

Розділ 6. Система випадкових величини

6.1. Багатовимірні дискретні випадкові величини

1. Задано розподіл ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини (X, Y) . Знайти розподіл її складових елементів випадкових величин X та Y .

$Y = y_i$	$X = x_j$			
	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

2. Задано розподіл ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини (X, Y) . Знайти розподіл її складових елементів випадкових величин X та Y .

$Y = y_i$	$X = x_j$		
	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

3. Задано закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X, Y) у вигляді таблиці. Знайти значення параметра a , математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкових складових X та Y , кореляційний момент та коефіцієнт кореляції, ймовірність потрапляння

двовимірної випадкової величини (X, Y) у прямокутник $2,4 \leq Y < 6,4$, $5,2 \leq X < 15,2$.

$Y = y_i$	$X = x_j$		
	5,2	10,2	15,2
2,4	0,1a	2a	0,9a
4,4	2a	0,2a	1,8a
6,4	1,9a	0,8a	0,3a

Відповідь: $a = 0,1$, $M(X) = 9,7$, $D(X) = 17,25$, $\sigma_x = 4,15$, $M(Y) = 4,4$,

$D(Y) = 2,4$, $\sigma_y = 1,55$, $K_{xy} = 1,4$, $r_{xy} = 0,37$, $P = 0,31$.

4. Задано двовимірний закон розподілу системи дискретних випадкових величин (X, Y) . Знайти умовні математичні сподівання та середні квадратичні відхилення $M(X/(Y = -4))$, $M(Y/(X = 30))$, $\sigma(X/(Y = -4))$, $\sigma(Y/(X = 30))$.

$Y = y_i$	$X = x_j$		
	10	20	30
-6	0,02	0,05	0,03
-4	0,08	0,15	0,07
-2	0,2	0,3	0,1

Відповідь: $M(X/(Y = -4)) = 10,7$, $M(Y/(X = 30)) = -3,3$, $\sigma(X/(Y = -4)) = 7,1$, $\sigma(Y/(X = 30)) = 1,45$.

5. Задано двовимірний закон розподілу системи дискретних випадкових величин (X, Y) . Знайти безумовні закони розподілу складових X та Y , умовний закон розподілу випадкової величини X , якщо $Y = 0,4$, умовний закон розподілу випадкової величини Y , якщо $X = 5$.

$Y = y_i$	$X = x_j$
-----------	-----------

	2	5	8
0,4	0,15	0,30	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

6. Ймовірність того, що при перевірці деталь виявиться стандартною, дорівнює 0,8. Перевірці підлягають 3 деталі. Побудувати закон розподілу системи дискретних випадкових величин (X, Y) , де X – число бракованих деталей, Y – число стандартних деталей серед перевірених. Обчислити коефіцієнт кореляції r_{xy} . (Відповідь: $r_{xy} = -1$)

6.2. Багатовимірні неперервні випадкові величини

- 6.3. Задано функцію розподілу двовимірної випадкової величини

$$F(x, y) = \begin{cases} \sin x \cdot \sin y, & 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2; \\ 0, & x < 0 \vee y < 0; \\ 1, & x > \pi/2 \vee y > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) у прямокутник, обмежений прямими $x=0$, $x=\pi/4$, $y=\pi/6$, $y=\pi/3$. (Відповідь: $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$)

- 6.4. Знайти ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) у прямокутник, обмежений прямими $x=1$, $x=2$, $y=3$, $y=5$, якщо відома функція розподілу

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & x < 0 \vee y < 0. \end{cases}$$

(Відповідь: $\frac{3}{128}$)

- 6.5. Задана функція розподілу двовимірної випадкової величини

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & x < 0 \vee y < 0. \end{cases}$$

Знайти двовимірну щільність розподілу ймовірностей системи (X, Y) .

6.6. Задана функція розподілу двовимірної випадкової величини

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-4x})(1 - e^{-2y}), & x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, & x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Знайти двовимірну щільність розподілу ймовірностей системи (X, Y) .

6.7. Задана двовимірною щільність розподілу системи двох випадкових величин (X, Y) :

$$f(x, y) = \frac{20}{\pi^2 (16 + x^2)(25 + y^2)}.$$

Знайти функцію розподілу цієї системи.

6.8. Задана двовимірною щільність розподілу системи двох випадкових величин (X, Y) : $f(x, y) = \frac{\sin(x+y)}{2}$ у квадраті $0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2$, поза цим квадратом $f(x, y) = 0$. Знайти функцію розподілу цієї системи.

6.9. У крузі $x^2 + y^2 \leq R^2$ двовимірною щільність розподілу ймовірностей системи випадкових величин (X, Y) має вигляд:
 $f(x, y) = C(R - \sqrt{x^2 + y^2})$, поза цим кругом $f(x, y) = 0$. Знайти: а) сталу C ; б) ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) у круг радіуса $r=1$ з центром у початку координат, якщо $R=2$. (Відповідь: а) $C = \frac{3}{\pi R^3}$; б) 0,5.

