

Розділ 8

АВТОКОРЕЛЯЦІЯ

8.1. Причини виникнення автокореляції в економетричних моделях

8.1.1. Поняття автокореляції. Означення 8.1. *Автокореляція* — це наявність взаємозв'язку між послідовними елементами часового чи просторового ряду даних.

В економетричних дослідженнях часто виникають такі ситуації, коли дисперсія залишків є сталою, але спостерігається їх коваріація. Це явище називають **автокореляцією залишків**.

Автокореляція залишків найчастіше спостерігається тоді, коли економетрична модель будується на основі часових рядів. Якщо існує кореляція між послідовними значеннями деякої пояснювальної змінної, то буде спостерігатись і кореляція послідовних значень залишків.

Автокореляція може бути також наслідком помилкової специфікації економетричної моделі, зокрема наявність автокореляції залишків може означати, що необхідно ввести до моделі нову незалежну змінну.

У загальному випадку ми вводимо до моделі лише деякі з істотних змінних, а вплив змінних, яких виключено з моделі, має позначитися на зміні залишків. Існування кореляції між послідовними значеннями виключеної з розгляду змінної не обов'язково має викликати відповідну кореляцію залишків, бо вплив різних змінних може взаємно погашатися. Якщо кореляція послідовних значень виключених з моделі змінних спостерігається, то загроза виникнення автокореляції залишків стає реальністю.

Проілюструємо проблему автокореляції залишків на прикладі простої економетричної моделі. Нехай

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t, \quad (8.1)$$

де припускається, що залишки u_t задовольняють схему авторегресії першого порядку (стаціонарний марковський процес 1-го порядку), тобто залежать тільки від залишків попереднього періоду:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (8.2)$$

причому $|\rho| < 1$, а для ε_t виконуються такі властивості:

$$M(\varepsilon_t) = 0;$$

$$\begin{cases} M(\varepsilon_t \varepsilon_{t-s}) = \sigma_\varepsilon^2, & s = 0; \\ M(\varepsilon_t \varepsilon_{t-s}) = 0, & s \neq 0, \end{cases}$$

де s — номер зрушення (лагу) залишків щодо періоду t .

Величина ρ є коефіцієнтом автокореляції залишків, що характеризує рівень взаємозв'язку кожного наступного значення з попереднім, тобто коваріацію залишків.

Специфікація моделі (8.1) на відміну від моделей, які розглядалися у розд. 7, має індекс t , що свідчить про її динамічний характер, тобто t — період часу, для якого будується така модель на основі динамічних (часових) рядів вихідних даних.

Розглянемо залишки моделі u_t , враховуючи (8.2):

$$\begin{aligned} u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t = \rho(\rho u_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \dots = \\ &= \varepsilon_t + \rho \varepsilon_{t-1} + \rho^2 \varepsilon_{t-2} + \dots \end{aligned}$$

Звідси

$$u_t = \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s \varepsilon_{t-s}, \quad (8.3)$$

де s — лаг залишків.

Оскільки $M(\varepsilon_t) = 0$, то $M(u_t) = 0$.

Визначимо дисперсію залишків u_t .

$$M(u_t^2) = M(\varepsilon_t^2) + \rho^2 M(\varepsilon_{t-1}^2) + \rho^4 M(\varepsilon_{t-2}^2) + \dots$$

Враховуючи, що послідовні значення ε_t незалежні, запишемо

$$M(u_t^2) = (1 + \rho^2 + \rho^4 + \dots) \sigma_\varepsilon^2,$$

де $|\rho| < 1$.

Тоді

$$\sigma_u^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \rho^2}. \quad (8.4)$$

Коваріація послідовних значень залишків запишеться у такому вигляді:

$$M(u_t u_{t-1}) = \rho \sigma_u^2, \quad M(u_t u_{t-2}) = \rho^2 \sigma_u^2,$$

і в загальному випадку

$$M(u_t u_{t-s}) = \rho^s \sigma_u^2, \quad (8.5)$$

тобто для моделі (8.1) не задовольняється гіпотеза про незалежність послідовних значень залишків.

Вираз (8.5) можна записати так:

$$\frac{M(u_t u_{t-s})}{\sigma_u^2} = \rho^s. \quad (8.6)$$

Це означає, що за наявності автокореляції залишків друга необхідна умова подається у вигляді:

$$M(uu') = \sigma_u^2 S,$$

де S — матриця коефіцієнтів автокореляції s -го порядку для ряду u_t , або

$$M(uu') = V.$$

Якщо

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$M(uu') = V = \sigma_u^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Порівнюючи матрицю, яку маємо в даному разі, з матрицею за наявності гетероскедастичності, побачимо, що вони істотно відрізняються одна від одної. Це пов'язано з тим, що природа

порушення другої умови для застосування методу 1МНК для явищ гетероскедастичності та автокореляції різна.

Отже, для гетероскедастичних залишків, розглянутих у розд. 7, існує одна форма порушення стандартної гіпотези, згідно з якою $M(uu') = \sigma_u^2 S$. Для автокореляційних залишків ми стикаємося з іншою формою порушення цієї гіпотези.

8.1.2. Наслідки автокореляції залишків. Знехтувавши автокореляцією залишків і оцінивши параметри моделі 1МНК, дійдемо таких **трьох основних наслідків**.

1. Оцінки параметрів моделі можуть бути незміщеними, але неефективними, тобто вибіркові дисперсії вектора оцінок $\hat{A}$ можуть бути невиправдано великими.

2. Оскільки вибіркові дисперсії обчислюються не за уточненими формулами, то статистичні критерії t - і F -статистики, які знайдено для лінійної моделі, практично не можуть бути використані в дисперсійному аналізі при автокореляції.

3. Неефективність оцінок параметрів економетричної моделі призводить, як правило, до неефективних прогнозів, тобто прогнозів з доволі великою вибірковою дисперсією.

Нагадаємо, що за відсутності автокореляції залишків матриця коваріацій для вектора оцінок $\hat{A}$ така:

$$\text{cov}(\hat{A}) = \sigma_u^2 (X'X)^{-1} = S_{(\hat{A})}^2. \quad (8.8)$$

Припустимо, що незалежні змінні і залишки можна подати у вигляді стаціонарних марковських процесів першого порядку:

$$\begin{aligned} x_t &= \lambda x_{t-1} + v_t, \quad |\lambda| < 1; \\ u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\rho| < 1. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Якщо коефіцієнти λ і ρ додатні, то говорять про додатну автокореляцію. Від'ємна автокореляція в економетричних моделях спостерігається дуже рідко.

Залишки v_t і ε_t взаємно незалежні, і їхні автокореляційні матриці діагональні, тобто вони не автокорельовані. Тоді можна показати, що звичайний метод найменших квадратів дає при достатньо великому n таку оцінку дисперсії параметрів $\hat{A}$:

$$\text{cov}(\hat{A}) = S_{(\hat{A})}^2 \frac{1+\rho\lambda}{1-\rho\lambda}. \quad (8.10)$$

Із (8.10) бачимо, що зміщення $\frac{1+\rho\lambda}{1-\rho\lambda}$ дисперсії оцінок параметрів тим більше, чим більші значення λ і ρ (більша автокореляція).

Нехай $\lambda = \rho = 0,5$, тоді зміщення $\frac{1+\rho\lambda}{1-\rho\lambda} = \frac{5}{3}$. Цей множник і буде загубленим при використанні 1МНК, що призводить до заниження дисперсії приблизно на 40 % порівняно з її справжнім значенням. Зі збільшенням λ і ρ , наприклад, $\rho = \lambda = 0,8$, зміщення буде $\frac{1+\rho\lambda}{1-\rho\lambda} = \frac{1+0,64}{1-0,64} = \frac{1,64}{0,36} = 4,5$, тобто істинне значення дисперсії в чотири з половиною рази перевищуватиме те, яке дістали, застосувавши 1МНК.

Якщо додатна автокореляція спостерігається і в залишках, і в незалежній змінній, то 1МНК дає зміщення і для дисперсії залишків. Припустивши, як і раніше, що x_t і u_t підлягають однаковій схемі авторегресії, знайдемо:

$$M(uu') = \sigma_u^2 \left[n - \frac{1+\rho\lambda}{1-\rho\lambda} \right] / (n-1). \quad (8.11)$$

Якщо $\rho = \lambda = 0,5$ і $n = 20$, то $M(uu') = \frac{18,3}{19} \sigma_u^2$, тобто недооцінка дисперсії залишків становить близько 3,5 %, а при $\rho = \lambda = 0,8$; $n = 20$ ця недооцінка дорівнюватиме приблизно 24,2 %. $M(uu') = \frac{15,4}{19} \sigma_u^2$.

Отже, в разі застосування 1МНК вибіркові дисперсії будуть заниженими. Навіть після коригування оцінок вибірових дисперсій на величину зміщення не можна бути впевненим у коректності рівнів значущості для t - і F -статистик, оскільки наявність автокореляції залишків означає, що величина $\frac{u'u}{\sigma_u^2}$, яка характеризує співвідношення між вибірковою дисперсією залишків і дисперсією в генеральній сукупності, може не розподілятися за законом χ^2 і не буде незалежною від $(\hat{A} - A)$.

Недооцінка коваріації вектора оцінок параметрів моделі $(\text{cov}(\hat{A}))$ є, очевидно, найбільш серйозною помилкою, коли застосовується 1МНК і спостерігається автокореляція. Метод найменших квадратів приводить нас в цьому випадку до неефективних оцінок і до неефективних прогнозів, тобто стандартні похибки оцінок параметрів моделі та похибка прогнозу будуть заниженими.

8.2. Перевірка наявності автокореляції

8.2.1. Критерій Дарбіна—Уотсона. Для перевірки наявності автокореляції залишків найчастіше застосовується критерій Дарбіна—Уотсона (DW):

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n u_t^2}, \quad (8.12)$$

який може набувати значень із проміжку $[0, 4]$: $DW \in [0, 4]$.

Якщо залишки u_t є випадковими величинами, нормально розподіленими, а не автокорельованими, то значення DW містяться поблизу 2. За додатної автокореляції $DW < 2$, а за від'ємної $DW > 2$. Фактичні значення критерію порівнюються з критичними (табличними) для різної кількості спостережень n і кількості незалежних змінних m за вибраного рівня значущості α . Табличні значення мають нижню межу DW_1 і верхню — DW_2 .

Коли $DW_{\text{факт}} < DW_1$, залишки мають автокореляцію. Якщо $DW_{\text{факт}} > DW_2$, приймається гіпотеза про відсутність автокореляції. У разі $DW_1 < DW < DW_2$ конкретних висновків зробити не можна: необхідно далі провадити дослідження, збільшуючи сукупність спостережень. Зауважимо, що цей критерій призначений для малих вибірових сукупностей.

