

Дисперсійний аналіз економетричної моделі

Побудова економетричної моделі на основі покрокової регресії

Оцінювання параметрів економетричної моделі та її дисперсійний аналіз становлять загальний процес побудови моделі. Поєднанням цих дій було створено альтернативний метод оцінювання параметрів моделі 1МНК, що базується на елементах дисперсійного аналізу.

Згідно з елементарним тлумаченням взаємозв'язку між двома змінними за 1МНК, як правило, акцентують увагу на коефіцієнтах кореляції. При цьому неважко показати, що

$$\hat{a}_1 = r_{yx} \frac{\sigma_y}{\sigma_x},$$

де r_{yx} — парний коефіцієнт кореляції між y та x ; σ_y — середньоквадратичне відхилення залежної змінної; σ_x — середньоквадратичне відхилення незалежної змінної.

Отже, оцінка параметрів моделі прямо пропорційна до коефіцієнта парної кореляції. Аналогічні співвідношення виконуються і в загальному випадку.

А це означає, що оцінити параметри моделі можна через коефіцієнти кореляції: спочатку оцінити тісноту зв'язку між кожною парою змінних, а потім знайти оцінки параметрів економетричної моделі.

Залежність оцінок параметрів економетричної моделі та коефіцієнтів парної кореляції покладено в основу алгоритму покрокової регресії.

Опишемо цей алгоритм.

Крок 1. Усі вихідні дані змінних стандартизують (нормалізують):

$$y_i^* = \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y}; \quad x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_{x_j}}, \quad (4.27)$$

де y_i^* — значення нормалізованої залежної змінної; x_{ij}^* — значення нормалізованих пояснювальних змінних; $\bar{x}_j$ — середнє

значення j -ї пояснювальної змінної; $\bar{y}$ — середнє значення залежної змінної; σ_y, σ_{x_j} — середньоквадратичні відхилення.

При цьому середні значення $\bar{x}_j^*$ і $\bar{y}^*$ дорівнюють нулю, а дисперсії — одиниці.

Крок 2. Знаходять кореляційну матрицю (матриця парних коефіцієнтів кореляції):

$$r^* = \begin{pmatrix} r_{yy} & r_{yx_1} & r_{yx_2} & r_{yx_3} & \dots & r_{yx_m} \\ r_{x_1y} & r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & r_{x_1x_3} & \dots & r_{x_1x_m} \\ r_{x_2y} & r_{x_2x_1} & r_{x_2x_2} & r_{x_2x_3} & \dots & r_{x_2x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_my} & r_{x_mx_1} & r_{x_mx_2} & r_{x_mx_3} & \dots & r_{x_mx_m} \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

де r_{yx_j} — парні коефіцієнти кореляції між залежною і пояснювальними змінними;

$r_{x_jx_k}$ — парні коефіцієнти кореляції між пояснювальними змінними.

$$r_{yx_j} = \frac{\sum (y_i - \bar{y})(x_{ij} - \bar{x}_j)}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_j} \cdot (n-1)},$$

або

$$r_{yx_j} = \frac{1}{n-1} y^* x_j^*,$$

де n — кількість спостережень;

$$r_{x_kx_j} = \frac{\sum (x_{ik} - \bar{x}_k)(x_{ij} - \bar{x}_j)}{\sigma_{x_k} \cdot \sigma_{x_j} \cdot (n-1)},$$

або

$$r_{x_kx_j} = \frac{1}{n-1} x_k^* x_j^*.$$

Крок 3. Порівнюючи абсолютні значення r_{yx_j} , вибирають $\max\{|r_{yx_j}|\}$. Найбільше $|r_{yx_j}|$ вказує на ту пояснювальну змінну,

яка найтісніше пов'язана з у. За допомогою ІМНК знаходять оцінку параметрів цієї моделі:

$$\hat{y}^* = \hat{\beta} x_j^*, \quad (4.29)$$

де $\hat{\beta}$ — оцінка параметрів моделі, яка будується на основі нормалізованих даних.

Крок 4. Серед тих, що залишилися, значень r_{yx_j} вибирають $\max\{|r_{yx_j}|\}$ і в модель вводять наступну незалежну змінну x_l :

$$\hat{y}^* = \hat{\beta}_1 x_j^* + \hat{\beta}_2 x_l^*$$

і т. д.

Якщо немає обмеження на введення в економетричну модель кожної наступної пояснювальної змінної, то обчислення виконуються доти, доки поступово не будуть введені в модель усі змінні.

Сума квадратів залишків така:

$$f(\beta_j) = \sum_{i=1}^n u_i^{*2} = \sum_{i=1}^n (y_i^* - \hat{y}_i^*)^2.$$

Звідси мінімізації підлягає функція

$$f(\hat{\beta}_j) = \sum_{i=1}^n (Y^* - \hat{\beta}_1 X_1^* - \hat{\beta}_2 X_2^* - \hat{\beta}_3 X_3^* - \dots - \hat{\beta}_m X_m^*)^2 \rightarrow \min.$$

Узявши похідну за кожною невідомою оцінкою параметра $\hat{\beta}_j$ цієї функції і прирівнявши всі здобуті похідні до нуля, дістанемо систему нормальних рівнянь.

Система нормальних рівнянь для знаходження параметрів моделі $\hat{\beta}_j$ у загальному вигляді запишеться так:

$$\begin{cases} r_{yx_1} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 r_{x_2 x_1} + \hat{\beta}_3 r_{x_3 x_1} + \dots + \hat{\beta}_m r_{x_m x_1}; \\ r_{yx_2} = \hat{\beta}_2 r_{x_1 x_2} + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 r_{x_3 x_2} + \dots + \hat{\beta}_m r_{x_m x_2}; \\ r_{yx_3} = \hat{\beta}_1 r_{x_1 x_3} + \hat{\beta}_2 r_{x_2 x_3} + \hat{\beta}_3 + \dots + \hat{\beta}_m r_{x_m x_3}; \\ \vdots \\ r_{yx_m} = \hat{\beta}_1 r_{x_1 x_m} + \hat{\beta}_2 r_{x_2 x_m} + \hat{\beta}_3 r_{x_3 x_m} + \dots + \hat{\beta}_m. \end{cases}$$

Позначимо матрицю парних коефіцієнтів кореляції між пояснювальними змінними через r_{xx} , а вектор парних коефіцієнтів кореляції між залежною і пояснювальними

змінними — через r_{yx} . Тоді система нормальних рівнянь набере вигляду $r_{xx}\hat{\beta} = r_{yx}$, а оператор оцінювання параметрів запишеться так:

$$\hat{\beta} = r_{xx}^{-1}r_{yx}. \quad (4.30)$$

Оскільки всі змінні нормалізовані, то оцінки параметрів $\hat{\beta}_j$ показують порівняльну силу впливу кожної незалежної змінної на залежну: чим більше за модулем значення оцінки параметра $\hat{\beta}_j$, тим сильніше впливає j -та змінна на результат.

Зв'язок між оцінками параметрів моделі на основі нормалізованих і ненормалізованих змінних набере вигляду:

$$\begin{aligned} \hat{a}_j &= \hat{\beta}_j \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_j}} \quad (j = \overline{1, m-1}), \\ \hat{a}_0 &= \bar{y} - \sum_j \hat{a}_j \bar{x}_j. \end{aligned} \quad (4.31)$$

✓ **Приклад 4.6.** На основі статистичної інформації, наведеної у табл. 4.2 (приклад 4.2), необхідно побудувати економетричну модель прибутку методом 1МНК, використовуючи алгоритм покрокової регресії.

Розв'язання. Нормалізуємо вихідні дані табл. 4.2 за формулами:

$$y_i^* = \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y}; \quad x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_{x_j}}.$$

Згідно з цими формулами необхідно мати середні значення змінних та їх стандартні відхилення.

