

Розділ 5. Неперервні випадкові величини

5.1. Неперервні випадкові величини та їх характеристики

1. Функція розподілу ймовірностей має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2; \\ ax + b, & -2 \leq x \leq 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Знайти значення сталих a та b , накреслити графік $F(x)$ та знайти ймовірність $P(1 < X < 4)$. (Відповідь: $a = \frac{1}{7}$, $b = \frac{2}{7}$, $P(1 < X < 4) = \frac{3}{7}$)

2. Задано закон розподілу неперервної випадкової величини:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{(x+1)^2}{64}, & -1 \leq x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x)$, накреслити графіки $F(x)$ та $f(x)$, знайти ймовірність $P(0 < X < 2)$.

3. Задано щільність розподілу неперервної випадкової величини:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{\sin x}{2}, & 0 < x \leq \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$, накреслити графіки $F(x)$ та $f(x)$, знайти ймовірність $P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}\right)$. (Відповідь: $P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$)

4. За заданою щільністю розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2; \\ a\sqrt{x+2}, & -2 < x \leq 7; \\ 0, & x > 7. \end{cases}$$

знайти значення параметра a та функцію розподілу $F(x)$. (Відповідь: $a = \frac{1}{18}$)

5. Задано функцію розподілу неперервної випадкової величини:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x)$, накреслити графіки $F(x)$ та $f(x)$, знайти ймовірність $P(\pi/6 < X < \pi/3)$.

6. Випадкова величина X має закон розподілу ймовірностей Коші з щільністю

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \text{ Знайти значення параметра } a \text{ та функцію розподілу } F(x). \text{ (Відповідь: } a = \frac{1}{\pi}, F(x) = \frac{\arctg x}{\pi} + \frac{1}{2} \text{)}$$

7. Крива щільності ймовірностей випадкової величини X – півеліпс з півосями $a = 4$ та $b = 2$. Записати вирази для $f(x)$ та $F(x)$.

8. За заданою щільністю розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ a \ln x, & 1 < x \leq e; \\ 0, & x > e \end{cases}$$

знайти значення параметра a та функцію розподілу $F(x)$. (Відповідь: $a = 1$)

9. При яких значеннях параметрів a та b функція

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \sin x, & a < x \leq b; \\ 1, & x > b \end{cases}$$

буде функцією розподілу деякої випадкової величини? Знайти її щільність розподілу $f(x)$. (Відповідь: $a = 2\pi k$, $b = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$)

10. При яких значеннях параметрів a та b функція

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \operatorname{tg} x, & a < x \leq b; \\ 1, & x > b \end{cases}$$

буде функцією розподілу деякої випадкової величини? Знайти її щільність розподілу $f(x)$. (Відповідь: $a = \pi k$, $b = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$)

11. При яких значеннях параметрів a та b функція

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \sin x, & a < x \leq b; \\ 1, & x > b \end{cases}$$

буде щільністю розподілу деякої випадкової величини? Знайти її функцію розподілу та ймовірність потрапляння у інтервал $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$. (Відповідь:

$$a \in \left[2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], b = \pm \arccos(\cos a - 1) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z})$$

5.2. Числові характеристики неперервних випадкових величин

1. Випадкова величина X задана своєю щільністю:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 2e^{-2x}, & x > 0. \end{cases}$$

Знайти її математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.
(Відповідь: $M(X) = 0,5$, $D(X) = \frac{1}{4}$, $\sigma_x = 0,5$)

2. Випадкова величина X задана своєю функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ (x-2)^2, & 2 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти її математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.
(Відповідь: $M(X) = \frac{8}{3}$, $D(X) = \frac{1}{18}$, $\sigma_x = \sqrt{\frac{2}{6}}$)

3. У крузі радіусу r з центром у точці O навмання вибирається точка M . Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ , що дорівнює відстані OM . (Відповідь: $M(\xi) = \frac{2r}{3}$, $D(\xi) = \frac{r^2}{18}$)

4. Всередині сфери радіусу r навмання вибирають точку M . Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ , що дорівнює відстані від цієї точки до сфери. (Відповідь: $M(\xi) = \frac{r}{4}$, $D(\xi) = \frac{3r^2}{80}$)

5. Випадкова величина X задана своєю функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1 - \cos x}{2}, & 0 < x \leq \pi; \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти її математичне сподівання, дисперсію, медіану та моду. (Відповідь: $M(X) = \frac{\pi}{2}$, $D(X) = \frac{(\pi^2 - 4)}{4}$, $M_o = M_e = \frac{\pi}{2}$)