Вибірковий розподіл значень критерію Дарбіна—Уотсона залежить від емпіричних спостережень пояснювальних змінних і, якщо взяти до уваги цю обставину, можна стверджувати: параметр ρ для генеральної сукупності має тісний зв'язок з критерієм DW . Якщо $\rho = 1$, то значення $DW = 0$, при $\rho = 0$ $DW = 2$ і при $\rho = -1$ значення критерію $DW = 4$. Наведені співвідношення показують, що існують

області, в яких застосування критерію Дарбіна—Уотсона не може дати певних результатів, про що вже було сказано. Верхні та нижні межі критерію DW визначають межі цієї області для різних **розмірів вибірки, заданої кількості пояснювальних змінних та певного рівня значущості**.

Шкалу визначення наявності автокореляції на основі порівняння фактично розрахованого критерію Дарбіна—Уотсона та його критичних значень зображено на рис. 8.1.

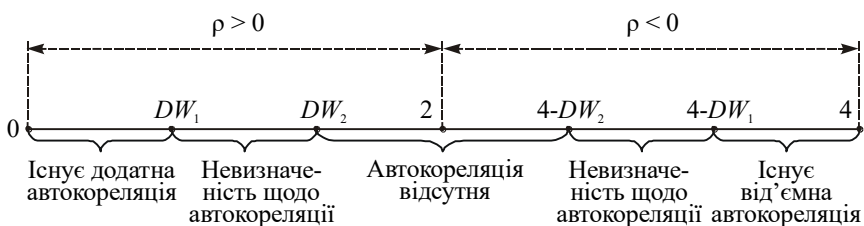


Рис. 8.1. Шкала визначення наявності автокореляції за критерієм Дарбіна—Уотсона

Із рис. 8.1 випливає, що коли фактичне значення DW потрапляє в межі від нуля до нижньої критичної межі DW_1 , то гіпотезу про наявність автокореляції необхідно **прийняти**.

Якщо фактичне значення критерію DW потрапляє в межі від верхнього критичного рівня DW_2 до двох, то гіпотезу про наявність автокореляції потрібно **відхилити**. Коли фактичне значення критерію DW міститься в межах від нижнього до верхнього критичного значення, то існує невизначеність щодо наявності автокореляції залишків. У цьому випадку гіпотезу про наявність автокореляції доцільніше прийняти, ніж відхилити.

Якщо фактичне значення критерію DW більше від 2, то, як було зазначено, може йтися про від'ємну автокореляцію. Оскільки критичні значення критерію DW табульовані для додатної автокореляції, то щоб зробити висновки стосовно від'ємної автокореляції, необхідно відняти розраховане значення критерію DW від 4 і цю різницю порівнювати з критичними значеннями критерію DW , як це було показано раніше.

✓ **Приклад 8.1.** Нехай обсяг вибірки складається з 20 спостережень. На основі цієї вибірки побудовано модель, яка включає в себе три пояснювальні змінні. Наведено табличні

значення критерію Дарбіна — Уотсона DW_1 і DW_2 для 1 %- і 5 %-го рівнів значущості:

	DW_1	DW_2
$\alpha_1 = 1 \%$	0,77	1,41
$\alpha_2 = 5 \%$	1,00	1,68

Для додатної автокореляції залишків ці значення є межами п'яти інтервалів, за якими можна дійти таких висновків:

1) $0 \leq DW \leq 0,77$ — нульова гіпотеза відхиляється як з 1 %-м, так і за 5 %-м рівнями значущості;

2) $0,77 \leq DW \leq 1,00$ — нульова гіпотеза відхиляється з 5 %-м рівнем значущості; для 1 %-го рівня значущості певних висновків зробити не можна;

3) $1,00 \leq DW \leq 1,41$ — критерій не дає певних результатів як для одного, так і для другого рівня значущості;

4) $1,41 \leq DW \leq 1,68$ — нульова гіпотеза не відхиляється з 1 %-м рівнем значущості, для 5 %-го рівня значущості певних висновків зробити не можна;

5) $1,68 \leq DW \leq 2,00$ — нульова гіпотеза не відхиляється для обох рівнів значущості.

Дж. Джонстон [2] наводить ряд спостережень, які свідчать про те, що верхній рівень DW_2 ближчий до істинного значення прийняття гіпотези, яка перевіряється. Отже, якщо виникають сумніви, можна обмежитись одним показником — DW_2 . Це означає, що сам критерій також може мати зміщення, він указує на наявність серійної кореляції першого порядку і там, де її не повинно бути. Дж. Джонстон зауважує, що оскільки наслідки некоректного прийняття нульової гіпотези можуть бути набагато серйознішими, ніж її некоректного відхилення, то в сумнівних випадках нульову гіпотезу, як правило, краще відхилити.

8.2.2. Критерій фон Неймана. Для виявлення автокореляції залишків використовується також критерій фон Неймана:

$$Q = \frac{\sum_{t=2}^n (u_t - u_{t-1})^2}{\frac{n-1}{\sum_{t=1}^n u_t^2}}. \quad (8.13)$$

Звідси $Q = DW \frac{n}{n-1}$. При $n \rightarrow \infty Q = DW$. Фактичне значення критерію фон Неймана порівнюється з табличним для вибраного рівня значущості і заданої кількості спостережень. Якщо $Q_{\text{факт}} < Q_{\text{табл}}$, то існує додатна автокореляція, у протилежному випадку — вона відсутня.

8.2.3. Нециклічний коефіцієнт автокореляції. Цей коефіцієнт показує ступінь взаємозв'язку залишків кожного наступного значення з попереднім, а саме:

1-й ряд — $u_1, u_2, u_3 \dots u_{n-1}$;

2-й ряд — $u_2, u_3, u_4 \dots u_n$.

Він обчислюється за формулою:

$$r^* = \frac{\sum_{t=2}^n (u_t u_{t-1}) - \frac{1}{n-1} \left(\sum_{t=1}^n u_t \right) \left(\sum_{t=2}^n u_{t-1} \right)}{\sqrt{\left[\sum_{t=1}^n u_t^2 - \frac{1}{n-1} \left(\sum_{t=1}^n u_t \right)^2 \right] \left[\sum_{t=2}^n u_{t-1}^2 - \frac{1}{n-1} \left(\sum_{t=2}^n u_{t-1} \right)^2 \right]}}. \quad (8.14)$$

Коефіцієнт r^* може набувати значень в інтервалі $(-1; +1)$. Від'ємні значення його свідчать про від'ємну автокореляцію, додатні — про додатну. Значення, що містяться в деякій критичній області біля нуля, свідчать про відсутність автокореляції, тобто стверджують нульову гіпотезу про відсутність автокореляції залишків. Оскільки ймовірнісний розподіл r^* встановити важко, то на практиці замість r^* часто застосовують циклічний коефіцієнт автокореляції r^0 .

8.2.4. Циклічний коефіцієнт автокореляції. Він виражає ступінь взаємозв'язку рядів:

1-й ряд — $u_1, u_2, u_3 \dots u_{n-1}, u_n$;

2-й ряд — $u_2, u_3, u_4, \dots, u_n, u_1$.

Циклічний коефіцієнт обчислюється за формулою:

$$r^0 = \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1} + u_n u_1 - \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n u_t \right)^2}{\sum_{t=1}^n u_t^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n u_t \right)^2}. \quad (8.15)$$

Для досить довгих рядів вплив циклічних членів на значення коефіцієнта r^0 неістотний, тому можна вважати, що ймовірнісний розподіл r^0 наближається до розподілу r^* . Якщо останній член ряду дорівнює першому, тобто $u_1 = u_n$, то нециклічний коефіцієнт автокореляції дорівнює циклічному. Очевидно, що коли залишки не містять тренду, то припущення про рівність $u_1 = u_n$ не далеке від реальності і циклічний коефіцієнт автокореляції наближається до нециклічного.

Фактично обчислене значення циклічного коефіцієнта автокореляції порівнюється з табличним для вибраного рівня значущості і довжини ряду n . Якщо $r^0_{\text{факт}} \geq r^0_{\text{табл}}$, то існує автокореляція. Припускаючи, що $\sum_{t=1}^n u_t \approx \sum_{t=2}^n u_{t-1} \approx 0$, циклічний коефіцієнт автокореляції можна записати у вигляді

$$r^0 = \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_t^2}. \quad (8.16)$$

На практиці часто замість (8.16) обчислюють

$$r^0 = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n u_t^2}. \quad (8.17)$$

8.3. Оцінювання параметрів моделі з автокорельованими залишками

8.3.1. Метод Ейткена. Нехай в економетричній моделі

$$\begin{aligned} y_t &= a_0 + a_1 x_t + u_t, \\ u_t &= \hat{\rho} u_t + \varepsilon_t, \quad |\rho| < 1, \end{aligned} \quad (8.18)$$

де ε_t — нормально розподілені випадкові залишки. Тоді, щоб усунути автокореляцію залишків u_t , потрібно перетворити основну модель так, щоб вона мала нормально розподілені залишки ε_t . Оскільки $\varepsilon_t = u_t - \rho u_{t-1}$, то для такого перетворення запишемо модель для попереднього періоду

$$y_{t-1} = a_0 + a_1 x_{t-1} + u_{t-1}. \quad (8.19)$$

Помножимо ліву і праву частину її на $\hat{\rho}$ та віднімемо від моделі для періоду t (8.18).

У результаті дістанемо таку економетричну модель:

$$y_t - \hat{\rho} y_{t-1} = a_0(1 - \hat{\rho}) + a_1(x_t - \hat{\rho} x_{t-1}) + (u_t - \hat{\rho} u_{t-1}). \quad (8.20)$$

Оскільки в цій моделі $(u_t - \hat{\rho} u_{t-1})$ дорівнює ε_t , то очевидно, що коли вихідні дані перетворені, а саме $y_t - \hat{\rho} y_{t-1}$, $x_t - \hat{\rho} x_{t-1}$, то для оцінювання параметрів можна застосувати ІМНК. При цьому для перетворення можна використати перші різниці $y_t - y_{t-1}$ і $x_t - x_{t-1}$, коли $\hat{\rho}$ наближається до одиниці. Якщо $\hat{\rho}$ близьке до нуля, то вихідні дані можна не перетворювати. Зауважимо, що коли $\hat{\rho} = 1$, у перетвореній моделі буде відсутній вільний член (як виняток може бути ситуація, коли вихідна модель містить лінійний часовий тренд). Якщо залишки вихідної моделі характеризувались додатною автокореляцією, використання перших різниць може спричинити виникнення від'ємної автокореляції.

Параметр ρ наближено можна знайти на основі залишків, якщо обчислити циклічний коефіцієнт кореляції r^0 . На практиці, як правило, $\rho \approx r^0$, але r^0 коригується на величину зміщення.

Усі ці міркування покладено в основу методів оцінювання параметрів економетричної моделі з автокорельованими залишками.