Середні значення:

$$\bar{y} = 50,6; \quad \bar{x}_1 = 76,1; \quad \bar{x}_2 = 7,60; \quad \bar{x}_3 = 120,9.$$

Середньоквадратичні відхилення:

$$\sigma_y = 7,92; \quad \sigma_{x_1} = 11,52; \quad \sigma_{x_2} = 7,60; \quad \sigma_{x_3} = 10,98.$$

Матриці нормалізованих змінних:

$$Y^* = \begin{pmatrix} -1,47 \\ -1,21 \\ -1,59 \\ -1,09 \\ -0,83 \\ -0,20 \\ -0,83 \\ -0,71 \\ -0,33 \\ 0,05 \\ -0,20 \\ 0,43 \\ 0,56 \\ 0,81 \\ 0,68 \\ 0,43 \\ 1,06 \\ 1,31 \\ 1,44 \\ 1,69 \end{pmatrix}; \quad X^* = \begin{pmatrix} -1,22 & -1,43 & -1,53 \\ -0,96 & -1,03 & -1,08 \\ -1,66 & -2,08 & -1,99 \\ -0,88 & -0,77 & -0,63 \\ -0,62 & -0,64 & -0,45 \\ -1,57 & -1,69 & -0,99 \\ -0,36 & -0,11 & -0,17 \\ -0,53 & -0,37 & -0,45 \\ -0,10 & 0,15 & -0,63 \\ 0,25 & 0,28 & -0,08 \\ 0,08 & 0,02 & 0,28 \\ 0,51 & 0,55 & -0,17 \\ 0,34 & 0,55 & 0,74 \\ -0,10 & 0,81 & 0,74 \\ 0,60 & 0,68 & 1,01 \\ 0,43 & 0,41 & 0,83 \\ 0,95 & 0,94 & 0,28 \\ 1,38 & 1,20 & 1,19 \\ 1,64 & 1,33 & 1,47 \\ 1,81 & 1,20 & 1,65 \end{pmatrix}.$$

1. Побудуємо матрицю парних коефіцієнтів кореляції для всіх змінних моделі:

$$r^* = \begin{pmatrix} 1 & 0,909 & 0,898 & 0,913 \\ 0,99 & 1 & 0,953 & 0,913 \\ 0,898 & 0,953 & 1 & 0,924 \\ 0,913 & 0,913 & 0,924 & 1 \end{pmatrix}; \quad r_{yx} = \begin{pmatrix} 0,909 \\ 0,898 \\ 0,913 \end{pmatrix}.$$

Діагональні елементи цієї матриці є коефіцієнтами парної кореляції однойменних змінних, тому вони дорівнюють одиниці. Коефіцієнти кореляції першого рядка та першого стовпця матриці характеризують тісноту зв'язку пояснювальних змінних із залежною.

Решта коефіцієнтів кореляції цієї матриці характеризує тісноту зв'язку пояснювальних змінних між собою попарно.

Оскільки всі коефіцієнти парної кореляції наближаються до одиниці, то можна стверджувати наявність тісного зв'язку між прибутком (залежною змінною) та ресурсами: інвестиціями, основними фондами та фондом робочого часу, а також між кожною парою ресурсів (пояснювальними змінними).

2. Побудуємо економетричну модель прибутку на основі нормалізованих даних, включивши до неї лише фонд робочого

часу, оскільки цей показник має найбільший коефіцієнт парної кореляції із залежною змінною (прибутком). У результаті маємо:

$$\begin{aligned}\hat{Y}^* &= \hat{\beta}_3 X_3^*; \\ \hat{Y}^* &= 0,913 X_3^*.\end{aligned}\quad (4.32)$$

3. Далі серед двох інших пояснювальних змінних вищий коефіцієнт парної кореляції із залежною змінною має змінна X_1 (інвестиції), тому на наступному кроці введемо її додатково в побудовану парну модель:

$$\begin{aligned}\hat{Y}^* &= \hat{\beta}_3 X_3^* + \hat{\beta}_1 X_1^*; \\ \hat{Y}^* &= 0,501 X_3^* + 0,451 X_1^*.\end{aligned}\quad (4.33)$$

4. Побудувавши економетричну модель і включивши до неї і третю пояснювальну змінну (основні виробничі фонди), у результаті дістанемо:

$$\begin{aligned}\hat{Y}^* &= \hat{\beta}_3 X_3^* + \hat{\beta}_1 X_1^* + \hat{\beta}_2 X_2^*; \\ \hat{Y}^* &= 0,482 X_3^* + 0,412 X_1^* + 0,050 X_2^*.\end{aligned}\quad (4.34)$$

Оскільки всі змінні цієї моделі нормалізовані (мають однакові одиниці вимірювання — стандартні відхилення), то оцінки параметрів моделі (4.34) характеризують порівняльну силу впливу кожного з чинників на прибуток. Отже, найбільше впливає на прибуток фонд робочого часу X_3 , потім — розмір інвестицій X_2 , а потім — основні виробничі фонди X_1 .

Від даної економетричної моделі на основі нормалізованих змінних легко перейти до моделі, побудованої на основі вихідних даних в абсолютних показниках виміру (див. табл. 4.2):

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1 &= \hat{\beta}_1 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}}; \quad \hat{\alpha}_2 = \hat{\beta}_2 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}}; \quad \hat{\alpha}_3 = \hat{\beta}_3 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_3}}; \\ \hat{\alpha}_0 &= \bar{y} - \sum_{j=1}^3 \hat{\alpha}_j \bar{x}_j = \bar{y} - \hat{\alpha}_1 \bar{x}_1 - \hat{\alpha}_2 \bar{x}_2 - \hat{\alpha}_3 \bar{x}_3; \\ \hat{\alpha}_1 &= 0,412 \frac{7,92}{11,52} = 0,28; \quad \hat{\alpha}_2 = 0,059 \frac{7,92}{7,60} = 0,06; \\ \hat{\alpha}_3 &= 0,482 \frac{7,92}{10,98} = 0,35;\end{aligned}\quad (4.35)$$

$$\hat{\alpha}_0 = 50,6 - 0,28 \cdot 76,1 - 0,06 \cdot 32,85 - 0,35 \cdot 120,9 = -15,01.$$

Звідси маємо економетричну модель прибутку, яку було побудовано в прикладі 4.2:

$$\hat{Y} = -15,01 + 0,28X_1 + 0,06X_2 + 0,35X_3.$$

Побудова економетричної моделі на основі алгоритму покрокової регресії дає змогу дослідникові запобігати певним помилкам специфікації моделі, коли можна обґрунтовано включити до економетричної моделі лише ті показники, які найтісніше пов'язані з результативною ознакою.

4.10. Коефіцієнти детермінації і кореляції

Коефіцієнти детермінації та кореляції є кількісними характеристиками, за якими можна зробити висновок про те, наскільки побудована економетрична модель узгоджується з емпіричною інформацією, на підставі якої її побудовано. Тобто на основі цих коефіцієнтів можна зробити загальні висновки щодо достовірності економетричної моделі.

Щоб дати метод їх розрахунку, необхідно показати, що варіація залежної змінної $\hat{Y}$ навколо свого вибіркового середнього значення $\bar{y}$ може бути розкладена на дві складові:

1) варіацію розрахункових значень $\hat{Y}$ навколо середнього значення $\bar{y}$;

2) варіацію розрахункових значень $\hat{Y}$ навколо фактичних Y .
Необхідні в цьому разі обчислення зведемо в табл. 4.4.