6. Випадкова величина X задана своєю щільністю:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2; \\ \frac{\sqrt{x+2}}{18}, & -2 < x \leq 7; \\ 0, & x > 7. \end{cases}$$

Знайти її середнє квадратичне відхилення та медіану. (Відповідь: $\sigma_x = 2,36$, $M_e = \sqrt[3]{182,25 - 2}$)

7. Випадкова величина X задана своєю щільністю:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3; \\ \frac{1}{4\sqrt{x+3}}, & -3 < x \leq 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти її дисперсію, середнє квадратичне відхилення та медіану. (Відповідь: $D(X) = \frac{64}{45}$, $\sigma_x = \frac{8}{3\sqrt{5}}$, $M_e = 2$)

8. Випадкова величина X задана своєю функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Знайти її коефіцієнт асиметрії та ексцес. (Відповідь: $A = 2$, $E = 0$)

9. Випадкова величина X задана своєю щільністю:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ axe^{-x^2}, & x > 0. \end{cases}$$

Знайти значення параметра a , математичне сподівання, середнє квадратичне відхилення та медіану. (Відповідь: $a = 2$, $M(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\sigma_x = \frac{\sqrt{4-\pi}}{2}$, $M_e = \sqrt{\ln 2}$)

10. Випадкова величина X має функцію розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти її моду та медіану. (Відповідь: $M_o = 1$, $M_e = \sqrt{2 \ln 2}$)

11. Випадкова величина X задана своєю функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ a + b \cdot \arcsin x, & -1 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти значення параметрів a та b , математичне сподівання та дисперсію.

(Відповідь: $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{\pi}$, $M(X) = 0$, $D(X) = \frac{1}{2}$)

12. Випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x) = 0,5x$ у інтервалі $(0; 2)$, поза цим інтервалом $f(x) = 0$. Знайти початкові та центральні моменти

першого, другого третього та четвертого порядків. (Відповідь: $\nu_1 = \frac{4}{3}$, $\nu_2 = 2$,

$\nu_3 = 3,2$, $\nu_4 = \frac{16}{3}$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \frac{2}{9}$, $\mu_3 = -\frac{8}{135}$, $\mu_4 = \frac{16}{135}$)

13. Довести, що для будь-якої неперервної випадкової величини центральний момент першого порядку дорівнює нулю.

14. Задана щільність розподілу випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \wedge x > 2; \\ \frac{3x^2}{2}, & 0 \leq x < 1; \\ \frac{3(2-x)^2}{2}, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Знайти початкові та центральні моменти перших чотирьох порядків, асиметрію та ексцес цієї випадкової величини. (Відповідь: $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 1,1$, $\nu_3 = 1,3$, $\nu_4 = \frac{57}{35}$,

$\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0,1$, $\mu_3 = 0$, $\mu_4 = \frac{1}{35}$, $A = 0$, $E = \frac{1}{7}$)

5.3. Рівномірний та показниковий розподіли

1. Побудувати графіки щільності та функції розподілу ймовірностей випадкової величини X , рівномірно розподіленої на інтервалі $(1; 3)$. Знайти її математичне сподівання та дисперсію.
2. Випадкова величина X має рівномірний розподіл з математичним сподіванням $M(X) = 3$ та дисперсією $D(X) = \frac{4}{3}$. Знайти інтервал можливих значень цієї випадкової величини, щільність та функцію ймовірностей, побудувати їх графіки. (Відповідь: $a = 1, b = 5$)
3. Ціна поділки шкали вимірювального пристрою дорівнює 0,2. Покази пристрою округлюються до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при вимірюванні буде зроблена похибка: а) менша 0,04; б) більша 0,05. (Відповідь: а) 0,4; б) 0,5)
4. Шкала лабораторних терезів має ціну поділки 1 грам. При вимірюванні маси хімічних компонентів суміші підрахунок роблять з округленням до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що абсолютна похибка визначення маси: а) не перевищить величини середнього квадратичного відхилення можливих похибок визначення маси; б) знаходитиметься між значеннями σ_x та $2\sigma_x$. (Відповідь: а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$)
5. Автобуси деякого маршруту рухаються за розкладом з інтервалом руху 5 хвилин. Знайти ймовірність того, що пасажир, що підійде до зупинки, чекатиме автобуса не більше 3 хвилин. (Відповідь: 0,6)
6. Хвилинна стрілка електричного годинника переміщується стрибком наприкінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що у даний момент годинник показує час, що відрізняється від справжнього не більше, ніж на 20 секунд. (Відповідь: $\frac{2}{3}$)
7. Час безвідмовної роботи радіоапаратури є випадковою величиною X , розподіленою за показниковим законом з параметром λ . Знайти ймовірність того, що радіоапаратура не вийде з ладу за час $t = M(X)$. (Відповідь: e^{-1})
8. Випадкова величина X має показниковий розподіл з параметром розподілу $\lambda = \frac{1}{3}$. Обчислити ймовірність $P(X > 3)$. (Відповідь: e^{-1})