Для оцінювання параметрів економетричної моделі, що має автокореляцію залишків, можна застосувати **узагальнений метод найменших квадратів (метод Ейткена)**, який базується на скоригованій вихідній інформації з урахуванням коваріації залишків.

У розд. 7 було розглянуто метод Ейткена і показано, що система рівнянь для оцінювання параметрів моделі на основі цього методу записується так:

$$(X'V^{-1}X)\hat{A} = X'V^{-1}Y, \quad (8.21)$$

або

$$(X'S^{-1}X)\hat{A} = X'S^{-1}Y, \quad (8.22)$$

де $\hat{A}$ — вектор оцінок параметрів економетричної моделі;

X — матриця пояснювальних змінних;

X' — матриця, транспонована до матриці X ;

S^{-1} — матриця, обернена до матриці кореляції залишків;

V^{-1} — матриця, обернена до матриці V , де $V = \sigma_u^2 S$, а σ_u^2 — залишкова дисперсія;

Y — вектор залежних змінних.

Звідси

$$\hat{A} = (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} Y,$$

або

$$\hat{A} = (X' S^{-1} X)^{-1} X' S^{-1} Y.$$

Отже, щоб оцінити параметри моделі за методом Ейткена, потрібно сформувати матрицю S або V .

Матриця S має вигляд

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \rho^{n-5} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

У цій симетричній матриці ρ^s виражає коефіцієнт автокореляції s -го порядку для залишків u_t . Очевидно, що коефіцієнт автокореляції нульового порядку дорівнює 1.

Оскільки коваріація залишків ρ^s при $s > 2$ часто наближається до нуля, то матриця, обернена до матриці S , матиме такий вигляд:

$$S^{-1} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1 + \rho^2 & -\rho & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 + \rho^2 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.23)$$

Таку матрицю пропонується використовувати для оцінювання параметрів моделі з автокорельованими залишками за методом Ейткена.

Покажемо, як розрахувати циклічний коефіцієнт кореляції.

$$r^0 = \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_t^2},$$

або

$$r^0 = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_t^2},$$

де u_t — величина залишків у період t ; u_{t-1} — величина залишків у період $t-1$; n — кількість спостережень.

Якщо $n \rightarrow \infty$, то $r^* = r^0$.

На практиці $\rho = r^0$.

Зауважимо, що параметр r^0 має зміщення. Тому, використовуючи такий параметр для формування матриці S , можна скоригувати його на величину зміщення

$$r^0_{\text{скор}} = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_t^2} + \frac{m}{n},$$

де $\frac{m}{n}$ — величина зміщення (m — кількість змінних моделі).

Матриця $V = \sigma_u^2 S$, де σ_u^2 — залишкова дисперсія, що визначається за формулою

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{n-m} u'u,$$

де u' — вектор, транспонований до вектора залишків u ; $n-m$ — кількість ступенів свободи.

Дисперсія залишків з урахуванням зміщення обчислюється так:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{n-m} u'u \left[\frac{n - \frac{1+\lambda\rho}{1-\lambda\rho}}{n-1} \right].$$

Значення λ можна обчислити методом 1МНК за допомогою авторегресійного рівняння $x_t = \lambda x_{t-1} + v_t$. У такому разі за 1МНК

$$\lambda = \frac{\sum_{i=2}^n x_i x_{i-1}}{\sum_{i=2}^n x_{i-1}^2},$$

де x_t взято як відхилення від свого середнього значення.

Реалізація алгоритму Ейткена для оцінювання параметрів моделі включає такі п'ять кроків.

Крок 1. Оцінювання параметрів моделі за методом 1МНК.

Крок 2. Дослідження залишків на наявність автокореляції.

Крок 3. Формування матриці коваріації залишків V або S .

Крок 4. Обернення матриці V або S .

Крок 5. Оцінювання параметрів методом Ейткена, тобто згідно з (8.21), (8.22).

✓ **Приклад 8.2.** За допомогою двох взаємозв'язаних часових рядів про роздрібний товарообіг та доходи населення побудувати економетричну модель, що характеризує залежність роздрібного товарообігу від доходу. Вихідні дані наведено в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Роздрібний товарообіг, грош. од.	24,0	25,0	25,7	27,0	28,8	30,8	33,8	38,1	43,4	45,5
Дохід, грош. од.	27,1	28,2	29,3	31,3	34,0	36,0	38,7	43,2	50,0	52,1

Розв'язання

1. Ідентифікуємо змінні моделі:

y_t — роздрібний товарообіг у період t , залежна змінна;

x_t — дохід у період t , пояснювальна змінна.

Звідси

$$y_t = f(x_t, u_t),$$

де u_t — стохастична складова, залишки.

2. Специфікуємо економетричну модель у лінійній формі:

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t;$$

$$\hat{y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_t;$$

$$u_t = y_t - \hat{y}_t.$$

3. Визначаємо оцінки параметрів моделі $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ за методом найменших квадратів, припускаючи, що залишки u_t не корельовані:

$$\hat{A} = (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} Y,$$

де X' — матриця, транспонована до X .

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 27,1 \\ 1 & 28,2 \\ 1 & 29,3 \\ 1 & 31,3 \\ 1 & 34,0 \\ 1 & 36,0 \\ 1 & 38,7 \\ 1 & 43,7 \\ 1 & 50,0 \\ 1 & 52,1 \end{pmatrix};$$

$$(X' X) = \begin{pmatrix} 10 & 370,4 \\ 370,4 & 14441,62 \end{pmatrix}; (X' X)^{-1} = \begin{pmatrix} 2,0002 & -0,513 \\ -0,513 & 0,0014 \end{pmatrix};$$

$$(X' Y) = \begin{pmatrix} 322,1 \\ 12555,09 \end{pmatrix};$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0,597 & 0,416 \\ 0,416 & 0,348 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 196,400 \\ 252,222 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,3 \\ 6,1 \end{pmatrix};$$

$$\hat{a}_0 = 0,172;$$

$$\hat{a}_1 = 0,865.$$

Економетрична модель має вигляд

$$\hat{y}_t = 0,172 + 0,865x_t.$$

4. Знаходимо розрахункові значення роздрібного товарообігу на основі моделі $\hat{y}_t = 0,172 + 0,865x_t$ і визначаємо залишки u_t (табл. 8.2).

Таблиця 8.2

Рік	y_t	$\hat{y}_t$	u_t	u_t^2	$u_t - u_{t-1}$	$(u_t - u_{t-1})^2$	$u_t u_{t-1}$
1	24,0	23,612	0,388	0,150	—	—	—
2	25,0	24,564	0,436	0,190	0,049	0,0024	0,1691
3	25,7	25,515	0,485	0,034	-0,252	0,0632	0,0806
4	27,0	27,245	-0,245	0,060	-0,430	0,1848	-0,045
5	28,8	29,581	-0,779	0,609	-0,535	0,2866	0,1913
6	30,8	31,310	-0,510	0,261	0,270	0,0729	0,3984
7	33,8	33,646	0,154	0,023	0,665	0,4417	-0,0787
8	38,1	37,971	0,129	0,017	-0,025	0,0006	0,0199
9	43,4	43,420	-0,020	0,0002	-0,149	0,0222	-0,003
10	45,5	45,236	0,264	0,070	0,284	0,0804	-0,005
Σ	322,1			1,4152		1,1550	0,7276

Записуємо оцінку критерію Дарбіна—Уотсона:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n u_t^2} = \frac{1,155}{1,4152} = 0,816.$$

Порівнюємо значення критерію DW з табличним для $\alpha = 0,05$ і $n = 10$. Критичні значення критерію DW у цьому разі такі:

$DW_1 = 0,879$ — нижня межа; $DW_2 = 1,320$ — верхня межа.

Оскільки критерій $DW_{\text{факт}} < DW_1$, то можна стверджувати, що залишки u_t мають додатну автокореляцію.

Наявність чи відсутність автокореляції залишків можна також визначити за критерієм фон Неймана.

Критерій фон Неймана $Q = \frac{10}{10-1} DW = 0,906$. Це значення порівнюється з табличним; $Q_{\text{табл}} = 1,18$ при $n = 10$ і рівні значущості $\alpha = 0,05$. Оскільки $Q_{\text{факт}} < Q_{\text{табл}}$, то існує додатна автокореляція залишків.

6. Застосовуюючи метод Ейткена, оцінюємо параметри економетричної моделі з автокорельованими залишками. Оператор оцінювання записуємо так:

$$\hat{A} = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y,$$

де S^{-1} — матриця, обернена до матриці S ; V^{-1} — матриця, обернена до матриці V .

Матриця S — матриця коваріацій залишків вигляду

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 & \rho^7 & \rho^8 & \rho^9 \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 & \rho^7 & \rho^8 \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 & \rho^7 \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 \\ \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 \\ \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 \\ \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ \rho^7 & \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho^8 & \rho^7 & \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \rho^9 & \rho^8 & \rho^7 & \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \end{pmatrix},$$

$$V = \sigma_u^2 S.$$

7. Щоб сформувати матрицю S або V , необхідно визначити величину ρ , яка характеризує взаємозв'язок між послідовними членами ряду залишків. Нехай залишки описуються автокореляційною моделлю першого порядку $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$,

$$\rho \approx r^0 = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_t^2} + \frac{m}{n} = \frac{10}{9} \cdot \frac{0,7276}{1,4156} + \frac{2}{10} = 0,77.$$

Отже, матриця S набирає вигляду:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 & 0,354 & 0,273 & 0,211 & 0,162 & 0,125 & 0,097 \\ 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 & 0,354 & 0,273 & 0,211 & 0,162 & 0,125 \\ 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 & 0,354 & 0,273 & 0,211 & 0,162 \\ 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 & 0,354 & 0,273 & 0,211 \\ 0,354 & 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 & 0,354 & 0,273 \\ 0,273 & 0,354 & 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 & 0,354 \\ 0,211 & 0,273 & 0,354 & 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 & 0,459 \\ 0,162 & 0,211 & 0,273 & 0,354 & 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 & 0,595 \\ 0,125 & 0,162 & 0,211 & 0,273 & 0,354 & 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 & 0,77 \\ 0,097 & 0,125 & 0,162 & 0,211 & 0,273 & 0,354 & 0,459 & 0,595 & 0,77 & 1 \end{pmatrix};$$

$$1) (X^T S^{-1}) = \begin{pmatrix} 0,565 & 0,129 & 0,129 & 0,129 & 0,129 & 0,129 & 0,129 & 0,129 & 0,129 & 0,129 & 0,565 \\ 13,204 & 3,640 & 2,069 & 2,708 & -5,722 & 3,314 & 0,616 & 3,165 & 14,453 & 33,412 \end{pmatrix};$$

$$2) (X^T S^{-1} X) = \begin{pmatrix} 28,56 & 47,26 \\ 52,53 & 51,13 \end{pmatrix};$$

$$3) (X^T S^{-1} X)^{-1} = \begin{pmatrix} -0,08 & 0,07 \\ 0,07 & -0,07 \end{pmatrix};$$

$$4) (X^T S^{-1} Y) = \begin{pmatrix} 71,8148 \\ 3089,991 \end{pmatrix};$$

$$5) \hat{A} = \begin{pmatrix} 3,9815 & -0,0924 \\ -0,0924 & 0,0024 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 71,8148 \\ 3089,991 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,442 \\ 0,861 \end{pmatrix};$$

$$\hat{a}_0 = 0,442; \hat{a}_1 = 0,861.$$

Остаточню дістаємо економетричну модель:

$$\hat{y}_t = 0,442 + 0,861x_t. \quad (1)$$

8. Знайдемо розрахункові значення $\hat{y}_1$ на основі побудованої економетричної моделі та визначимо залишки v_t (табл. 8.3).