Таблиця 4.4

Джерело варіації	Сума квадратів відхилень	Ступені свободи	Середнє квадратів відхилень або дисперсія
$x_1, x_2, x_3 \dots x_m$	$\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat{A}'X'Y$	$m - 1$	$\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{m - 1} = \frac{A'X'Y}{m - 1} = \sigma_p^2$
Залишки u	$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = u'u$	$n - m$	$\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m} = \frac{u'u}{n - m} = \sigma_u^2$

Загальна варіація	$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = Y'Y$	$n-1$	$\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1} = \frac{Y'Y}{n-1} = \sigma_y^2$
-------------------	--	-------	---

Зауважимо, що всі змінні вектора Y , і матриці X взяті як відхилення від свого середнього значення.

Використаємо середні квадратів відхилень (дисперсії) (див. табл. 4.2) і запишемо формулу для обчислення коефіцієнта детермінації:

$$R^2 = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_u^2}{\sigma_y^2} = 1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_y^2}$$

або в матричному вигляді:

$$R^2 = \frac{\hat{A}'X'Y}{m-1} : \frac{Y'Y}{n-1} = \frac{\hat{A}'X'Y}{Y'Y} \cdot \frac{n-1}{m-1}. \quad (4.36)$$

Без урахування ступенів свободи коефіцієнт детермінації подається так:

$$\bar{R}^2 = \frac{\hat{A}'X'Y}{Y'Y}. \quad (4.37)$$

Оскільки в (4.36) задано незміщені оцінки дисперсії з урахуванням кількості ступенів свободи, то коефіцієнт детермінації може зменшуватись з уведенням у модель нових пояснювальних змінних. Водночас для коефіцієнта детермінації, обчисленого без урахування поправки на кількість ступенів свободи $(n-1)(n-m)$ (4.37), коефіцієнт детермінації зростатиме. Залежність між цими двома коефіцієнтами можна подати так:

$$R^2 = 1 - \left(\frac{n-1}{n-m} \right) (1 - \bar{R}^2), \quad (4.38)$$

де R^2 — коефіцієнт детермінації з урахуванням кількості ступенів свободи; $\bar{R}^2$ — коефіцієнт детермінації без урахування кількості ступенів свободи.

Для функції з двома і більше пояснювальними змінними коефіцієнт детермінації може набувати значень на множині $\bar{R}^2 \in]0,1[$. Числове значення коефіцієнта детермінації

характеризує, **якою мірою варіація залежної змінної Y визначається варіацією незалежних змінних**. Чим ближчий він до одиниці, тим більше варіація залежної змінної визначається варіацією незалежних змінних.

Множинний коефіцієнт кореляції

$$R = \sqrt{R^2}.$$

Він характеризує тісноту зв'язку всіх пояснювальних змінних із залежною.

Для множинного коефіцієнта кореляції з урахуванням і без урахування кількості ступенів свободи характерна така сама зміна числового значення, як і для коефіцієнта детермінації.

Зауважимо, що не варто абсолютизувати високе значення R^2 , бо коефіцієнт детермінації може бути близьким до одиниці через те, що досліджувані показники (змінні) в моделі мають чітко виражений часовий тренд, який не стосується причинно-наслідкових зв'язків. В економіці, як правило, такий тренд мають обсягові показники, подані в абсолютних одиницях. Наприклад, валовий внутрішній продукт, валовий національний продукт, дохід, фонд споживання і т. ін. Тому у світовій економічній практиці для побудови економетричної моделі на основі часових рядів найчастіше використовують або відносні показники, або ж відхилення їх від своєї середньої, або абсолютні прирости (перші, другі, треті різниці).

Природно постає запитання про те, яке значення R^2 можна вважати задовільним. Визначимо, що межу статичної значущості R^2 для всіх випадків відразу вказати неможливо. Необхідно звертати увагу на обсяг вибіркової сукупності спостережень, кількість пояснювальних змінних, наявність трендів та змістовну інтерпретацію кількісних характеристик зв'язку.

✓ **Приклад 4.7.** Порівняємо коефіцієнти кореляції і детермінації для різних економетричних моделей (табл. 4.5), побудованих для вихідних даних, які наведено в табл. 4.2 (приклад 4.2), на основі покрокової регресії.

Таблиця 4.5

Економетрична модель	$\bar{R}^2$ без урахуван ня кількості ступенів свободи	R^2 з урахуван ням кількості ступенів свободи	$\bar{R}$ без урахуван ня кількості ступенів свободи	R з урахуван ням кількості ступенів свободи
----------------------	--	---	--	---

$\hat{Y} = -28,96 + 0,66X_3$	0,833	0,801	0,913	0,895
$\hat{Y} = -20,63 + 0,23X_1 + 0,09X_3$	0,867	0,842	0,931	0,918
$\hat{Y} = -15,01 + 0,36X_3 + 0,28X_1 + 0,06X_2$	0,868	0,843	0,932	0,918

Розглядаючи табл. 4.5, доходимо висновку, що з додатковим введенням нової пояснювальної змінної коефіцієнти детермінації $\bar{R}^2$ і кореляції $\bar{R}$ без урахування кількості ступенів свободи збільшуються. Ці самі характеристики з урахуванням кількості ступенів свободи для другої моделі, яка має дві пояснювальні змінні, зростають, а для третьої — з трьома пояснювальними змінними — практично не змінюються. Тобто для третьої моделі в результаті введення додаткової змінної зменшення величини $1 - R^2$ не зможе компенсувати збільшення $(n-1)/(n-m)$. Зауважимо, що коефіцієнти детермінації і кореляції без урахування кількості ступенів свободи мають більші числові значення, ніж з урахуванням цієї кількості.

Коефіцієнти детермінації для кожного з рівнянь показують, на скільки відсотків варіація залежної змінної визначається варіацією пояснювальних змінних. Так, для першого рівняння варіація прибутку на 80,1 % залежить від варіації фонду робочого часу, для другого — на 84,2 % від інвестицій та фонду робочого часу, для третього — на 83,3 % від трьох змінних.

Розглянемо альтернативний спосіб обчислення коефіцієнтів детермінації і кореляції, коли система нормальних рівнянь будується на основі коефіцієнтів парної кореляції r .

У такому разі оцінку параметрів моделі можна записати:

$$\hat{a}_j = -\frac{\hat{\sigma}_y}{\hat{\sigma}_{x_j}} \cdot \frac{R_{1j}}{R_{11}}, \quad (4.39)$$

де R_{kj} — алгебраїчне доповнення матриці r до елемента r_{kj} ; R_{11} — алгебраїчне доповнення до елемента r_{11} матриці коефіцієнтів парної кореляції.

Сума квадратів відхилень (залишків) також може бути виражена через алгебраїчне доповнення матриці r :

$$\sum_{i=1}^n u_i^2 = \frac{n \hat{\sigma}_y^2 |r|}{R_{11}}, \quad (4.40)$$

де $|r|$ — визначник кореляційної матриці. А це, у свою чергу, дає нам альтернативний вираз для коефіцієнта детермінації:

$$R^2 = 1 - \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\hat{\sigma}_y^2} = 1 - \frac{|r|}{R_{11}}. \quad (4.41)$$

Ще один альтернативний метод розрахунку коефіцієнтів детермінації на основі матриці r можна подати у вигляді

$$R^2 = \hat{\beta}_1 r_{yx_1} + \hat{\beta}_2 r_{yx_2} + \hat{\beta}_3 r_{yx_3} + \dots + \hat{\beta}_m r_{yx_m}. \quad (4.42)$$

Звідси коефіцієнт кореляції

$$R = \sqrt{\hat{\beta}_1 r_{yx_1} + \hat{\beta}_2 r_{yx_2} + \hat{\beta}_3 r_{yx_3} + \dots + \hat{\beta}_m r_{yx_m}}. \quad (4.43)$$

4.11. Частинні коефіцієнти кореляції та коефіцієнти регресії

Частинні коефіцієнти кореляції так само, як і парні, характеризують тісноту зв'язку між двома змінними. Але на відміну від парних частинні коефіцієнти характеризують тісноту зв'язку за умови, що решта змінних сталі.