9. Час T безвідмовної роботи двигуна автомобіля розподілений за показниковим законом. Відомо, що середній час безвідмовної роботи двигуна дорівнює 100 годин. Визначити ймовірність безвідмовної роботи двигуна за 80 годин. (Відповідь: 0,5507)
10. Довести, що для випадкової величини X , розподіленої за показниковим законом, ймовірність того, що вона прийме значення, менше, ніж $M(X)$, не залежить від величини параметра розподілу λ .
11. Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення для випадкової величини X , розподіленої за показниковим законом з функцією розподілу $F(x) = 1 - e^{-0,4x}$, $x \geq 0$. (Відповідь: $D(X) = 6,25$, $\sigma_x = 2,5$)
12. Випадкова величина X розподілена за показниковим законом з параметром розподілу λ . Отримати рекурентну формулу, що виражає центральний момент μ_{k+1} через центральний момент μ_k та математичне сподівання. З її допомогою знайти асиметрію та ексцес цієї випадкової величини.
13. Випробують два елементи, що працюють незалежно. Час безвідмовної роботи першого елемента має показниковий розподіл $F_1(t) = 1 - e^{-0,02t}$, другого – $F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$. Знайти ймовірність того, що за час $t = 6$ годин: а) відмовлять обидва елементи; б) не відмовлять обидва елементи; в) відмовить хоча б один елемент. (Відповідь: а) 0,03; б) 0,66; в) 0,34)
14. Час безвідмовної роботи елемента має показниковий розподіл $F(t) = 1 - e^{-0,03t}$. Знайти ймовірність того, що за час $t = 100$ годин: а) елемент відмовить; б) елемент не відмовить. (Відповідь: а) 0,95; б) 0,05)

5.4. Нормальний закон розподілу

1. Математичне сподівання випадкової величини X , розподіленої за нормальним законом, дорівнює 3, а середнє квадратичне відхилення – 2. Записати щільність та функцію розподілу ймовірностей цієї випадкової величини.
2. Математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , розподіленої за нормальним законом, відповідно дорівнюють 10 та 2. Знайти ймовірність того, що внаслідок випробування ця випадкова величина прийме значення з проміжку (12; 14). (Відповідь: 0,1359)

3. Математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , розподіленої за нормальним законом, відповідно дорівнюють 20 та 5. Знайти ймовірність того, що внаслідок випробування ця випадкова величина прийме значення з проміжку $(15; 25)$. (Відповідь: 0,6826)
4. Автомат виробляє деталі. Здійснюється контроль довжини деталі X , що розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням (проектна довжина деталі), що дорівнює 50 мм. Фактично довжина виготовлених деталей знаходиться у межах від 32мм до 68мм. Знайти ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі більша, ніж 55мм. (Відповідь: 0, 0823)
5. Вимірюється без систематичних (одного знаку) похибок діаметр валу. Випадкові похибки вимірювання X розподілені за нормальним законом з середнім квадратичним відхиленням $\sigma=10$ мм. Знайти ймовірність того, що похибка вимірювання за абсолютною величиною не перевищить 15мм. (Відповідь: 0,8664)
6. Без систематичних похибок зважується деяка речовина. Випадкові похибки зважування X розподілені за нормальним законом з середнім квадратичним відхиленням $\sigma=20$ г. Знайти ймовірність того, що похибка зважування не перевищуватиме за абсолютною величиною 10г. (Відповідь: 0,383)
7. Випадкові похибки вимірювання розподілені за нормальним законом з середнім квадратичним відхиленням $\sigma=20$ мм та математичним сподіванням $a=0$. Знайти ймовірність того, що з трьох незалежних вимірювань похибка хоча б одного не перевищуватиме за абсолютною величиною 4мм. (Відповідь: 0,41)
8. Автоматичний верстат виготовляє кульки. Кулька вважається придатною, якщо відхилення X її діаметру від проектного розміру за абсолютною величиною не перевищить 0,7мм. Вважаючи, що випадкова величина X розподілена за нормальним законом з середнім квадратичним відхиленням $\sigma=0,4$ мм, знайти який середній процент придатних кульок виготовляє автомат. (Відповідь: $\approx 92\%$)
9. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням $a=10$. Ймовірність потрапляння X у проміжок $(10; 20)$ дорівнює 0,3. Знайти ймовірність потрапляння X у проміжок $(0; 10)$. (Відповідь: 0,3)
10. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням $a=25$. Ймовірність потрапляння X у проміжок $(10; 15)$ дорівнює 0,2. Знайти ймовірність потрапляння X у проміжок $(35; 40)$. (Відповідь: 0,2)

11. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням $a=10$ та середнім квадратичним відхиленням $\sigma=5$. Знайти інтервал, симетричний відносно математичного сподівання, у який з ймовірністю 0,9973 потрапить значення X у результаті випробування. (Відповідь: $(-5; 25)$)
12. Верстат-автомат виготовляє вали, при цьому контролюється їх діаметр X . Вважаючи X нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням $a=10$ мм та середнім квадратичним відхиленням $\sigma=0,1$ мм, знайти інтервал, симетричний відносно математичного сподівання, у якому з ймовірністю 0,9973 знаходяться діаметри виготовлених валів. (Відповідь: $(9,7; 10,3)$)
13. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням $a=0$ та середнім квадратичним відхиленням σ . Знайти значення σ , при якому ймовірність того, що X прийме значення з інтервалу $(\alpha; \beta)$, де $\alpha > 0$, $\beta > \alpha$, буде найбільшою. (Відповідь: $\sigma = \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2(\ln \beta - \ln \alpha)}}$)
14. Випадкова величина ξ розподілена за нормальним законом з параметрами $a=5$ та $\sigma=2$. Знайти інтервал, у який потрапляє випадкова величина ξ з практичною достовірністю (ймовірністю 0,9973). (Відповідь: $(-1; 11)$)
15. Зріст дорослих чоловіків є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Нехай її математичне сподівання дорівнює 175 см, а середнє квадратичне відхилення – 6 см. Визначити ймовірність того, що хоча б один з випадково вибраних 5 чоловіків буде мати зріст від 170 до 180 см. (Відповідь: 0,9891)
16. При 10000 підкиданнях монети герб випав 5400 разів. Чи слід вважати, що монета несиметрична? (Відповідь: Так (застосувати правило «трьох сигм»))
17. Заряд мисливського пороху зважують на терезах, що мають середню квадратичну похибку зважування 0,5г. Номінальна маса порохового заряду 4,5г. Визначити ймовірність пошкодження мисливської рушниці при пострілі, якщо максимально допустима вага порохового заряду дорівнює 4,9г. (Відповідь: 0,4238)
18. Вимір відстані до об'єкта супроводжується систематичною та випадковою помилками. Систематична помилка становить 25м у бік зниження справжньої відстані, а випадкова помилка має нормальний закон розподілу з середнім квадратичним відхиленням 50м. Знайти: а) ймовірність вимірювання дальності з похибкою, що за абсолютною величиною не перевищує 100м; б)

ймовірність того, що виміряна відстань не перевищить справжньої.
(Відповідь: а) 0,927; б) 0,4013)

13. Багатовимірні дискретні випадкові величини

1. Задано розподіл ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини (X, Y) . Знайти розподіл її складових елементів випадкових величин X та Y .

$Y = y_i$	$X = x_j$			
	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

2. Задано розподіл ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини (X, Y) . Знайти розподіл її складових елементів випадкових величин X та Y .

$Y = y_i$	$X = x_j$		
	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

3. Задано закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X, Y) у вигляді таблиці. Знайти значення параметра a , математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкових складових X та Y , кореляційний момент та коефіцієнт кореляції, ймовірність потрапляння

двовимірної випадкової величини (X, Y) у прямокутник $2,4 \leq Y < 6,4$, $5,2 \leq X < 15,2$.