Таблиця 8.3

Рік	y_t	$\hat{y}_t$	v_t	v_t^2	$v_t - v_{t-1}$	$(v_t - v_{t-1})^2$	$v_t v_{t-1}$
1	24,0	23,784	0,216	0,0468	—	—	—
2	25,0	24,731	0,269	0,0724	0,0526	0,0028	0,0528
3	25,7	25,678	0,022	0,0005	-0,2774	0,0612	0,0058
4	27,0	27,401	-0,401	0,1608	-0,4226	0,1786	-0,0086
5	28,8	29,727	-0,927	0,8586	-0,5255	0,2762	0,3716
6	30,8	31,449	-0,649	0,4215	0,2774	0,0769	0,6016
7	33,8	33,775	0,025	0,0006	0,6745	0,4549	-0,0164
8	38,1	38,081	0,019	0,0004	-0,0066	0,00004	0,0005
9	43,4	43,508	-0,108	0,0116	-0,1262	0,0159	0,0020
10	45,5	45,316	0,184	0,0937	0,2912	0,0848	0,9908
				1,6069		1,1514	0,9908

9. Обчислимо критерій Дарбіна—Уотсона і фон Неймана:

$$DW = \frac{1,1514}{1,6069} = 0,716.$$

Порівнявши його з критичним значенням при $n = 10$ і $\alpha = 0,05$, коли $DW_{\text{факт}} < DW_1$, дійдемо висновку, що ми не звільнились від автокореляції залишків. Це означає, що вихідна гіпотеза, коли залишки описуються авторегресійною схемою першого порядку, не виконується. Якщо залишки описуються авторегресійною схемою вищого порядку, то доцільно виконати оцінювання параметрів моделі іншими методами, наприклад методом Кочрена—Оркатта або Дарбіна, які буде розглянуто далі.

10. Визначаємо оцінку параметрів моделі, скориставшись оберненою матрицею S^{-1} вигляду:

$$S^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}.$$

Підставивши $\rho = 0,77$, дістанемо:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 2,469 & -1,904 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,904 & 3,938 & -1,904 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,904 & 3,938 & -1,904 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,904 & 3,938 & -1,904 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,904 & 3,938 & -1,904 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,904 & 3,938 & -1,904 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,904 & 3,938 & -1,904 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,904 & 3,938 & -1,904 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,904 & 3,938 & -1,904 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,904 & 3,938 \end{pmatrix}.$$

Вектор оцінок параметрів моделі:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3,9815 & -0,0924 \\ -0,0924 & 0,0024 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 71,8148 \\ 3089,991 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,442 \\ 0,861 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\hat{a}_0 = 0,442$; $\hat{a}_1 = 0,861$, і економетрична модель подається у вигляді

$$\hat{y}_t = 0,442 + 0,861x_t. \quad (2)$$

Порівнюючи економетричні моделі (1) і (2), бачимо, що при оцінюванні параметрів методом Ейткена за допомогою матриці S^{-1} ,

коли коваріація залишків для $S > 2$ відсутня, дістаємо ті самі результати, що й раніше.

8.3.2. Метод перетворення вихідної інформації.

Випадок, коли залишки задовольняють авторегресійну модель першого порядку, допускає альтернативний підхід до пошуку оцінок параметрів моделі за допомогою двокрокової процедури:

1) перетворення вихідної інформації із застосуванням для цього параметра ρ ;

2) застосування 1МНК для оцінювання параметрів на основі перетворених даних.

Для цього треба знайти матрицю перетворення T , щоб модель

$$TY = TXA + Tu \quad (8.24)$$

мала скалярну дисперсійну матрицю

$$M(Tuu'T') = \sigma_u^2 E.$$

Розглянемо матрицю T_1 розміром $n \times n$:

$$T_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.25)$$

Безпосереднім множенням легко переконатися, що

$$M(T_1uu'T_1') = \sigma_u^2 E.$$

А це означає, що можна застосувати 1МНК до перетворених даних T_1Y і T_1X вигляду

$$T_1 Y = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} y_1 \\ y_2 - \rho y_1 \\ y_3 - \rho y_2 \\ y_4 - \rho y_3 \\ \dots \\ y_n - \rho y_{n-1} \end{pmatrix};$$

$$T_1 X = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2} x_1^1 & \dots & \sqrt{1-\rho^2} x_1^m \\ 1-\rho & x_2^1 - \rho x_1^1 & \dots & x_2^m - \rho x_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-\rho & x_n^1 - \rho x_{n-1}^1 & \dots & x_n^m - \rho x_{n-1}^m \end{pmatrix}.$$

Іноді для перетворення вихідної інформації використовується матриця T_2 розміром $(n-1) \times n$, яка отримується з матриці T_2 викреслюванням першого рядка:

$$T_2 = \begin{pmatrix} -\rho & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Неважко показати, що застосування 1МНК до даних $T_1 Y$ і $T_1 X$ дає таку саму оцінку параметрів моделі, як і метод Ейткена, а для даних $T_2 Y$ і $T_2 X$ — забезпечує порівняно добру апроксимацію.

У загальному випадку, коли ми не маємо інформації ні про порядок авторегресійної моделі, ні про значення параметрів у ній, а через це не можемо застосувати ні метод Ейткена, ні метод перетворення вихідної інформації, в економетричній літературі пропонуються наближені методи Кочрена—Оркатта і Дарбіна.

✓ **Приклад 8.3.** Згідно з даними, які наведено в табл. 8.1 (приклад 8.2), необхідно оцінити параметри економетричної

моделі, яка має автокорельовані залишки, методом перетворення вихідної інформації.

Розв'язання

1. Сформуємо матрицю T_1 для перетворення вихідних даних:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0,64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,77 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Перетворимо змінні Y, X на основі матриці T_1 :

$$T_1 Y = \begin{pmatrix} 15,27 \\ 6,49 \\ 6,42 \\ 7,18 \\ 7,97 \\ 8,58 \\ 10,04 \\ 12,03 \\ 14,01 \\ 12,02 \end{pmatrix}; \quad T_1 X = \begin{pmatrix} 0,64 & 17,25 \\ 0,23 & 7,30 \\ 0,23 & 7,55 \\ 0,23 & 8,70 \\ 0,23 & 9,86 \\ 0,23 & 9,77 \\ 0,23 & 10,93 \\ 0,23 & 13,85 \\ 0,23 & 16,29 \\ 0,23 & 13,53 \end{pmatrix}.$$

3. Для перетворених даних скористаємося оператором ІМНК:

$$\hat{A} = (X'X)^{-1} X'Y \rightarrow \hat{A} = (X^{*'} X^*)^{-1} X^{*'} Y^*.$$

Позначимо $T_1 Y_t = Y^*$, $T_1 X_t = X^*$. Тоді маємо

$$3.1. X^{*'}X^* = \begin{pmatrix} 0,8756 & 33,3368 \\ 33,3368 & 1436,007 \end{pmatrix}.$$

$$3.2. X^{*'}Y^* = \begin{pmatrix} 29,1003 \\ 1251,584 \end{pmatrix}.$$

$$3.3. (X^{*'}X^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 9,8299 & -0,2282 \\ -0,2282 & 0,006 \end{pmatrix}.$$

$$3.4. \hat{A} = \begin{pmatrix} 3,9815 & -0,0924 \\ -0,0924 & 0,0024 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 71,8148 \\ 3089,991 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,442 \\ 0,861 \end{pmatrix}.$$

Звідси $\hat{a}_0 = 0,442$; $\hat{a}_1 = 0,861$; економетрична модель:

$$\hat{y}_t = 0,442 + 0,861x_t.$$

Оцінки параметрів моделі, які визначені за методом перетворення вихідної інформації, не відрізняються від оцінок, здобутих методом Ейткена для різних матриць коваріацій залишків. Це означає, що обидва методи є альтернативними, коли залишки — описуються авторегресійною функцією першого порядку.

Деяко відрізняються одна від одної оцінки параметрів моделі, якщо для перетворення вихідних даних використовується матриця T_2 . Так, вектор оцінок

$$\hat{A}' = (-0,862 \quad 0,884).$$

Звідси $\hat{a}_0 = -0,862$; $\hat{a}_1 = 0,884$; економетрична модель:

$$\hat{y}_t = -0,862 + 0,884x_t.$$

✓ **Приклад 8.4.** На основі статистичної інформації, що задана в таблиці (приклад 4.2), необхідно побудувати економетричну модель з автокорельованими залишками.

Місяць	Прибуток, гр. од.	Інвестиції, гр. од.	ОВФ, гр. од.	ФРЧ, людино-днів
t	(Y)	(X ₁)	(X ₂)	(X ₃)

1	39	62	22	104
2	41	65	25	109
3	38	57	17	99
4	42	66	27	114
5	44	69	28	116
6	49	58	20	110
7	44	72	32	119
8	45	70	30	116
9	48	75	34	114
10	51	79	35	120
11	49	77	33	124
12	54	82	37	119
13	55	80	37	129
14	57	75	39	129
15	56	83	38	132
16	54	81	36	130
17	59	87	40	124
18	61	92	42	134
19	62	95	43	137
20	64	97	42	139

Для побудови економетричної моделі необхідно:

1. Дослідити наявність автокореляції.
2. Побудувати матриці S та S^{-1} .
3. Оцінити параметри моделі методом Ейткена.
4. Оцінити параметри моделі на основі перетворення вихідної інформації.
5. Розрахувати точковий та інтервальний прогнози.

6. Зробити порівняльний аналіз кількісних характеристик взаємозв'язку, здобутих ІМНК методом Ейткена у разі гетероскедастичності та автокореляції.

Розв'язання

1. Дослідимо наявність автокореляції.