Можна дістати спрощений вираз для розрахунку коефіцієнта частинної кореляції, обравши інший спосіб інтерпретації цього коефіцієнта. Для випадку простої регресії двох змінних маємо

$$r_{xy}^2 = \frac{(\sum x_i y_i)^2}{(\sum x_i)^2 (\sum y_i)^2} = a_{y/x} a_{x/y},$$

де $a_{y/x}$ характеризує коефіцієнт при X у рівнянні $Y = f(X)$, а $a_{x/y}$ — коефіцієнт при Y в рівнянні $X = f(Y)$. Отже, квадрат коефіцієнта парної кореляції дорівнює добутку двох наведених коефіцієнтів. Коефіцієнт частинної кореляції можна визначити аналогічно. Наприклад, розглянемо два регресійні рівняння, коли $x_1 = \text{const}$.

$$Y = f(X_2, X_3); \quad X_2 = f(Y, X_3).$$

Нехай в цих рівняннях X_3 дорівнює деякій довільній величині c , тоді член, який відповідає змінній X_3 , збігатиметься з вільним

членом, а отже, дістанемо дві прості регресії, які відбивають загальну зміну y_i , x_{j_2} на площині $X_3 = c$. Оскільки модель є лінійною, то коефіцієнти регресії $X_2 = f(Y)$ і $Y = f(X_2)$ лишаються незмінними при різних значеннях c , тобто можна стверджувати: квадрат коефіцієнта частинної кореляції між Y і X_2 дорівнює добутку коефіцієнтів при X_2 і Y у двох множинних регресіях.

Згідно з (4.44) запишемо ці рівняння у вигляді

$$\hat{Y} = -\frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}} \frac{R_{12}}{R_{11}} X_2 - \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_3}} \frac{R_{13}}{R_{11}} X_3;$$

$$\hat{X}_2 = -\frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_y} \frac{R_{21}}{R_{22}} Y - \frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_{x_3}} \frac{R_{23}}{R_{22}} X_3,$$

де R_{kj} — алгебраїчні доповнення до елемента r_{kj} матриці r .
Звідси

$$r_{12,3}^2 = \frac{R_{12}^2}{R_{11}R_{22}}. \quad (4.44)$$

Для знаходження частинного коефіцієнта кореляції змінної Y з X_2 за умови, що змінна X_3 стала, достатньо взяти добуток параметрів при X_2 і Y у наведених щойно рівняннях з протилежним знаком.

Аналогічно

$$r_{23,1}^2 = \frac{R_{23}^2}{R_{22}R_{33}}.$$

Тоді частинні коефіцієнти кореляції будуть такі:

$$r_{12,3} = -\frac{R_{12}}{\sqrt{R_{11}R_{22}}}; \quad r_{13,2} = -\frac{R_{13}}{\sqrt{R_{11}R_{33}}}; \quad r_{23,1} = -\frac{R_{23}}{\sqrt{R_{22}R_{33}}}. \quad (4.45)$$

Ці висновки можна поширити на випадок, коли економетрична модель має $m-1$ пояснювальних змінних ($j=1, m-1$), але при цьому решта цих змінних (крім двох) є константами.

На підставі (4.45) можна записати альтернативні співвідношення для розрахунку частинних коефіцієнтів кореляції, базуючись на оберненій матриці до матриці r_{xx} :

$$r_{kj,s} = \frac{-C_{kj}}{\sqrt{C_{kk} \cdot C_{jj}}},$$

де C_{kj} — елемент матриці, оберненої до матриці r_{xx} .

✓ **Приклад 4.8.** Необхідно визначити частинні коефіцієнти кореляції для змінних моделі, побудованої на основі даних табл. 4.2 (приклад 4.2).

Розв'язання. 1. Запишемо матрицю коефіцієнтів парної кореляції для чотирьох змінних (приклад 4.6):

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0,909 & 0,898 & 0,913 \\ 0,909 & 1 & 0,953 & 0,913 \\ 0,898 & 0,953 & 1 & 0,924 \\ 0,913 & 0,913 & 0,924 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Обернемо цю матрицю:

$$C = \begin{pmatrix} 7,560 & -3,115 & -0,446 & -3,646 \\ -3,115 & 13,159 & -8,775 & -1,054 \\ -0,446 & -8,745 & 13,656 & -4,207 \\ -3,646 & -1,054 & -4,207 & 9,179 \end{pmatrix}.$$

3. Визначимо частинні коефіцієнти кореляції:

$$r'_{yx_1x_2x_3} = \frac{3,115}{\sqrt{7,560 \cdot 13,159}} = 0,312;$$

$$r_{yx_2x_3x_1} = \frac{0,446}{\sqrt{7,560 \cdot 13,656}} = 0,044;$$

$$r_{yx_3x_2x_1} = \frac{3,646}{\sqrt{7,560 \cdot 9,179}} = 0,438;$$

$$r_{x_1x_2 \cdot yx_3} = \frac{8,775}{\sqrt{13,159 \cdot 13,656}} = 0,704;$$

$$r_{x_1x_3 \cdot yx_2} = \frac{1,054}{\sqrt{13,159 \cdot 9,179}} = 0,272;$$

$$r_{x_2x_3 \cdot yx_1} = \frac{4,207}{\sqrt{13,656 \cdot 9,179}} = 0,440.$$

4. Запишемо матрицю частинних коефіцієнтів кореляції:

$$r' = \begin{pmatrix} 1 & 0,312 & 0,044 & 0,438 \\ 0,312 & 1 & 0,704 & 0,272 \\ 0,044 & 0,704 & 1 & 0,440 \\ 0,438 & 0,272 & 0,440 & 1 \end{pmatrix}.$$

Порівнюючи коефіцієнти парної кореляції (матриця r_{xx}) з відповідними коефіцієнтами частинної кореляції (матриця r'_{xx}), бачимо, що останні значно нижчі, ніж коефіцієнти парної кореляції. Це пов'язано з тим, що в коефіцієнтах частинної кореляції не відображаються неявні сукупні зв'язки між всіма показниками, а лише між певними двома (при цьому нехтується вплив решти). Саме ці зв'язки вимірюють частинні коефіцієнти кореляції, які мають досить важливе значення в різних проблемах економетричних досліджень. Пізніше, у розд. 6 ми повернемося до цих коефіцієнтів.

4.12. Перевірка значущості та інтервали довіри

4.12.1. Значущість економетричної моделі. Гіпотезу про рівень значущості зв'язку між залежною і пояснювальними змінними можна перевірити за допомогою F -критерію:

$$F = \frac{\hat{\sigma}_p^2}{\hat{\sigma}_u^2}. \quad (4.46)$$

Зауважимо, що ми виходимо з того, що залишки u розподілені нормально, тобто користуємося фундаментальною теоремою про те, що для нормально розподіленої випадкової величини u з нульовою середньою і одиничною дисперсією сума квадратів її n випадково вибраних значень має розподіл χ^2 з n ступенями свободи.

Дисперсії, які застосовуються для обчислення F -критерію, наведено в табл. 4.4.

Фактичне значення F -критерію порівнюється з табличним для ступенів свободи m і $n - m$ і вибраного рівні значущості. Якщо $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}}$, то гіпотеза про істотність зв'язку між залежною і пояснювальними змінними економетричної моделі підтверджується, у протилежному випадку — відхиляється.

✓ **Приклад 4.9.** Обчислимо F -критерій для економетричних моделей, розглянутих у прикладі 4.7 (табл. 4.6).