$Y = y_i$	$X = x_j$		
	5,2	10,2	15,2
2,4	0,1a	2a	0,9a
4,4	2a	0,2a	1,8a
6,4	1,9a	0,8a	0,3a

Відповідь: $a = 0,1$, $M(X) = 9,7$, $D(X) = 17,25$, $\sigma_x = 4,15$, $M(Y) = 4,4$,

$D(Y) = 2,4$, $\sigma_y = 1,55$, $K_{xy} = 1,4$, $r_{xy} = 0,37$, $P = 0,31$.

4. Задано двовимірний закон розподілу системи дискретних випадкових величин (X, Y) . Знайти умовні математичні сподівання та середні квадратичні відхилення $M(X/(Y = -4))$, $M(Y/(X = 30))$, $\sigma(X/(Y = -4))$, $\sigma(Y/(X = 30))$.

$Y = y_i$	$X = x_j$		
	10	20	30
-6	0,02	0,05	0,03
-4	0,08	0,15	0,07
-2	0,2	0,3	0,1

Відповідь: $M(X/(Y = -4)) = 10,7$, $M(Y/(X = 30)) = -3,3$, $\sigma(X/(Y = -4)) = 7,1$, $\sigma(Y/(X = 30)) = 1,45$.

5. Задано двовимірний закон розподілу системи дискретних випадкових величин (X, Y) . Знайти безумовні закони розподілу складових X та Y , умовний закон розподілу випадкової величини X , якщо $Y = 0,4$, умовний закон розподілу випадкової величини Y , якщо $X = 5$.

$Y = y_i$	$X = x_j$
-----------	-----------

	2	5	8
0,4	0,15	0,30	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

6. Ймовірність того, що при перевірці деталь виявиться стандартною, дорівнює 0,8. Перевірці підлягають 3 деталі. Побудувати закон розподілу системи дискретних випадкових величин (X, Y) , де X – число бракованих деталей, Y – число стандартних деталей серед перевірених. Обчислити коефіцієнт кореляції r_{xy} . (Відповідь: $r_{xy} = -1$)

14. Багатовимірні неперервні випадкові величини

1. Задано функцію розподілу двовимірної випадкової величини

$$F(x, y) = \begin{cases} \sin x \cdot \sin y, & 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2; \\ 0, & x < 0 \vee y < 0; \\ 1, & x > \pi/2 \vee y > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) у прямокутник, обмежений прямими $x=0$, $x=\pi/4$, $y=\pi/6$, $y=\pi/3$. (Відповідь: $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$)

2. Знайти ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) у прямокутник, обмежений прямими $x=1$, $x=2$, $y=3$, $y=5$, якщо відома функція розподілу

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & x < 0 \vee y < 0. \end{cases}$$

(Відповідь: $\frac{3}{128}$)

3. Задана функція розподілу двовимірної випадкової величини

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & x < 0 \vee y < 0. \end{cases}$$

Знайти двовимірну щільність розподілу ймовірностей системи (X, Y) .

4. Задана функція розподілу двовимірної випадкової величини

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-4x})(1 - e^{-2y}), & x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Знайти двовимірну щільність розподілу ймовірностей системи (X, Y) .

5. Задана двовимірна щільність розподілу системи двох випадкових величин (X, Y) :

$$f(x, y) = \frac{20}{\pi^2 (16 + x^2)(25 + y^2)}.$$

Знайти функцію розподілу цієї системи.

6. Задана двовимірна щільність розподілу системи двох випадкових величин (X, Y) : $f(x, y) = \frac{\sin(x + y)}{2}$ у квадраті $0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2$, поза цим квадратом $f(x, y) = 0$. Знайти функцію розподілу цієї системи.

7. У крузі $x^2 + y^2 \leq R^2$ двовимірна щільність розподілу ймовірностей системи випадкових величин (X, Y) має вигляд: $f(x, y) = C(R - \sqrt{x^2 + y^2})$, поза цим кругом $f(x, y) = 0$. Знайти: а) сталу C ; б) ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) у круг радіуса $r = 1$ з центром у початку координат, якщо $R = 2$.
(Відповідь: а) $C = \frac{3}{\pi R^3}$; б) 0,5.