Спочатку запишемо економетричну модель:

$$y_t = a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + a_3 x_{3t} + u_t ;$$

$$\hat{y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{1t} + \hat{a}_2 x_{2t} + \hat{a}_3 x_{3t} .$$

Припустимо, що наявність автокореляції залишків описується авторегресійною моделлю першого порядку:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t .$$

1а. Для визначення наявності автокореляції залишків застосуємо критерій **Дарбіна—Уотсона**:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n u_t^2} = 2,693.$$

Оскільки критерій DW перевищує число 2, то маємо справу з від'ємною автокореляцією. Табличні значення критерію DW , табульовані для додатної автокореляції. Тому для перевірки суттєвості автокореляції необхідно від верхньої межі існування критерію Дарбіна—Уотсона відняти здобуте значення і його порівнювати з табличними:

$$DW = 2,692560477,$$

$$DW_{\phi} = 1,307439523,$$

$$DW_{1кр} = 1,$$

$$DW_{2кр} = 1,68.$$

Таким чином, $DW_{\Phi} = 4 - 2,693 = 1,307$.

Цю величину будемо порівнювати з нижньою та верхньою межами табличного значення.

Оскільки $DW_1 \leq DW_{\Phi} \leq DW_2$, то існує невизначеність щодо автокореляції. У цьому випадку відхиляємо нульову гіпотезу і приймаємо гіпотезу про наявність автокореляції.

1б. Визначимо критерій фон Неймана:

$$Q = \frac{\sum_{t=2}^n (u_t - u_{t-1})^2 / (n-1)}{\sum_{t=1}^n u_t^2 / n};$$

$$Q = DW \cdot \frac{n}{n-1} = 1,307 \cdot \frac{20}{19} = 1,37.$$

Фактично розраховане значення Q порівнюється з Q критичним (табличним) за довжини часового ряду $n = 20$ і рівня значущості $\alpha = 0,05$. Оскільки фактичне значення Q практично дорівнює табличному ($Q_{\text{табл}} = 1,36$), то існує невизначеність щодо автокореляції.

1в. Визначимо циклічний коефіцієнт автокореляції:

$$r^0 = \frac{\sum_{t=2}^n u_t \cdot u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_t^2} = -0,351.$$

Циклічний коефіцієнт автокореляції від'ємний, оскільки автокореляція є від'ємною. Якщо $|r^0| \leq 0,3$, то автокореляцією можна знехтувати. У нашому випадку автокореляцію потрібно вважати перепорою до застосування методу найменших квадратів, бо $|r^0| > 0,3$.

Оцінимо параметри економетричної моделі узагальненим методом найменших квадратів.

2. Побудуємо матриці S та S^{-1} :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -0,351 & 0,1233 & 09,043 & 0,0152 & -0,005 & 0,0019 & -7E-04 & 0,0002 & -8E-05 \\ -0,351 & 1 & -0,351 & 0,1233 & -0,043 & 0,0152 & -0,005 & 0,0019 & -7E-04 & 0,0002 \\ 0,1233 & -0,351 & 1 & -0,351 & 0,1233 & -0,043 & 0,0152 & -0,005 & 0,0019 & -7E-04 \\ -0,043 & 0,1233 & -0,351 & 1 & -0,351 & 0,1233 & -0,043 & 0,0152 & -0,005 & 0,0019 \\ 0,0152 & -0,043 & 0,1233 & -0,351 & 1 & -0,351 & 0,1233 & -0,043 & 0,0152 & -0,005 \\ -0,005 & 0,0152 & -0,043 & 0,1233 & -0,351 & 1 & -0,351 & 0,1233 & -0,043 & 0,0152 \\ 0,0019 & -0,005 & 0,0152 & -0,043 & 0,1233 & -0,351 & 1 & -0,351 & 0,1233 & -0,043 \\ -7E-04 & 0,0019 & -0,005 & 0,0152 & -0,043 & 0,1233 & -0,351 & 1 & -0,351 & 0,1233 \\ 0,0002 & -7E-04 & 0,0019 & -0,005 & -0,0152 & -0,043 & 0,1233 & -0,351 & 1 & -0,351 \\ -8E-05 & 0,0002 & -7E-04 & 0,0019 & -0,005 & 0,0152 & -0,043 & 0,1233 & -0,351 & 1 \\ 3E-05 & -8E-06 & 0,0002 & -7E-04 & 0,0019 & -0,005 & 0,0152 & -0,043 & 0,1233 & -0,351 \\ -1E-05 & 3E-05 & -8E-05 & 0,0002 & -7E-04 & 0,0019 & -0,005 & 0,0152 & -0,043 & 0,1233 \\ 4E-06 & -1E-05 & 3E-05 & -8E-05 & 0,0002 & -7E-04 & 0,0019 & -0,005 & 0,0152 & -0,043 \\ -1E-06 & 4E-06 & -1E-05 & 3E-05 & -8E-05 & 0,0002 & -7E-04 & 0,0019 & -0,005 & 0,0152 \\ 4E-07 & -1E-06 & 4E-06 & -1E-05 & 3E-05 & -8E-05 & 0,0002 & -7E-04 & 0,0019 & -0,005 \\ -2E-07 & 4E-07 & -1E-06 & 4E-06 & -1E-05 & 3E-05 & -8E-05 & 0,0002 & -7E-04 & 0,0019 \\ 5E-08 & -2E-07 & 4E-07 & -1E-06 & 4E-06 & -1E-05 & 3E-05 & -8E-05 & 0,0002 & -7E-04 \\ -2E-08 & 5E-08 & -2E-07 & 4E-07 & -1E-06 & 4E-06 & -1E-05 & 3E-05 & -8E-05 & 0,0002 \\ 7E-09 & -2E-08 & 5E-08 & -2E-07 & 4E-07 & -1E-06 & 4E-06 & -1E-05 & 3E-05 & -8E-05 \\ -2E-09 & 7E-09 & -2E-08 & 5E-08 & -2E-07 & 4E-07 & -1E-06 & 4E-06 & -1E-06 & 3E-05 \end{pmatrix}$$

$3E-05$	$-1E-06$	$4E-06$	$-1E-06$	$4E-07$	$-2E-07$	$5E-08$	$2E-08$	$7E-09$	$-2E-0?$
$-8E-05$	$3E-05$	$-1E-05$	$4E-06$	$-1E-06$	$4E-07$	$-2E-07$	$5E-08$	$-2E-08$	$7E-0?$
$0,0002$	$-8E-05$	$3E-05$	$-1E-05$	$4E-06$	$-1E-06$	$4E-07$	$-2E-07$	$5E-08$	$-2E-0?$
$-7E-04$	$0,0002$	$-8E-05$	$3E-05$	$-1E-05$	$4E-06$	$-1E-06$	$4E-07$	$-2E-07$	$6E-0?$
$0,0019$	$-7E-04$	$0,0002$	$-8E-05$	$3E-05$	$-1E-05$	$4E-06$	$-1E-06$	$4E-07$	$-2E-07$
$-0,005$	$0,0019$	$-7E-04$	$0,0002$	$-8E-05$	$3E-05$	$-1E-05$	$4E-06$	$-1E-06$	$4E-07$
$0,0152$	$-0,005$	$0,0019$	$-7E-04$	$0,0002$	$-8E-05$	$3E-05$	$-1E-05$	$4E-06$	$-1E-06$
$-0,043$	$0,0152$	$-0,005$	$0,0019$	$-7E-04$	$0,0002$	$-8E-05$	$3E-05$	$-1E-05$	$4E-06$
$0,1233$	$-0,043$	$0,0152$	$-0,005$	$0,0019$	$-7E-04$	$0,0002$	$-8E-05$	$3E-05$	$-1E-05$
$-0,351$	$0,1233$	$-0,043$	$0,0152$	$-0,005$	$0,0019$	$-7E-04$	$0,0002$	$-8E-05$	$3E-05$
1	$-0,351$	$0,1233$	$-0,043$	$0,0152$	$-0,005$	$0,0019$	$-7E-04$	$0,0002$	$-8E-05$
$-0,351$	1	$-0,351$	$0,1233$	$-0,043$	$0,0152$	$-0,005$	$0,0019$	$-7E-04$	$0,0002$
$0,1233$	$-0,351$	1	$-0,351$	$0,1233$	$-0,043$	$0,0152$	$-0,005$	$0,0019$	$-7E-04$
$-0,043$	$0,1233$	$-0,351$	1	$-0,351$	$0,1233$	$-0,043$	$0,0152$	$-0,005$	$0,0019$
$0,0152$	$-0,043$	$0,1233$	$-0,351$	1	$-0,351$	$0,1233$	$-0,043$	$0,0152$	$-0,005$
$-0,005$	$0,0152$	$-0,043$	$0,1233$	$-0,351$	1	$-0,351$	$0,1233$	$-0,043$	$0,0152$
$0,0019$	$-0,005$	$0,0152$	$-0,043$	$0,1233$	$-0,351$	1	$-0,351$	$0,1233$	$-0,043$
$-7E-04$	$0,0019$	$-0,005$	$0,0152$	$-0,043$	$0,1233$	$-0,351$	1	$-0,351$	$0,1233$
$0,0002$	$-7E-04$	$0,0019$	$-0,005$	$0,0152$	$-0,043$	$0,1233$	$-0,3561$	1	$-0,351$
$-8E-06$	$0,0002$	$-7E-04$	$0,0019$	$-0,005$	$0,0152$	$-0,043$	$0,1233$	$-0,351$	1