Таблиця 4.6

Економетрична модель	Кількість ступенів свободи	F -критерій
1. $\hat{Y} = -28,96 + 0,66X_3$	$\begin{cases} m - 1 = 1 \\ n - m = 18 \end{cases}$	90,10
2. $\hat{Y} = -16,69 + 0,36X_3 + 0,31X_1$	$\begin{cases} m - 1 = 2 \\ n - m = 17 \end{cases}$	55,63
3. $\hat{Y} = -15,01 + 0,35X_3 + 0,28X_1 + 0,06X_2$	$\begin{cases} m - 1 = 3 \\ n - m = 16 \end{cases}$	34,98

$F_{1\text{табл}}(0,95)$ для першої моделі дорівнює 4,41.

$F_{2\text{табл}}(0,95)$ для другої моделі дорівнює 3,59.

$F_{3\text{табл}}(0,95)$ для третьої моделі дорівнює 3,24.

Отже, при рівні значущості $\alpha = 0,05$:

$$F_{1\text{факт}} > F_{1\text{табл}},$$

$$F_{2\text{факт}} > F_{2\text{табл}},$$

$$F_{3\text{факт}} > F_{3\text{табл}}.$$

Це означає, що відповідні економетричні моделі є статично значущими, тобто підтверджується гіпотеза про те, що кількісна оцінка зв'язку між залежною і пояснювальними змінними в моделях є істотною.

Скориставшись виразами дисперсій, які наведено в табл. 4.4:

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{\hat{A}'X'Y}{m-1};$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{u'u}{n-m},$$

а також формулою для обчислення коефіцієнта детермінації

$\bar{R}^2 = \frac{\hat{A}'X'Y}{Y'Y}$, запишемо альтернативну форму F -критерію:

$$F = \frac{R^2 / (m-1)}{(1-R^2) / (n-m)}. \quad (4.47)$$

Згідно з цим критерієм перевіряється значущість коефіцієнта детермінації, а отже, й усієї моделі.

Цей результат підводить базу під традиційно дисперсійний аналіз, який застосовується для перевірки нульових гіпотез.

4.12.2. Значущість коефіцієнта кореляції. Оскільки коефіцієнт кореляції є також вибірковою характеристикою, яка може відхилятися від свого «істинного» значення, значущість коефіцієнта кореляції також потребує перевірки. Базується вона на t -критерії

$$t = \frac{R\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-R^2}}, \quad (4.48)$$

де R^2 — коефіцієнт детермінації моделі; R — коефіцієнт кореляції; $n-m$ — кількість ступенів свободи.

Якщо $|t| > t_{\text{табл}}(\alpha)$, де $t_{\text{табл}}(\alpha)$ — відповідне табличне значення t -розподілу з $n-m$ ступенями свободи, то можна зробити висновок про значущість коефіцієнта кореляції між залежною і пояснювальними змінними моделі.

✓ **Приклад 4.10.** Для множинних коефіцієнтів кореляції, які наведено в табл. 4.5, обчислимо значення t -критерію:

$$t_1 = \frac{0,824\sqrt{20-2}}{\sqrt{1-0,824^2}} = 6,17;$$

$$t_2 = \frac{0,851\sqrt{20-3}}{\sqrt{1-0,851^2}} = 6,68;$$

$$t_3 = \frac{0,842\sqrt{20-4}}{\sqrt{1-0,842^2}} = 6,24.$$

Табличні значення цього критерію при рівні значущості $\alpha = 0,05$ і відповідних ступенях свободи такі:

$$\begin{aligned}t_{1\text{табл}} &= 2,10; \\t_{2\text{табл}} &= 2,11; \\t_{3\text{табл}} &= 2,12.\end{aligned}$$

Порівнюючи їх із фактичними, де

$$\begin{aligned}t_1 &> t_{1\text{табл}}, \\t_2 &> t_{2\text{табл}}, \\t_3 &> t_{3\text{табл}},\end{aligned}$$

доходимо висновку, що коефіцієнти кореляції, які характеризують тісноту зв'язку між залежною і пояснювальними змінними в моделях, є достовірними.

4.12.3. Значущість оцінок параметрів моделі.

Перевіримо значущість оцінок параметрів $\hat{A}$ і знайдемо для них довірчі інтервали, припускаючи, що залишки u нормально розподілені, тобто $u \in N(0, \sigma_u^2)$. Тоді параметри моделі $\hat{A}$ задовольняють багатовимірний нормальний розподіл:

$$\hat{A} \in N[a, \sigma_u^2(X'X)^{-1}]. \quad (4.49)$$

Коли відома величина σ_u^2 , то цей результат можна буде використати для перевірки значущості елементів вектора $\hat{A}$ та оцінювання довірчих інтервалів елементів цього вектора. Проте дисперсія σ_u^2 невідома, а отже, потрібно розглянути методи її знаходження.

Для цього визначимо залишки:

$$\begin{aligned}u &= Y - X\hat{A} = X\hat{A} + u - X[(X'X)^{-1}X'(X\hat{A} + \hat{u})] = \\&= u - X(X'X)^{-1}X'\hat{u} = [E_n - X(X'X)^{-1}X']\hat{u} = N\hat{u}.\end{aligned} \quad (4.50)$$

Отже, залишки, які можна дістати на підставі експериментальних даних, записано у вигляді лінійних функцій від невідомих залишків u . Тоді суму квадратів відхилень подамо у вигляді

$$\hat{u}'u = \hat{u}'N'N\hat{u} = \hat{u}'N\hat{u} = \hat{u}'[E_n - X(X'X)^{-1}X']\hat{u}, \quad (4.51)$$

де N — симетрична ідемпотентна матриця.

У цих перетвореннях ми виходили з того, що N є симетричною ідемпотентною матрицею, оскільки E_n — одинична матриця, а $X(X'X)^{-1}X'$ — симетрична, розміром $n \times n$.

Знайдемо математичне сподівання для обох частин рівняння (4.51), застосувавши спочатку властивість, яка полягає в тому, що $M(\hat{u}' N \hat{u}) = \hat{\sigma}_u^2 \text{tr}(N)$, де $\text{tr}(N)$ — слід матриці N , а далі — властивість комутативності добутку матриць відносно операцій обчислення сліду матриці.

З огляду на сказане маємо:

$$M(uu') = \hat{\sigma}_u^2 \text{tr}[E_n - X(X'X)^{-1}X'] = \hat{\sigma}_u^2 \{\text{tr} E_n - \text{tr}[X(X'X)^{-1}X']\} = \hat{\sigma}_u^2 \{n - \text{tr}[(X'X)^{-1}(X'X)]\} = (n-m) \hat{\sigma}_u^2. \quad (4.52)$$

У цьому співвідношенні матриця $(X'X)$ має порядок m , добуток $(X'X)^{-1}(X'X)$ дорівнює E_m , а її слід дорівнює m . Звідси

$$\sigma_u^2 = \frac{u'u}{n-m}. \quad (4.53)$$

Співвідношення (4.53) дає нам незміщену оцінку дисперсії залишків.

Нарешті, лишилося показати, що сума квадратів залишків $u'u$ розподілена незалежно від $\hat{A}$. Для цього знайдемо коваріацію між залишками і $\hat{A}$:

$$M[u(A - \hat{A})'] = M\{[E_n - X(X'X)^{-1}X']uu'X(X'X)^{-1}\} = \hat{\sigma}_u^2 X(X'X)^{-1} - \hat{\sigma}_u^2 X(X'X)^{-1} = 0. \quad (4.54)$$

Оскільки u і $\hat{A}$ — лінійні функції від нормально розподілених змінних, то вони також розподілені нормально і, як було показано, їх коваріації дорівнюють нулю.