8. Задана двовимірна щільність розподілу системи двох випадкових величин (X, Y) : $f(x, y) = \frac{C}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$. Знайти значення сталої C . (Відповідь: $\frac{12}{\pi^2}$)

9. У першій чверті координатної площини задано функцію розподілу системи двох випадкових величин: $F(x, y) = 1 + 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}$, поза першою чвертю $F(x, y) = 0$. Знайти ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) у трикутник з вершинами у точках $A(1;3), B(3;3), C(2;8)$. (Відповідь: $\frac{5}{3} \cdot 2^{12}$)

10. Щільність сумісного розподілу неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y) $f(x, y) = C \cdot e^{-x^2 - 2xy - 4y^2}$. Знайти значення сталої C , щільності розподілу складових X та Y , умовні щільності розподілу цих складових. (Відповідь:

$$C = \frac{\sqrt{3}}{\pi}, \quad f_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} \cdot e^{-0,75x^2}, \quad f_2(y) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-3y^2}, \quad \phi(x|y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+y)^2},$$

$$\phi(y|x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-0,25(x+4y)^2}$$

11. Неперервна двовимірна випадкова величина (X, Y) розподілена рівномірно всередині прямокутника з центром симетрії на початку координат та сторонами $2a$ та $2b$, що паралельні координатним осям. Знайти двовимірну щільність розподілу цієї випадкової величини, а також щільності розподілу складових X та Y . (Відповідь: $f(x, y) = \frac{1}{4ab}$ у заданому прямокутнику,

$$f(x, y) = 0 \text{ поза ним, } f_1(x) = \frac{1}{2a} \text{ при } |x| \leq a, \quad f_1(x) = 0 \text{ при } |x| > a, \quad f_2(y) = \frac{1}{2b} \text{ при } |y| \leq b, \quad f_2(y) = 0 \text{ при } |y| > b)$$

12. Неперервна двовимірна випадкова величина (X, Y) розподілена рівномірно всередині прямокутної трапеції з вершинами у точках $O(0;0)$, $A(0;4)$, $B(3;4)$, $C(6;0)$. Знайти двовимірну щільність розподілу цієї випадкової величини, а також щільності розподілу складових X та Y . (Відповідь: $f(x, y) = \frac{1}{18}$

$$\text{всередині заданої трапеції, } f(x, y) = 0 \text{ поза нею, } f_1(x) = \frac{2}{9} \text{ при } 0 < x < 3,$$

$$f_1(x) = -\frac{2}{27}x + \frac{4}{9} \text{ при } 3 < x < 6, \quad f_1(x) = 0 \text{ для решти значень } x,$$

$$f_2(y) = -\frac{1}{24}y + \frac{1}{3} \text{ при } 0 < y < 4, \quad f_2(y) = 0 \text{ для решти значень } y)$$

13. Задана щільність сумісного розподілу неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y) :

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-x^2-y^2}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & x < 0 \vee y < 0. \end{cases}$$

- Знайти математичні сподівання та дисперсії складових X та Y . (Відповідь:

$$M(X) = M(Y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad D(X) = D(Y) = 1 - \frac{\pi}{4}$$

14. Задана щільність сумісного розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) : $f(x, y) = 2 \cos x \cos y$ у квадраті $0 \leq x \leq \pi/4$, $0 \leq y \leq \pi/4$, поза цим квадратом $f(x, y) = 0$. Знайти математичні сподівання складових X та Y .

$$(\text{Відповідь: } M(X) = M(Y) = \frac{\pi + 4 - 4\sqrt{2}}{4})$$

15. Задана щільність сумісного розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) : $f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{4}$ у квадраті $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, поза цим квадратом $f(x, y) = 0$. Знайти математичні сподівання та дисперсії складових X та Y , а

також кореляційний момент μ_{xy} . (Відповідь: $M(X) = M(Y) = \frac{\pi}{2}$,
 $D(X) = D(Y) = \pi^2 - 4$, $\mu_{xy} = 0$)

16. Задано щільності розподілу незалежних складових неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y) :

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 5e^{-5x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ 2e^{-2y}, & y \geq 0. \end{cases}$$

Знайти: а) щільність сумісного розподілу системи; б) функцію розподілу системи.

$$\text{Відповідь: а) } f(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \vee y < 0; \\ 10e^{-5x-2y}, & x > 0, y > 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \vee y < 0; \\ (1 - e^{-5x})(1 - e^{-2y}), & x > 0, y > 0. \end{cases}$$

17. Функція щільності розподілу ймовірностей системи випадкових величин (X, Y) має вигляд: $f(x, y) = ae^{-2x^2+xy-y^2} \quad \forall x \in R, y \in R$. Знайти значення

константи a , $M(X)$, $M(Y)$, r_{xy} . (Відповідь: $a = \frac{\sqrt{7}}{2\pi}$, $M(X) = M(Y) = 0$, $r_{xy} = 0$)