6.10. Задана двовимірною щільність розподілу системи двох випадкових величин (X, Y) : $f(x, y) = \frac{C}{(x^2 + y^2 + 1)^3}$. Знайти значення сталої C .

(Відповідь: $\frac{12}{\pi^2}$)

- 6.11. У першій чверті координатної площини задано функцію розподілу системи двох випадкових величин: $F(x, y) = 1 + 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}$, поза першою чвертю $F(x, y) = 0$. Знайти ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) у трикутник з вершинами у точках $A(1; 3)$, $B(3; 3)$, $C(2; 8)$.
(Відповідь: $\frac{5}{3} \cdot 2^{12}$)
- 6.12. Щільність сумісного розподілу неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y) $f(x, y) = C \cdot e^{-x^2 - 2xy - 4y^2}$. Знайти значення сталої C , щільності розподілу складових X та Y , умовні щільності розподілу цих складових. (Відповідь: $C = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$, $f_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} \cdot e^{-0,75x^2}$, $f_2(y) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-3y^2}$, $\phi(x|y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+y)^2}$, $\phi(y|x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-0,25(x+4y)^2}$)
- 6.13. Неперервна двовимірна випадкова величина (X, Y) розподілена рівномірно всередині прямокутника з центром симетрії на початку координат та сторонами $2a$ та $2b$, що паралельні координатним осям. Знайти двовимірну щільність розподілу цієї випадкової величини, а також щільності розподілу складових X та Y . (Відповідь: $f(x, y) = \frac{1}{4ab}$ у заданому прямокутнику, $f(x, y) = 0$ поза ним, $f_1(x) = \frac{1}{2a}$ при $|x| \leq a$, $f_1(x) = 0$ при $|x| > a$, $f_2(y) = \frac{1}{2b}$ при $|y| \leq b$, $f_2(y) = 0$ при $|y| > b$)
- 6.14. Неперервна двовимірна випадкова величина (X, Y) розподілена рівномірно всередині прямокутної трапеції з вершинами у точках $O(0; 0)$, $A(0; 4)$, $B(3; 4)$, $C(6; 0)$. Знайти двовимірну щільність розподілу цієї випадкової величини, а також щільності розподілу складових X та Y . (Відповідь: $f(x, y) = \frac{1}{18}$ всередині заданої трапеції, $f(x, y) = 0$ поза нею, $f_1(x) = \frac{2}{9}$ при $0 < x < 3$, $f_1(x) = -\frac{2}{27}x + \frac{4}{9}$ при $3 < x < 6$, $f_1(x) = 0$ для решти значень x , $f_2(y) = -\frac{1}{24}y + \frac{1}{3}$ при $0 < y < 4$, $f_2(y) = 0$ для решти значень y)
- 6.15. Задана щільність сумісного розподілу неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y) :

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-x^2-y^2}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & x < 0 \vee y < 0. \end{cases}$$

Знайти математичні сподівання та дисперсії складових X та Y . (Відповідь:

$$M(X) = M(Y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, D(X) = D(Y) = 1 - \frac{\pi}{4})$$

6.16. Задана щільність сумісного розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) : $f(x, y) = 2 \cos x \cos y$ у квадраті $0 \leq x \leq \pi/4, 0 \leq y \leq \pi/4$, поза цим квадратом $f(x, y) = 0$. Знайти математичні сподівання складових X та Y . (Відповідь: $M(X) = M(Y) = \frac{\pi + 4 - 4\sqrt{2}}{4}$)

6.17. Задана щільність сумісного розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) : $f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{4}$ у квадраті $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$, поза цим квадратом $f(x, y) = 0$. Знайти математичні сподівання та дисперсії складових X та Y , а також кореляційний момент μ_{xy} . (Відповідь:

$$M(X) = M(Y) = \frac{\pi}{2}, D(X) = D(Y) = \pi^2 - 4, \mu_{xy} = 0)$$

6.18. Задано щільності розподілу незалежних складових неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y) :

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 5e^{-5x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ 2e^{-2y}, & y \geq 0. \end{cases}$$

Знайти: а) щільність сумісного розподілу системи; б) функцію розподілу системи.

$$\text{Відповідь: а) } f(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \vee y < 0; \\ 10e^{-5x-2y}, & x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \vee y < 0; \\ (1 - e^{-5x})(1 - e^{-2y}), & x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

6.19. Функція щільності розподілу ймовірностей системи випадкових величин (X, Y) має вигляд: $f(x, y) = ae^{-2x^2+xy-y^2} \quad \forall x \in R, y \in R$. Знайти значення

константи $a, M(X), M(Y), r_{xy}$. (Відповідь: $a = \frac{\sqrt{7}}{2\pi}, M(X) = M(Y) = 0, r_{xy} = 0$)