Це дає нам змогу скористатися t -розподілом для перевірки гіпотез відносно статистичної значущості кожної з оцінок параметрів економетричної моделі

$$\hat{A}_j \in N(a_j, \hat{\sigma}_u^2 c_{jj}).$$

Перевірку гіпотези виконаємо згідно з t -критерієм:

$$t_j = \frac{|\hat{a}_j|}{\sqrt{\hat{\sigma}_u^2 c_{jj}}} = \frac{|\hat{a}_j|}{S_{aj} \hat{a}_j}, \quad (4.55)$$

де c_{jj} — діагональний елемент матриці $(X'X)^{-1}$. Знаменник відношення (4.55) $S_{aj} \hat{a}_j = \sqrt{\hat{\sigma}_u^2 c_{jj}}$ називається стандартною похибкою оцінки параметра моделі.

Обчислене значення t -критерію порівнюється з табличним при вибраному рівні значущості α і $n - m$ ступенях свободи. Якщо $t_{\text{факт}} > t_{\text{табл}}$, то відповідна оцінка параметра економетричної моделі є статистично значущою.

На основі t -критерію і стандартної похибки побудуємо інтервали довіри для параметрів a_j :

$$a_j = \hat{a}_j \pm t_{(\alpha)} \cdot \sqrt{\hat{\sigma}_u^2 c_{jj}}. \quad (4.56)$$

✓ **Приклад 4.11.** Перевіримо гіпотези щодо статистичної значущості оцінок параметрів моделі

$$\hat{Y} = -15,01 + 0,28X_1 + 0,06X_2 + 0,35X_3,$$

побудованої на основі вихідних даних, наведених у табл. 4.2:

$$t_{\hat{a}_0} = \frac{|\hat{a}_0|}{S_{\hat{a}_0}} = \frac{15,01}{13,82} = 1,08; \quad t_{\hat{a}_1} = \frac{|\hat{a}_1|}{S_{\hat{a}_1}} = \frac{0,28}{0,22} = 1,32;$$

$$t_{\hat{a}_2} = \frac{|\hat{a}_2|}{S_{\hat{a}_2}} = \frac{0,06}{0,08} = 0,75; \quad t_{\hat{a}_3} = \frac{|\hat{a}_3|}{S_{\hat{a}_3}} = \frac{0,35}{0,17} = 1,95.$$

Табличне значення t -критерію для ступеня свободи $n - m = 16$ і рівні значущості $\alpha = 0,05$ дорівнює 2,12. Порівнюючи розраховані значення t -критерію для оцінок параметрів моделі з табличними, можна зробити висновок, що з імовірністю 0,95 жодна з оцінок моделі не є статично значущою.

Знизимо ступінь довіри з 0,95 до 0,90. Тоді $t_{(0,1)\text{табл}} = 1,746$. У цьому випадку оцінка параметра $\hat{a}_3$ є статистично значущою з імовірністю 0,9.

Інтервали довіри кожної оцінки можна визначити, знайшовши граничні похибки. Так, інтервали довіри для оцінки $\hat{a}_3$ запишуться: $\Delta_3 = t_{(\alpha)\text{табл}} \cdot \sigma_{\hat{a}_3}$; $\alpha_3 + \Delta_3$; $\alpha_3 - \Delta_3$; $0,35 - 0,36 \leq a_3 \leq 0,35 + 0,36$.

Зазначимо, що відповідно можна знайти інтервали довіри інших оцінок параметрів моделі. Коли стандартні похибки

параметрів більші за абсолютні значення оцінок їх параметрів, то це може означати, що оцінки параметрів є зміщеними.

4.13. Економетрична модель аналізу виробництва (виробнича функція Кобба—Дугласа)

4.13.1. Сутність виробничої функції та її використання. У цьому підрозділі покажемо, як можна аналізувати господарську діяльність на основі побудованої економетричної моделі, зокрема, виробничої функції.

Виробнича функція — це економетрична модель, яка кількісно описує зв'язок основних результативних показників виробничо-господарської діяльності з факторами, що визначають ці показники. До основних показників можна віднести дохід, прибуток, рентабельність, продуктивність праці, собівартість і т. ін.

Перше поняття виробничої функції пов'язане з математичним моделюванням технологічної залежності між обсягом продукції, що випускається, і кількісними характеристиками витрат ресурсів. Звідси і назва функції «виробнича». Уперше таку функцію побудували американські дослідники Кобб і Дуглас ще в 30-ті роки XX століття за даними про функціонування обробної промисловості США протягом двадцяти років. Це є класичним прикладом економетричного моделювання.

Функція Кобба—Дугласа (CDPF) належить до найвідоміших виробничих функцій, що набули широкого застосування в економічних дослідженнях, особливо на макрорівні. Класична виробнича функція Кобба—Дугласа має вигляд

$$Y = aF^{\alpha} L^{1-\alpha}, \quad (4.57)$$

де Y — обсяг продукції; F — основний капітал; L — робоча сила.

Сума параметрів, або ступінь однорідності класичної функції Кобба—Дугласа, дорівнює одиниці. А це означає, що зі збільшенням обох виробничих ресурсів на 1 % обсяг продукції також збільшиться на 1 %. Отже, ефективність ресурсів у такому разі стала.

Практичні дослідження функції Кобба—Дугласа показали, що припущення про лінійну однорідність на практиці виконується рідко. Тому було запропоновано виробничу функцію більш загального вигляду

$$Y = aF^{\alpha} L^{\beta}. \quad (4.58)$$

Сума параметрів $(\alpha + \beta)$ на відміну від попереднього випадку може бути як меншою, так і більшою від одиниці. Якщо $(\alpha + \beta) > 1$, то темпи зростання обсягу продукції вищі за темпи зростання виробничих ресурсів, а якщо $(\alpha + \beta) < 1$, то, навпаки, темпи зростання обсягу продукції нижчі за темпи зростання ресурсів.

Припустимо, що рівень кожного виробничого ресурсу збільшився на $r\%$, тоді обсяги їх відповідно дорівнюватимуть

$$F \left(1 + \frac{r}{100}\right) \text{ і } L \left(1 + \frac{r}{100}\right).$$

Обсяг продукції на основі виробничої функції запишеться так:

$$\begin{aligned} Y_1 &= a \left[F \left(1 + \frac{r}{100}\right) \right]^\alpha \left[L \left(1 + \frac{r}{100}\right) \right]^\beta = \\ &= a F^\alpha L^\beta \left(1 + \frac{r}{100}\right)^\alpha \left(1 + \frac{r}{100}\right)^\beta = Y \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{\alpha + \beta}. \end{aligned}$$

Звідси, коли $\alpha + \beta > 1$, обсяг продукції зростає більш ніж на $r\%$; коли $\alpha + \beta < 1$ — менш ніж на $r\%$; коли $\alpha + \beta = 1$, продукція збільшиться на $r\%$. Узявши частинні похідні від виробничої функції Кобба—Дугласа, дістанемо:

$$Y'_F = \frac{\partial Y}{\partial F} = \alpha \frac{Y}{F}; \quad Y'_L = \frac{\partial Y}{\partial L} = \beta \frac{Y}{L}. \quad (4.59)$$

Це означає, що граничний приріст продукції за рахунок приросту кожного ресурсу визначається як добуток коефіцієнта еластичності на середню ефективність ресурсу. Параметр a у функції Кобба—Дугласа залежить від вибраних одиниць вимірювання Y, F, L ; водночас числове значення цього параметра визначається також ефективністю виробничого процесу. У цьому можна переконатись, порівнявши дві виробничі функції, які відрізняються одна від одної лише значенням параметра a .