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1,1406 & 0,4005 & -4E-18 & 3E-18 & 4E-37 & -5E-19 & 2E-19 & 1E-19 & 1E-20 & -2E-21 \\ 0,4005 & 1,2812 & 0,4005 & 3E-36 & 2E-17 & 2E-19 & -5E-19 & 4E-19 & 2E-19 & -2E-20 \\ -7E-37 & 0,4005 & 1,2812 & 0,4005 & 4E-17 & 1E-18 & -2E-18 & -2E-19 & 2E-19 & 5E-20 \\ 4E-38 & 3E-18 & 0,4005 & 1,2812 & 0,4005 & -4E-18 & 8E-20 & 1E-18 & 2E-18 & -2E-19 \\ -7E-36 & 9E-18 & 4E-17 & 0,4005 & 1,2812 & 0,4005 & -2E-19 & 2E-17 & -4E-18 & -2E-18 \\ 2E-19 & 3E-18 & 1E-17 & -3E-18 & 0,4005 & 1,2812 & 0,4005 & 4E-17 & 9E-18 & -4E-18 \\ 6E-19 & 2E-18 & 2E-18 & -8E-18 & 3E-18 & 0,4005 & 1,2812 & 0,4005 & 3E-17 & 8E-18 \\ 2E-19 & 7E-19 & 8E-19 & -2E-18 & 6E-18 & 3E-17 & 0,4005 & 1,2812 & 0,4005 & 1E-17 \\ 5E-21 & 1E-19 & 2E-19 & -2E-18 & -6E-18 & 2E-18 & 2E-17 & 0,4005 & 1,2812 & 0,4005 \\ -2E-20 & -6E-20 & -3E-20 & -5E-19 & -3E-18 & -4E-18 & 3E-18 & 2E-17 & 0,4005 & 1,2812 \\ -5E-21 & -2E-20 & 2E-20 & 2E-19 & -2E-19 & -3E-18 & -9E-18 & -5E-18 & 2E-17 & 0,4005 \\ -1E-36 & -3E-21 & 6E-21 & 1E-19 & 2E-19 & -8E-19 & -4E-18 & -8E-18 & 4E-18 & -2E-17 \\ 4E-38 & -9E-22 & -2E-21 & 2E-20 & 9E-20 & 1E-19 & -3E-19 & -2E-18 & -4E-18 & -1E-17 \\ 4E-23 & -2E-22 & -5E-22 & -1E-21 & 2E-20 & 7E-20 & 1E-19 & -3E-20 & -1E-18 & -3E-16 \\ 1E-22 & 2E-22 & 3E-2 & 2E-21 & 1E-20 & 4E-20 & 8E-20 & 2E-19 & 3E-19 & 7E-34 \\ 8E-24 & 3E-23 & 7E-23 & 4E-22 & 5E-21 & 2E-20 & 3E-20 & 1E-19 & 2E-19 & 1E-34 \\ -1E-23 & -5E-23 & -1E-22 & -4E-22 & 1E-22 & 2E-21 & 5E-21 & 2E-20 & 1E-19 & 2E-20 \\ -7E-40 & -3E-23 & -3E-23 & -2E-22 & -9E-22 & -1E-21 & 2E-37 & -4E-21 & 2E-20 & 6E-20 \\ -9E-40 & -9E-24 & -1E-23 & -3E-23 & -2E-22 & -4E-22 & -3E-22 & -2E-21 & -4E-21 & 6E-21 \\ -5E-40 & -2E-24 & -4E-24 & -1E-23 & 9E-24 & -2E-23 & -7E-22 & -1E-21 & -1E-21 & -2E-21 \end{pmatrix}$$

$-2E-21$	$1E-21$	$-1E-21$	$-2E-22$	$1E-22$	$-1E-24$	$-2E-23$	$-3E-24$	$-4E-25$	0
$-1E-20$	$-3E-21$	$-3E-21$	$-6E-22$	$-3E-22$	$-6E-23$	$-7E-23$	$-5E-24$	$-4E-24$	$9E-25$
$3E-20$	$7E-21$	$-3E-21$	$-6E-22$	$3E-22$	$-2E-22$	$-1E-22$	$2E-23$	$-4E-24$	0
$3E-19$	$9E-20$	$7E-21$	$-2E-21$	$1E-21$	$-2E-22$	$-4E-22$	$4E-23$	$-8E-24$	0
$-8E-20$	$2E-19$	$3E-20$	$7E-21$	$5E-21$	$1E-21$	$-3E-22$	$-6E-22$	$-2E-22$	$3E-23$
$-3E-18$	$-6E-19$	$9E-20$	$3E-20$	$4E-20$	$2E-20$	$1E-21$	$-1E-21$	$-6E-22$	$-6E-23$
$-7E-18$	$-4E-18$	$-6E-19$	$9E-20$	$9E-20$	$4E-20$	$5E-21$	$1E-22$	$-1E-21$	$-7E-22$
$3E-18$	$-7E-18$	$-3E-18$	$-1E-19$	$3E-19$	$1E-19$	$4E-20$	$-1E-22$	$-4E-21$	$-1E-21$
$6E-17$	$1E-17$	$-8E-19$	$-2E-18$	$-5E-20$	$2E-19$	$1E-19$	$4E-20$	$-8E-21$	0
0,4005	$5E-18$	$-5E-18$	$-3E-18$	$-1E-18$	$-5E-19$	$-2E-20$	$1E-19$	$1E-20$	$-4E-21$
1,2812	0,4005	$-7E-17$	$4E-18$	$3E-18$	$-2E-18$	$-1E-18$	$-1E-19$	$5E-20$	$2E-20$
0,4005	1,2812	0,4005	$-4E-17$	$-5E-18$	$-5E-18$	$-3E-18$	$-7E-19$	$-2E-20$	$3E-20$
$-6E-17$	0,4005	1,2812	0,4005	$-7E-17$	$-5E-18$	$-1E-18$	$-2E-18$	$-4E-19$	$-1E-19$
$2E-18$	$-7E-17$	0,40056	1,2812	0,4005	$-4E-17$	$4E-18$	$-2E-18$	$-2E-18$	$-5E-19$
$-2E-19$	$-2E-17$	$-8E-17$	0,4005	1,2812	0,4005	$-5E-17$	$-2E-18$	$-1E-18$	$-2E-18$
$-2E-18$	$-8E-18$	$-1E-17$	$-7E-17$	0,4005	1,2812	0,4005	$-7E-17$	$-3E-18$	$-2E-18$
$-9E-19$	$-4E-18$	$-5E-18$	$-8E-18$	$-7E-17$	0,4005	1,2812	0,4005	$-8E-17$	0
$-3E-20$	$-7E-19$	$-3E-18$	$-5E-18$	$-8E-18$	$-7E-17$	0,4005	1,2812	0,4005	$-8E-17$
$1E-19$	$-4E-21$	$-4E-19$	$-3E-18$	$-5E-18$	$-8E-18$	$-8E-17$	0,4005	1,2812	0,4005
$2E-20$	$3E-20$	$-1E-20$	$-6E-19$	$-2E-18$	$-4E-18$	$-4E-18$	$-9E-17$	0,4005	1,1406

Розрахуємо оцінки параметрів моделі методом Ейткена, застосувавши $\hat{A} = (XS^{-1}X)^{-1}XS^{-1}Y$.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -20,73795801 \\ 0,241772267 \\ 0,073860021 \\ 0,417830605 \end{pmatrix}.$$

Економетрична модель прибутку запишеться так:

$$\hat{Y} = -20,74 + 0,24X_1 + 0,07X_2 + 0,42X_3.$$

4. Оцінімо параметри моделі на основі перетворення вихідної інформації. Для цього побудуємо матрицю T_1 :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Помноживши матрицю T_1 на вектор Y та матрицю X , дістанемо скориговану інформацію:

Y^*	X_0^*	X_1^*	X_2^*	X_3^*
36,51706949	0,936335115	58,05277713	20,59937253	97,37885196
54,69319671	1,351107608	86,7686717	32,72436738	145,5151912
52,39541193	1,351107608	79,82199452	25,7776902	137,2707293
55,3420891	1,351107608	86,01313366	32,69882934	148,7596532
58,74651954	1,351107608	92,17310213	37,47990542	156,0262673
64,44873475	1,351107608	82,22642495	29,83101302	150,7284825
61,20427279	1,351107608	92,36424126	39,02215216	157,6218369
60,44873475	1,351107608	95,27974778	41,23544346	157,7818054
63,79984236	1,351107608	99,57753256	44,53322824	154,7284825
67,85316518	1,351107608	105,3330706	46,93765867	160,0262673
66,90648801	1,351107608	104,737501	45,28876628	166,132913
71,20427279	1,351107608	109,0352858	48,58655106	162,5373434
73,95981083	1,351107608	108,7908239	49,9909815	170,7818054
76,31091844	1,351107608	103,0886086	51,9909815	174,2928814
76,01313366	1,351107608	109,3330706	51,69319671	177,2928814
73,6202605	1,351107608	110,1419315	49,3420891	176,3462043
77,95981083	1,351107608	115,4397162	52,63987389	169,643989
81,71534887	1,351107608	122,5463619	56,04430432	177,5373434
83,41756409	1,351107608	127,3018999	57,74651954	184,0484195
85,7686717	1,351107608	130,3552228	57,09762714	187,1017423

Застосувавши функцію «Лінійн» (Excel) до перетвореної інформації, дістанемо:

$$\text{Вектор оцінок параметрів моделі: } \hat{A} = \begin{pmatrix} -20,737958 \\ 0,241773 \\ 0,073860 \\ 0,417831 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, він повністю збігається з раніше розрахованим на основі матриці S^{-1} .

8.3.3. Метод Кочрена—Оркатта. Нехай задано економетричну модель

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t, \quad t = \overline{1, n}; \quad (8.26)$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\rho| < 1.$$

Перетворивши вихідну інформацію за допомогою ρ , дістанемо:

$$y_t - \rho y_{t-1} = a_0(1 - \rho) + a_1(x_t - \rho x_{t-1}) + \varepsilon_t. \quad (8.27)$$

У цій моделі залишки ε_t мають скалярну дисперсійну матрицю.

Сума квадратів залишків на основі (8.27) визначатиметься співвідношенням

$$\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 = \sum_{t=2}^n [(y_t - \rho y_{t-1}) - a_0(1 - \rho) - a_1(x_t - \rho x_{t-1})]^2. \quad (8.28)$$

Безпосередня мінімізація функції (8.28) приводить до системи нелінійних рівнянь, тому аналітичний вираз оцінок параметрів $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ і ρ дістати важко.

Метод наближеного пошуку параметрів $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ і ρ , які мінімізують суму квадратів (8.28), дає ітеративний метод, запропонований Кочреном і Оркаттом.

Опишемо його алгоритм.

Крок 1. Довільно вибирають значення параметра ρ , наприклад $\rho = r_1^0$. Підставивши його в (8.28), обчислюють $\hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1^{(1)}$.

Крок 2. Узявши $\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1 = \hat{a}_1^{(1)}$, підставимо їх у (8.28) і обчислимо $\rho = r_1^0$.

Крок 3. Підставивши в співвідношення (8.28) значення $\rho = r_2$, знайдемо $\hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1^{(2)}$.

Крок 4. Використаємо $\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1 = \hat{a}_1^{(2)}$ для мінімізації суми квадратів залишків (8.27) за невідомим параметром $\rho = r_3^0$. Процедура триває доти, доки наступні значення параметрів $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ і ρ не будуть відрізнятись менш як на задану величину.

Цей ітеративний метод, як і інші аналогічні процедури, має дві проблеми:

а) збіжності;

б) характеру знайденого мінімуму — локальний чи глобальний.

Проведені дослідження [2] за цими двома проблемами показали, що в результаті застосування методу Кочрена—Оркатта завжди знаходимо глобальний оптимум і алгоритм забезпечує порівняно добру збіжність.

Часто пропонується альтернативний підхід до використання цього ітеративного методу.

На відміну від попереднього в ньому подальші ітерації припиняються тоді, коли на основі критерію Дарбіна—Уотсона робиться висновок про відсутність автокореляції залишків.

Розглянемо алгоритм

Крок 1. Приймається гіпотеза $\rho = r_1 = 0$ і мінімізується на основі 1МНК сума квадратів: $\sum_{t=1}^n (y_t - \hat{a}_0^{(1)} - \hat{a}_1^{(1)} x_t)^2$. Знаходяться оцінки параметрів $\hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1^{(1)}$.

