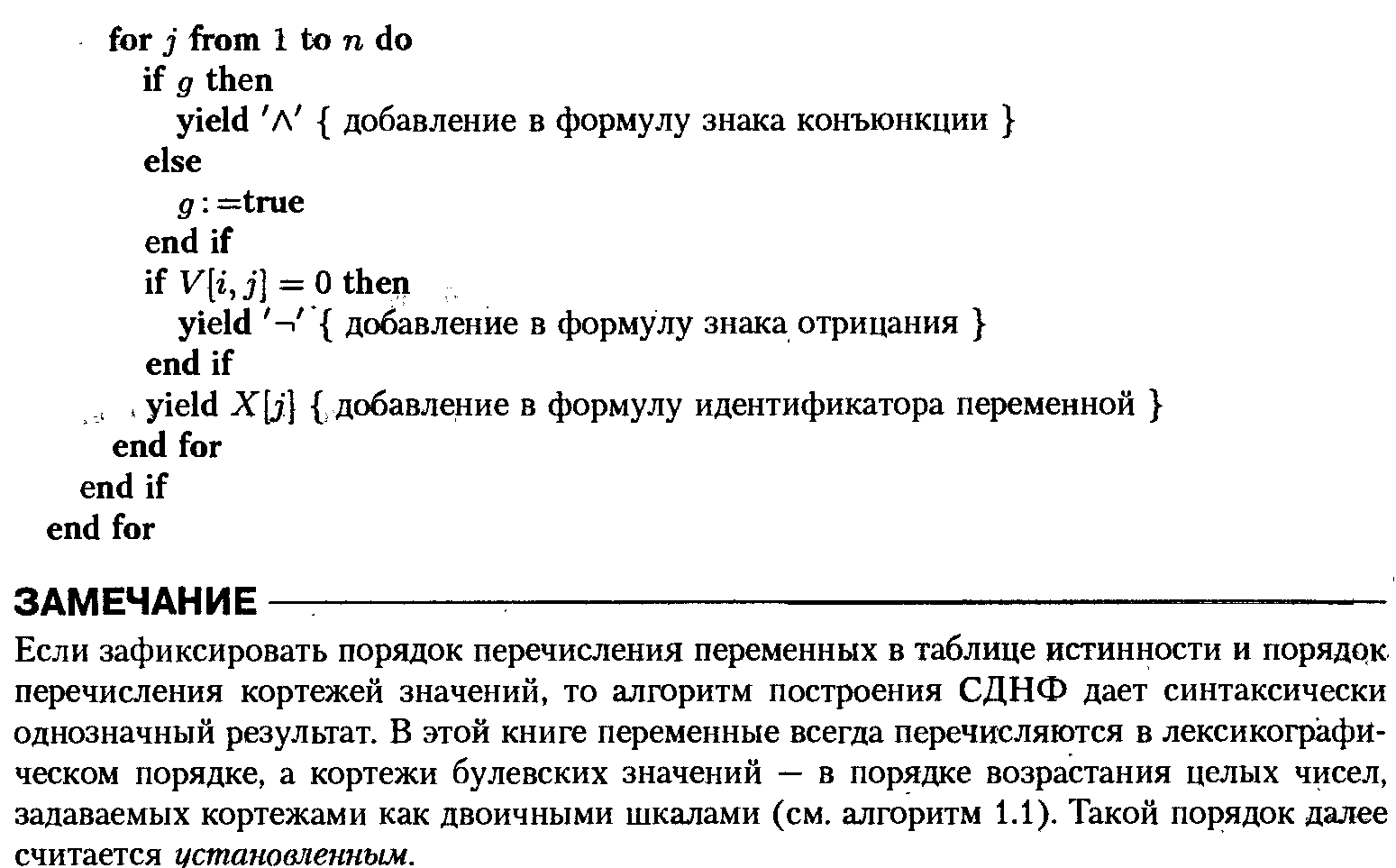
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | **Конституенти одиниці** | **Конституенти нуля** |
| 0 | 0 | 0 | 1 |  |  |
| 0 | 0 | 1 | 1 |  |  |
| 0 | 1 | 0 | 1 |  |  |
| 0 | 1 | 1 | 0 |  |  |
| 1 | 0 | 0 | 0 |  |  |
| 1 | 0 | 1 | 1 |  |  |
| 1 | 1 | 0 | 0 |  |  |
| 1 | 1 | 1 | 1 |  |  |

Тепер можна виписати ДДНФ як диз’юнкцію конституент одиниці та ДКНФ як кон’юнкцію конституент нуля:

ДДНФ: ;

ДКНФ: .





**Поліном Жегалкіна. Поняття лінійної булевої функції**

Будемо розглядати лише такі елементарні кон’юнкції, в яких відсутні заперечення змінних (іноді їх називають *монотонними*). Константу 1 теж будемо вважати такою кон’юнкцією.

**Означення** *Поліномом Жегалкіна* булевої функції називається формула виду , де  та  - монотонні елементарні кон’юнкції.

**Наведемо список деяких логічних законів для операції** 

1.  - асоціативність;
2.  - комутативність;
3. ,
4. ,
5.  - дистрибутивність;
6. ,
7. .

**Теорема** Для будь-якої булевої функції існує, причому єдиний, поліном Жегалкіна.

Існує кілька *методів* знаходження поліному Жегалкіна:

1. Безпосереднє перетворення формули за допомогою законів логіки (корисними будуть наведені вище закони 1)-7)),
2. Заміною символу  в ДДНФ булевої функції символом ,
3. Методом невизначених коефіцієнтів.

**Задача.** Побудувати поліном Жегалкінабулевої функції ** за допомогою ДДНФ.

**Розв’язання.** Спочатку треба звести булеву функцію ** до ДДНФ. Задана формула є ДНФ. Доповнимо другу та третю елементарні кон’юнкції до конституент одиниці

**.

Після застосування законів ідемпотентності отримаємо ДДНФ у вигляді **.

Наступний крок – в отриманій ДДНФ знаки диз’юнкції замінити знаком ** операції додавання по модулю 2 і позбутись заперечень за допомогою логічного закону

.

Отримаємо

**.

Залишилось застосувати логічні закони

;

.

Отже, ** - поліном Жегалкіна заданої функції.