Для фіксованих значень F і L тій функції, де більше числове значення параметра a , відповідає більше значення Y . Отже, і виробничий процес, який описується цією функцією, буде ефективнішим. Другі похідні функції Кобба—Дугласа мають такий вигляд:

$$Y''_{FF} = \frac{\alpha(\alpha - 1)Y}{F^2}; \quad Y''_{LL} = \frac{\beta(\beta - 1)Y}{L^2}. \quad (4.60)$$

Враховуючи, що $0 < \alpha < 1$ і $0 < \beta < 1$, $Y_{FF} < 0$ і $Y_{LL} < 0$, справджується висновок: при збільшенні ресурсів граничний приріст обсягу продукції зменшуватиметься. Якщо обсяг продукції у функції Кобба—Дугласа вважати сталим (const), то можна обчислити граничні норми заміщення ресурсів:

$$h = \frac{Y'_F}{Y'_L} = \frac{\alpha \frac{Y}{F}}{\beta \frac{Y}{L}} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{L}{F}. \quad (4.61)$$

Звідси бачимо, що гранична норма заміщення ресурсів у функції Кобба—Дугласа визначається як добуток співвідношень обсягів ресурсів та їхніх коефіцієнтів еластичності.

Швидкість зміни норми заміщення ресурсів у зв'язку зі зміною обсягу ресурсів обчислюється так:

$$\frac{\partial h}{\partial L} = \frac{\alpha}{\beta F}; \quad \frac{\partial h}{\partial F} = \frac{\alpha L}{\beta F^2}. \quad (4.62)$$

Мірою швидкості зміни h є еластичність заміщення ресурсів F і L , що визначається як відношення зміни обсягу ресурсів до зміни величини h :

$$h_{F/L} = \frac{L/F \partial L/F}{\partial h/h} = \frac{h (Lh + F)}{FL \left(h \frac{\partial h}{\partial F} - \frac{\partial h}{\partial L} \right)} = 1. \quad (4.63)$$

Отже, еластичність заміщення в кожній точці кривої, що характеризує виробничу функцію Кобба—Дугласа, дорівнює одиниці.

Розглянемо тепер поведінку функції під час зміни масштабу виробництва. Для цього припустимо, що витрати кожного ресурсу виробництва збільшилися в λ раз, тоді нове значення Y' визначатиметься так:

$$Y' = a (\lambda F)^\alpha (\lambda L)^\beta = \lambda^{\alpha + \beta} Y. \quad (4.64)$$

Ступінь однорідності цієї функції дорівнює $\alpha + \beta$. Якщо $\alpha + \beta = 1$, то рівень ефективності ресурсів не залежить від масштабів виробництва. Якщо $\alpha + \beta < 1$, то, як уже

стверджувалось, з розширенням масштабів виробництва середні витрати ресурсів в розрахунку на одиницю продукції зменшуються, а при $\alpha + \beta > 1$ — збільшуються. Зазначимо, що ці властивості не залежать від числових значень F і L і зберігаються в кожній точці виробничої функції.

За припущення, що мета господарської діяльності — максимізація прибутку, можна проілюструвати інші властивості виробничої функції. Запишемо функцію прибутку:

$$\Pi = bY^{r+1} - wL - rF + \lambda [f(F, L) - Y].$$

Підприємець вибирає такі значення Y, L, F , які максимізують прибуток при обмеженнях, що накладаються виробничою функцією. Величини b, w, r — параметри функції прибутку, λ — множник Лагранжа. Якщо виробничий процес у даному співвідношенні подається функцією Кобба—Дугласа, то можна записати умови максимізації прибутку:

$$w = \frac{\lambda \beta Y}{L}; \quad r = \frac{\lambda \alpha Y}{F}; \quad \frac{w}{r} = \frac{\beta F}{\alpha L},$$

$$\lambda = (r + 1)P \quad \text{при } r \neq -1, \quad \text{де } P = bY^r.$$

Звідси обсяги ресурсів такі:

$$L = \frac{(r+1)P\beta Y}{w}; \quad F = \frac{(r+1)P\alpha Y}{r}. \quad (4.65)$$

У цьому випадку максимальне значення випуску продукції, якщо $\alpha + \beta \neq 1$, можна записати так:

$$Y = aF^\alpha L^\beta = a \left[\frac{(r+1)P\alpha Y}{r} \right]^\alpha \left[\frac{(r+1)P\beta Y}{w} \right]^\beta. \quad (4.66)$$

При $r = 1$ згідно із записаними щойно умовами максимізації (4.66) дістанемо:

$$F = \frac{w\alpha L}{\beta r}; \quad Y = a \left(\frac{w\alpha}{\beta r} \right)^\alpha L^{\alpha+\beta}.$$

Отже, необхідні умови для забезпечення максимізації прибутку дають змогу визначити відповідні витрати робочої сили

і основного капіталу. З розширенням масштабів виробництва ефективність витрат ресурсів спадає, що відповідає максимізації прибутку в умовах досконалої конкуренції.

Наведений приклад виробничої функції показує, що ця економетрична модель дає змогу досить широко проаналізувати виробничу діяльність, визначити шляхи її вдосконалення для підвищення ефективності. Обґрунтованість такого аналізу повністю залежить від достовірності економетричної моделі, від того, наскільки вона адекватна реальному процесові.

Протягом багатьох років економетричні дослідження були спрямовані в основному не на заміну її іншими видами функцій, а на модифікацію виробничої функції, яка могла б адекватніше описати реальні економічні співвідношення.

Виробнича функція дає можливість дослідити для галузей та економіки в цілому показники середньої і граничної ефективності ресурсів робочої сили і основних виробничих фондів, граничні норми заміщення ресурсів у виробничому процесі. Важливе значення має також аналіз на основі функцій (4.58) таких відносних показників, як продуктивність праці (Y/L), фондоозброєність праці (K/L), фондомісткість продукції (K/Y), фондovіддача (Y/K).

Безпосередньо із (4.57) запишемо залежність між фондоозброєністю праці та її продуктивністю:

$$\frac{Y}{L} = \alpha_0 \left(\frac{K}{L} \right)^{1-\alpha_1}.$$

Звідси можна дістати і залежність фондомісткості продукції від фондоозброєності: $\frac{K}{Y} = \frac{1}{\alpha_0} \left(\frac{K}{L} \right)^{\alpha_1}.$

Із наведених співвідношень видно, що вплив зростання фондоозброєності праці на продуктивність праці і фондомісткість пов'язано з величиною параметра α_1 . Якщо $\alpha_1 < 0,5$, то зі зростанням фондоозброєності порівняно швидко зростає продуктивність праці і досить повільно збільшується фондомісткість продукції. При $\alpha_1 > 0,5$ ситуація змінюється: зростання фондоозброєності праці досить різко збільшує фондомісткість, а темпи зростання продуктивності праці загасають. Так, при $\alpha_1 = 0,7$ збільшенню фондоозброєності праці

на 10 % відповідає зростання фондомісткості на 7 %, а продуктивності праці — лише на 3 %.

Наведені висновки базуються на виробничій функції, коли сума еластичностей ресурсів дорівнює одиниці, тобто дохід зростає в такому самому співвідношенні, як і обидва ресурси.

Покажемо основні напрями використання виробничих функцій на макрорівні.

4.13.2. Застосування виробничої функції

✓ **Приклад 4.12.** Функцію Кобба—Дугласа було використано для оцінювання виробленого національного доходу Китаю.

В умовах цієї країни існує велика «резервна армія» робочої сили. Диспропорція в динаміці основних фондів і ресурсів робочої сили, які актуальні на Заході, для китайської економіки неістотні, тому отримана виробнича функція має специфічний вигляд

$$Y_t = 77,8e^{bt}(K_t L_t)^{0,2755}, \quad (4.67)$$

де Y_t — суспільний продукт (валова продукція) у незмінних цінах у період t ;

K_t — основний капітал (ОВФ) у період t ;

L_t — робоча сила (чисельність зайнятих) у період t ;

b — параметр, що характеризує науково-технічний прогрес ($b = 0,03$).