Крок 2. Знаходяться залишки і на основі критерію Дарбіна—Уотсона перевіряється нульова гіпотеза відносно автокореляції залишків. Якщо гіпотеза відхиляється, то переходять до кроку 3.

Крок 3. На цьому кроці мінімізується сума квадратів залишків:

$$\sum_{t=1}^n \left[(y_t - \hat{a}_0^{(1)} - \hat{a}_1^{(1)} x_t) - \rho (y_{t-1} - \hat{a}_0^{(1)} - \hat{a}_1^{(1)} x_{t-1}) \right]^2,$$

де $\hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1^{(1)}$ — оцінки параметрів, знайдені на першому кроці 1МНК. У результаті параметр $\rho = r_2^0$ визначається як коефіцієнт регресії залишків, знайдених 1МНК.

Крок 4. Використовуючи значення оцінки параметра r_2^0 , визначають оцінки параметрів $\hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1^{(2)}$ на основі 1МНК, який застосовується до перетворених даних $(y_t - r_2^0 y_{t-1})$ і $(x_t - r_2^0 x_{t-1})$.

Крок 5. Визначаються залишки і перевіряються на наявність автокореляції. Якщо гіпотеза про наявність автокореляції відхиляється, то ітеративний процес припиняється. У протилежному випадку переходимо до кроку 3, де використовуються знайдені оцінки параметрів $\hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1^{(2)}$.

Коли ітеративний процес припиняється, то виконується перевірка значущості параметрів для останньої економетричної

моделі. У цьому випадку звичайні формули дадуть обґрунтовані оцінки дисперсій залишків.

8.3.4. Метод Дарбіна. Дарбін запропонував просту двокрокову процедуру, яка також дає оцінки параметрів. Вони асимптотично мають той самий вектор середніх і ту саму матрицю дисперсій, що й оцінки за методом найменших квадратів.

Крок 1. Підставимо значення залишків, яке підпорядковане авторегресійній моделі першого порядку $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, в економетричну модель $y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t$. Тоді дістанемо $y_t = a_0 + a_1 x_t + \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, де $u_{t-1} = y_{t-1} - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_{t-1}$.

Звідси $y_t = a_0(1-\rho) + \rho y_{t-1} + a_1 x_t - a_1 \rho x_{t-1} + \varepsilon_t$, де ε_t має скалярну матрицю дисперсій.

Згідно з 1МНК визначаються параметри цієї моделі, куди входить і коефіцієнт ρ . У результаті обчислень маємо $\rho = r'$.

Крок 2. Значення $\rho = r'$ використовується для перетворення змінних $(y_t - r' y_{t-1})$ і $(x_t - r' x_{t-1})$, а 1МНК застосовується до перетворених даних. Коефіцієнт при $(x_t - r' x_{t-1})$ є оцінкою параметра a_1 , а вільний член, поділений на $1 - r'$, оцінює параметр a_0 .

Метод Дарбіна дуже просто поширюється на випадок кількох незалежних змінних і для автокореляції вищих порядків.

Нехай задано модель

$$y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + \dots + a_m x_{mt} + u_t, \quad (8.29)$$

де $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$.

Підставивши значення u_t в (8.29), дістанемо:

$$y_t = \rho_1 y_{t-1} + \rho_2 y_{t-2} + \hat{a}_1 x_{1t} + \dots + \hat{a}_m x_{mt} - \rho_1 \hat{a}_1 x_{1,t-1} - \dots - \rho_1 \hat{a}_m x_{m,t-1} - \rho_2 \hat{a}_1 x_{1,t-2} - \dots - \rho_2 \hat{a}_m x_{m,t-1} + \varepsilon_t.$$

Застосувавши 1МНК, обчислимо параметри цієї моделі. Коефіцієнти $\rho_1 = r_1$ і $\rho_2 = r_2$ використаємо для перетворення даних:

$$(y_t - r_1 y_{t-1} - r_2 y_{t-2}), \quad (x_{jt} - r_1 x_{j,t-1} - r_2 x_{j,t-2}), \quad j = \overline{1, m}, \quad t = \overline{1, n}.$$

Знову застосуємо 1МНК для цих перетворених даних і знайдемо оцінки параметрів моделі $\hat{a}_0, \hat{a}_j (j = \overline{1, m})$.

Описаний щойно ітеративний метод Кочрена—Оркатта і розглянута двокрокова процедура Дарбіна за наявності автокореляції залишків асимптотично ефективніші, ніж 1МНК.

Але при цьому постають два важливі запитання:

1) Чи будуть ці методи ефективнішими, ніж 1МНК, для малих вибірових сукупностей?

2) Якою — однаковою чи різною — буде ефективність застосування методів Кочрена—Оркатта і Дарбіна для малих вибірок?

Чисельний аналіз, виконаний Гриліхесом і Рао [2] за допомогою методу Монте-Карло, дав відповідь на ці запитання.

Висновок 1. 1МНК дає менш ефективні оцінки порівняно з іншими методами, якщо сукупність спостережень $n = 20$ одиниць, а $|\rho| > 0,3$.

Висновок 2. Якщо $|\rho| < 0,3$, то зниження ефективності оцінок 1МНК порівняно зі складнішими процедурами невелике.

Висновок 3. Метод Дарбіна забезпечує найкращу оцінку для більшого кола параметрів порівняно з іншими методами.

Висновок 4. Нелінійний метод оцінювання параметрів не дає відчутних переваг порівняно з двокроковою процедурою Дарбіна.

8.4. Прогноз

Теоретичні дослідження прогнозу в разі порушення умови (4.3) було розглянуто в розд. 7.

Нехай маємо модель: $Y = XA + u$, де $M(u) = 0$ і $M(uu') = \sigma_u^2 S = V$, яка побудована для n спостережень.

Використаємо цю модель для визначення прогнозу залежної змінної $\hat{y}_{n+1}$ для періоду $n + 1$, коли в цьому періоді задано незалежну змінну x_{n+1} . Формула дає найкращий незміщений прогноз:

$$\hat{y}_{n+1} = x_{n+1} \hat{A} + W' V^{-1} u,$$

де $\hat{A}$ — оцінка параметрів моделі за методом Ейткена,

$$u = Y - X\hat{A}$$

і W — вектор коваріації розрахованих залишків для n спостережень і прогнозних залишків u_{n+1} :

$$W = \begin{bmatrix} M(\hat{u}_1 u_{n+1}) \\ M(\hat{u}_2 u_{n+1}) \\ M(\hat{u}_3 u_{n+1}) \\ \dots \\ M(\hat{u}_n u_{n+1}) \end{bmatrix}.$$

Якщо залишки описуються авторегресійною моделлю першого порядку, то з урахуванням рівності $M(u_t u_{t-s}) = \rho^s \sigma_u^2$ можна записати:

$$W = \rho^s \sigma_u^2 \begin{bmatrix} \rho^{n-1} \\ \rho^{n-2} \\ \rho^{n-3} \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Отже, вектор W можна дістати, помноживши ρ на останній стовпець матриці V . Але оскільки $VV^{-1} = E$, то добуток WV^{-1} являє собою останній рядок матриці E , помножений на ρ .

Звідси $W'V^{-1}u_n = \rho u_n$.

Формула прогнозу має такий вигляд

$$\hat{y}_{n+1} = x_{n+1}\hat{A} + \rho u_n, \quad (8.30)$$

де $\hat{y}_{n+1}$ — прогнозний рівень залежної змінної; x_{n+1} — прогнозне значення незалежної змінної.

✓ **Приклад 8.5.** Використовуючи економетричну модель, яку побудовано за даними про роздрібний товарообіг та дохід (приклад 8.2), визначити прогнозний рівень товарообігу, коли дохід становитиме $x_{n+1} = 55$.

Розв'язання

1. Запишемо співвідношення, яке визначатиме прогнозний рівень залежної змінної

$$\hat{y}_{n+1} = X_{n+1} \hat{A} + \rho u_n,$$

де $X_{n+1} \hat{A}$ — точкова оцінка прогнозованої залежної змінної; ρu_n — залишки прогнозу, а u_n — залишки періоду $t(t = n)$, здобуті згідно з ІМНК.

2. Скористаємося економетричною моделлю роздрібного товарообігу (приклад 8.2) для обчислення прогнозу:

$$\hat{y}_{n+1} = 0,442 + 0,861x_{n+1} = 0,442 + 0,861 \cdot 55 = 0,442 + 47,35 = 47,8.$$

3. Знайдемо оцінку залишків прогнозу $\rho \hat{u}_n$, де ρ — коефіцієнт коваріації залишків; $\hat{u}_n$ — залишки за моделлю для $t = 10$.

$$\rho = 0,77; \quad \hat{u}_n = 0,18;$$

$$\rho \hat{u}_n = 0,77 \cdot 0,18 \approx 0,14.$$

4. Визначимо точковий прогнозний рівень роздрібного товарообігу на одинадцятий рік ($n + 1$):

$$\hat{y}_{n+1} = 47,8 + 0,14 = 47,94.$$

✓ **Приклад 8.6.** Виконаємо точковий та інтервальний прогноз прибутку на основі економетричної моделі, здобутої у прикладі 8.4.

Спочатку задамо очікувані значення пояснювальних змінних:

$$X_{\text{пр}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 90 \\ 43 \\ 135 \end{pmatrix}; \quad X'_{\text{пр}} = (1 \quad 90 \quad 43 \quad 135);$$

точковий прогноз прибутку на основі моделі запишеться так:

$$\hat{y}_{\text{пр}} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1^{\text{пр}} + \hat{a}_2 x_2^{\text{пр}} + \hat{a}_3 x_3^{\text{пр}} + \rho u_n;$$

$$\hat{y}_{\text{пр}} = -20,74 + 0,24 \cdot 90 + 0,07 \cdot 43 + 0,417 \cdot 135 - 0,351 \cdot (-0,917) = 60,385.$$

Для визначення інтервального прогнозу розрахуємо стандартну похибку прогнозу за формулою:

$$S_{y_{\text{пр}}} = \sqrt{\sigma_u^2 X'_{\text{пр}} (X' S^{-1} X) X_{\text{пр}}}; \quad S_{y_{\text{пр}}} = 0,806120762.$$

Визначимо граничну похибку прогнозу за формулою:

$$\sigma_{y_{\text{пр}}} = t_{(\alpha)_{\text{крит}}} \cdot S_{y_{\text{пр}}}; \quad \alpha = 0,05; \quad \sigma_{y_{\text{пр}}} = 1,407393517.$$

Додавши граничну похибку до точкового прогнозу, дістанемо максимально можливий рівень прибутку:

$$y_{\text{пр max}} = \hat{y}_{\text{пр}} + \sigma_{y_{\text{пр}}} = 60,385 + 1,407 = 61,792.$$

Віднявши граничну похибку від точкового прогнозу, дістанемо мінімально можливий рівень прибутку:

$$y_{\text{пр min}} = \hat{y}_{\text{пр}} - \sigma_{y_{\text{пр}}} = 60,385 - 1,407 = 58,978.$$

У результаті маємо: $58,978 \leq y_{\text{пр}} \leq 61,792$.