Наведемо фактичні і розрахункові дані за моделлю в табл. 4.7.

Таблиця 4.7

Рік t	Національний дохід Китаю, млрд юанів	Обчислення за моделлю значення	Відхилення, %
1978	2485	2480	0,2
1979	2713	2656	2,1
1980	2815	2829	−0,5
1981	2939	2852	3,0
1982	3115	3157	−1,3
1983	3415	3381	1,0
1984	3964	3847	2,9
1985	4526	4411	2,5
1986	4780	4846	−1,4

1987	5276	5161	2,2
1988	5613	5407	3,7
1989	5350	5130	4,1
1990	5419	5616	-3,6
1991	6397	6217	2,8

У процесі економічної реформи в Китаї не було допущено спаду виробництва і великої інфляції, що пояснюється жорстким контролем держави і орієнтацією на інтереси більшості населення. Середній темп зростання національного доходу становив 8,7 %, а в 1994 році — 13,7 %. Згідно з цим активно запроваджувалися різні форми власності, ринкові механізми і відкрита зовнішньоекономічна політика.

✓ **Приклад 4.13.** Розглянемо виробничу функцію для економіки України.

Таблиця 4.8

Показники	Позначення	Числове значення за 1994 р., трлн крб.
Національний дохід (ВНД)	Y	967
Фонд накопичення (33,2 % від НД)	K	321
Заробітна плата (33,8 % від валового внутрішнього продукту (ВВП — 1138 трлн крб.))	L	385

Припустимо, що за оцінкою Кобба—Дугласа $\frac{1-\alpha}{\alpha} = 2,5$, тоді $\alpha = 0,286$.

Користуючись наведеними табличними даними для визначення коефіцієнта a функції (4.57), маємо рівняння $967 = a \cdot 321^{0,286} \cdot 385^{0,714}$.

Звідси $a = 2,64$ і відповідно отримуємо вираз виробничої функції Кобба—Дугласа: $Y = 2,64K^{0,286} \cdot L^{0,714}$.

На основі оцінок параметрів цієї функції робимо висновок: якщо капітальні вкладення збільшаться на 1 %, робоча сила не зміниться, то обсяг виробництва зросте на 0,286 %; якщо робоча сила зросте на 1 %, а капітальні вкладення не зміняться, то обсяг виробництва зросте на 0,714 %.

✓ Приклад 4.14. Модель Солоу.

Модель Солоу є розвитком моделі Кобба—Дугласа із переходом до питомих показників та з оптимізацією співвідношення між споживанням та нагромадженням (інвестиціями).

$$y = \frac{Y}{L} = a \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha = a \cdot k^\alpha, \quad (4.68)$$

де y — обсяг продукції, яка виробляється на одиницю живої праці; $k = \frac{K}{L}$ — обсяг капіталу на одиницю живої праці (капіталоозброєність праці).

Приріст показника капіталоозброєності праці становить $\Delta k = S_y - \sigma_k$, де S_y — норма інвестування, σ_k — показник втрат.

Покажемо на прикладі послідовність обчислень за моделлю Солоу. Припустимо, що $S_y = 0,2$; $\sigma_k = 0,15$. Тоді, коли $a = 2,64$, то $\alpha = 0,286$, $k_0 = \frac{321}{385} = 0,83$ (початковий показник нагромадження капіталоозброєності праці). Схема розрахунку має вигляд табл. 4.9:

Таблиця 4.9.

ПРИКЛАД ОБЧИСЛЕНЬ ЗА МОДЕЛЛЮ СОЛОУ

Рік t	Показники					
	Нагромадження k	доходів Y	інвестицій $i = S \cdot y$	втрат $\Pi = \sigma_k$	приросту нагромадження $\Delta k = i \cdot \Pi$	Споживання $c = y - i$
0-й	0,63	2,51	0,50	0,12	0,38	2,01
1-й	1,21	2,79	0,56	0,18	0,38	2,23
2-й	1,59	3,01	0,60	0,14	0,36	2,41
3-й	1,95	3,20	0,64	0,29	0,35	2,56
4-й	2,30	3,34	0,67	0,35	0,32	2,67
5-й	2,62	3,48	0,70	0,40	0,30	2,78
...	...	...	...	...	...	...
∞	5,82	4,37	0,87	0,87	0	3,50

Коли t прямує до ∞ , $\Delta k = S_y - \sigma_k = 0$.

Як бачимо, залежності між інвестиціями і доходами визначають шлях оптимізації показника капіталоозброєності праці.

Визначимо «золотий» рівень нагромадження капіталу.

Розглянемо варіант моделі Солоу, припустивши довільний вигляд виробничої функції: $Y = f(k)$.

У випадку, коли капіталоозброєність не змінюється, інвестиції тільки відновлюють вибуття основних фондів:

$\Delta k = 0$ (граничний стан розвитку при $t \rightarrow \infty$).

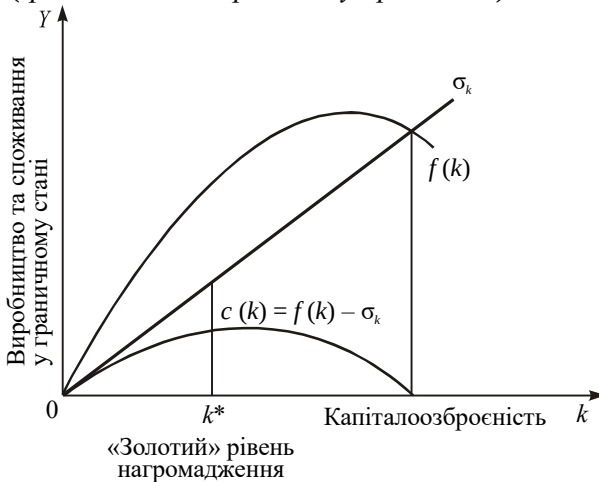


Рис. 4.2. Визначення «золотого» рівня накопичення капіталу

Рівень нагромадження капіталу, що забезпечує граничний стан із найвищим рівнем споживання, має назву **золотого рівня нагромадження капіталу k^*** (рис. 4.2). Умови досягнення k^* — максимум функції споживання: $c(k) = f(k) - \sigma_k$.

Складаємо рівняння: $c'(k) = f'(k) - \sigma_k = 0$, $f''(k) < 0$.

У різницевому варіанті: $f(k^* + 1) - f(k^*) = MPK = \sigma_k$, тобто граничний продукт капіталу (варіант питомого показника) дорівнює нормі вибуття.

Нехай $y = f(k) = \sqrt{k}$ і $\sigma_k = 0,1$, тоді визначення «золотого» рівня нагромадження k^* можна проілюструвати за допомогою табл. 4.10.

Таблиця 4.10

S	K	Y	$\Delta - k$	c	$f(k)$
0,1	1	1	0,1	0,9	0,5
0,2	4	2	0,4	1,6	0,25
0,4	16	4	1,6	2,4	0,125
0,5	25	5	2,5	2,5	0,100
0,6	36	6	3,6	2,4	0,083
0,8	64	8	6,4	1,6	0,062

Рядок зі значенням $K = k^* = 25$ відповідає оптимальному значенню k , тобто визначає «золотий» рівень нагромадження, оскільки $f'(k) = \sigma_k$.

Ураховуючи темпи приросту працюючих та темпи приросту продуктивності праці, дістанемо рівняння узагальненої моделі:

$$f'(k) = \sigma + n + g, \quad (4.69)$$

де n — темп приросту чисельності працюючих; g — темп приросту продуктивності праці.

У формі узагальнення (4.69) «золотий» рівень нагромадження визначається як розв'язок рівняння:

$$f(k^* + 1) - f(k^*) = MPK = \sigma + n + g.$$