Порівняємо отримані значення прогнозу прибутку зі значеннями прогнозу, здобутими на основі оцінок моделей за 1МНК:

$$\hat{y}_{\text{пр}} = 60,06341527;$$

$$y_{\text{пр max}} = 62,17325357;$$

$$y_{\text{пр min}} = 57,95357697.$$

Як бачимо, точковий та інтервальний прогнози прибутку на основі економетричних моделей, параметри яких оцінені 1МНК та УМНК, відрізняються в даному випадку несуттєво. Зауважимо, що оцінки за УМНК та кількісні характеристики, здобуті на основі цих оцінок, ніколи не будуть гіршими ніж за 1МНК.



8.5. Стислі висновки

1. Часто під час побудови економетричної моделі стикаються з порушенням другої необхідної умови для застосування 1МНК, коли $M(uu') = \sigma_u^2 S$, де матриця S ($n \times n$) характеризує коваріації між залишками, а дисперсія лишається сталою. Це явище

спостерігається насамперед тоді, коли економетрична модель будується на основі часових рядів і називається автокореляцією залишків.

2. Виникнення автокореляції залишків пов'язане ось із чим:

1) автокореляцією послідовних елементів векторів залежної і незалежних змінних;

2) автокореляцією послідовних значень змінної (змінних), які не ввійшли до економетричної моделі;

3) помилковою специфікацією економетричної моделі.

3. Оскільки коваріація послідовних значень залишків подається у вигляді

$$\rho^s = \frac{M(u_t u_{t-s})}{\sigma_u^2},$$

то друга з необхідних умов записується так:

$$M(uu') = \sigma_u^2 S,$$

де S — матриця коефіцієнтів коваріацій s -го порядку для елементів ряду u_t або $M(uu') = V$, де $V = \sigma_u^2 S$.

4. За наявності автокореляції залишків оцінювання параметрів моделі 1МНК може мати такі результати:

1) оцінки параметрів моделі будуть зміщеними;

2) статистичні критерії Стюдента (t -критерій) і Фішера (F -критерій) не можуть бути використані в дисперсійному аналізі економетричної моделі;

3) неефективність оцінок параметрів економетричної моделі призводить до неефективних прогнозів.

5. Наявність автокореляції перевіряється за такими критеріями:

1) Дарбіна—Уотсона — $DW(d)$;

2) фон Неймана — Q ;

3) нециклічного коефіцієнта автокореляції r^* ;

4) циклічного коефіцієнта автокореляції r^0 .

6. Для оцінювання параметрів моделі з автокорельованими залишками можна застосувати такі методи:

1) Ейткена;

2) перетворення вихідної інформації;

3) Кочрена—Оркатта;

4) Дарбіна.

Перші два методи використовуються тоді, коли залишки задовольняють авторегресійну модель першого порядку, третій і

четвертий можна застосувати і тоді, коли залишки описуються авторегресійною моделлю вищого порядку.

7. Метод Ейткена базується на скоригованій вихідній інформації з урахуванням коваріації залишків. Система рівнянь для оцінювання параметрів моделі запишеться так:

$$(X'V^{-1}X)\hat{A} = X'V^{-1}Y,$$

або

$$(X'S^{-1}X)\hat{A} = X'S^{-1}Y.$$

Звідси оператор оцінювання за методом Ейткена має такий вигляд

$$\hat{A} = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}Y$$

або

$$\hat{A} = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y.$$

Матриця S у цьому операторі:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \rho^{n-5} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки коваріація залишків ρ^s при $s > 2$ часто наближається до нуля, то матрицю, обернену до S , іноді доцільно подавати у такому вигляді

$$S^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Метод перетворення вихідної інформації дає альтернативний підхід до пошуку оцінок параметрів моделі за допомогою двокрокової процедури:

1) перетворення вихідної інформації за допомогою параметра ρ ;

2) застосування 1МНК для оцінок параметрів згідно з перетвореними даними.

Доведено, що $M(T_1 u u' T_1') = \sigma_u^2 E$, тому перетворення вихідної інформації виконується за допомогою такої матриці:

$$T_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

розміром $n \times n$.

Іноді для перетворення вихідної інформації використовується матриця T_2 розміром $(n-1) \times n$, яка утворюється з матриці T_1 викреслюванням першого рядка:

$$T_2 = \begin{pmatrix} -\rho & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Метод Кочрена—Оркатта є ітеративним методом оцінювання параметрів економетричної моделі, коли мінімізується сума квадратів залишків, яка для моделі

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t,$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

визначається так:

$$\sum_{t=2}^n \varepsilon_t^2 = \sum_{t=2}^n [(y_t - \rho y_{t-1}) - a_0(1-\rho) - a_1(x_t - \rho x_{t-1})]^2.$$

Для мінімізації цієї функції використовується наведений далі алгоритм.

Крок 1. Довільно вибираємо значення параметра ρ , наприклад $\rho = r_1$, і підставляємо у співвідношення, яке визначає суму квадратів залишків, а на основі 1МНК знаходимо параметри $\hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1^{(1)}$.

Крок 2. Узявши $\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{(1)}$ і $\hat{a}_1 = \hat{a}_1^{(1)}$, підставимо їх у співвідношення, яке визначає суму квадратів залишків, та обчислимо $\rho = r_2$.

Крок 3. Підставивши $\rho = r_2$, знайдемо оцінки параметрів $\hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1^{(2)}$.

Крок 4. Використовуємо $\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{(2)}$ і $\hat{a}_1 = \hat{a}_1^{(2)}$ для мінімізації суми квадратів залишків за невідомим параметром $\rho = r_3$ і т. д. Процедура триває доти, доки наступні значення параметрів $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ і ρ практично не відрізнятимуться від попередніх або відрізнятимуться на задану величину.

10. Метод Дарбіна також є ітеративним методом, який складається з двокрокової процедури. На першому кроці визначаються 1МНК оцінки параметрів моделі

$$y_t = a_0 + \sum_j a_j x_{tj} + u_t,$$

де $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, або $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$ і т. д.

На другому кроці 1МНК застосовується для перетворених даних з допомогою параметра ρ , який визначено на першому кроці, тобто змінні наберуть вигляду $(y_t - \rho y_{t-1})$, $(x_{tj} - \rho x_{tj-1})$.

Коефіцієнт при $x_{tj} - \rho x_{tj-1}$ є оцінкою параметра a_j , а вільний член, поділений на ρ , — оцінкою параметра a_0 .

11. Оцінку прогнозного рівня залежної змінної можна дістати, скориставшись таким співвідношенням:

$$\hat{y}_{n+1} = X_{n+1} \hat{A} + W' V^{-1} u,$$

де $\hat{A}$ — вектор оцінок параметрів моделі з автокорельованими залишками $u = Y - X\hat{A}$. Оскільки $W' V^{-1} u_n = \rho u_n$, то формула найкращого незміщеного прогнозу запишеться у вигляді:

$$\hat{y}_{n+1} = X_{n+1} \hat{A} + \rho u_n.$$



8.6. Запитання та завдання для самостійної роботи

1. Дайте означення автокореляції.
2. Які причини виникнення автокореляції залишків?
3. Як впливає автокореляція залишків на оцінку параметрів економетричної моделі?
4. Які особливості оцінювання параметрів за методом Ейткена за наявності автокореляції?
5. Запишіть матриці перетворення вихідної інформації згідно з двокроковою процедурою Дарбіна.
6. В яких випадках за автокореляції залишків доцільніше використовувати методи Кочрена—Оркатта або Дарбіна?
7. Дайте коротку характеристику алгоритму методу Кочрена—Оркатта.
8. Чим відрізняється метод Дарбіна від методу Кочрена—Оркатта?
9. Як записати формулу прогнозу залежної змінної за автокореляції залишків? Чому вона має такий вигляд?
10. Для оцінювання параметрів моделі $y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t$ скористайтесь методом перетворення вихідної інформації, яку задано у вигляді двох взаємозв'язаних часових рядів:

Рік	1	2	3	4	5	6	7
Y	10	12	11	10	13	14	16
X	5	7	6	4	7	8	10

а залишки u_t задовольняють авторегресійну схему першого порядку:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t.$$

11. Дайте порівняльний аналіз оцінок параметрів моделі, наведеної в завданні 10, на основі ІМНК і перетворення вихідної інформації.
12. Визначте ступінь зміщення коваріації параметрів і залишкової дисперсії в разі застосування ІМНК у завданні 10.
13. Дайте оцінку параметрів моделі за методом Кочрена—Оркатта, якщо порядок авторегресійної моделі для залишків є схемою другого порядку. Вказівка: $r_1 = 0,4$, $r_2 = 0,3$ (за даними завдання 10).
14. Виконайте порівняльний аналіз оцінок параметрів моделі із завдання 10, знайдених за допомогою перетворення вихідної інформації, а також за методом Кочрена—Оркатта. Обґрунтуйте результати порівняння, виходячи з особливостей цих двох методів.
15. Для моделі $y_t = a_0 + a_1 x_t + u_t$, де $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$, дайте оцінку параметрів за методом Дарбіна, якщо вихідну інформацію задано у вигляді двох часових рядів:

Рік	1	2	3	4	5	6
Y	16	18	19	19	22	25
X	6	7	8	9	12	13

16. Використовуючи ρ_1 і ρ_2 із завдання 15, зробіть перетворення вихідної інформації зі згаданого завдання.

17. Знайдіть прогнозне значення y_8 , коли $x_8 = 15$, за моделлю $\hat{y} = 5,3 + 0,6x_t$, скориставшись такими даними:

Рік	1	2	3	4	5	6	7
Y	10	12	13	11	14	15	14
u	-0,5	-0,3	0,2	0,4	0,1	-0,6	0,6

18. Визначте вектор W , коли відомі залишки:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_t	1	-1	1,2	1,1	-1,2	-1,1	0,6	-0,5	0,2

8.7. Основні терміни і поняття

Автокореляція • Модель з автокорельованими залишками • Коваріація залишків • Стаціонарний марковський процес • Додатна автокореляція • Від'ємна автокореляція • Критерій Дарбіна—Уотсона • Критерій фон Неймана • Авторегресійна схема другого порядку • Нециклічний коефіцієнт автокореляції • Циклічний коефіцієнт автокореляції • Метод перетворення вихідної інформації • Метод Кочрена—Оркатта • Метод Дарбіна • Авторегресійна схема першого порядку