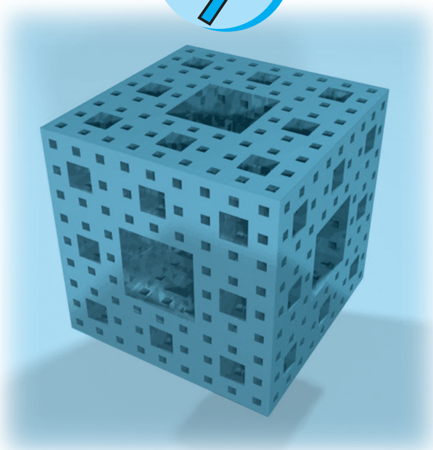
Г. В. АПОСТОЛОВА

Геометрія

9



Дворівневий підручник для загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

КИЇВ
«ГЕНЕЗА»
2009

ББК 22.151я721
А76

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України № 56 від 02.02.09 р.)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Незалежні експерти:

Хмара Т. М. – провідний науковий співробітник лабораторії математичної і фізичної освіти Інституту педагогіки АПН України, кандидат педагогічних наук;
Шарко В. В. – завідувач відділу топології Інституту математики НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор;
Синюкова О. М. – викладач кафедри алгебри та геометрії ПУДПУ ім. К. Д. Ушинського, кандидат фіз.-мат. наук, доцент;
Петечук К. М. – учитель-методист Закарпатського ІППО;
Горєлова О. В. – учитель-методист ЗОШ № 10 м. Ізмаїла Одеської обл.

Відповідальні за підготовку видання:

Прокопенко Н. С. – головний спеціаліст МОН України;
Литвиненко О. О. – методист вищої категорії Інституту інноваційних технологій і змісту освіти

Рецензенти:

Ясінський В. В. – директор Інституту моніторингу якості освіти НТУУ «КПІ», доктор фіз.-мат. наук, професор, заслужений працівник народної освіти України;
Мірецька Л. Б. – учитель-методист ЗОНЗ № 92 м. Києва

Упорядкування завдань

Карликової О. А., Баришнікової О. І., Вашуленко О. П.

Апостолова, Г. В.
А76 Геометрія : 9 : дворівн. підруч. для загальноосвіт. навч. закл. / Г. В. Апостолова. – К. : Генеза, 2009. – 304 с. : іл.
ISBN 978-966-504-900-5.

Відповідає чинній програмі як **загальноосвітніх** середніх навчальних закладів, так і **класів з поглибленим вивченням математики** – є *дворівневим*.

Відрізняє: диференційоване подання теоретичного і дидактичного матеріалу; виділення опорних фактів і опорних задач, узагальнюючих схем; практичні роботи; історичні відомості; завдання логічного характеру; великий обсяг дидактичного й позапрограмного матеріалу. *Може бути використаний*: у загальноосвітніх класах, класах з поглибленим вивченням математики; для проведення позакласних занять, самостійної і самоосвітньої діяльності учнів.

Провідною метою є надання широкого спектра можливостей як для вчителя, так і для учня незалежно від типу навчального закладу і місця його розташування.

ББК 22.151я721

ISBN 978-966-504-900-5

Автор Галина Вадимівна Апостолова – професор Київського обласного інституту післядипломної освіти педагогічних кадрів, кандидат фізико-математичних наук, учитель-методист.

Я вдячна всім своїм учням за спільний пошук шляхів відкриття світу, за те, що разом раділи й дивувалися красі та гармонійності його математичної моделі. У цьому підручнику є часточка від зустрічі з кожним із вас.

Шановні друзі!

Цим підручником завершується вивчення курсу шкільної планіметрії, проте це не останні ваші зустрічі з царицею математики – Геометрією. У старших класах ви вивчатимете стереометрію – геометрію фігур у просторі. Під час дослідження властивостей просторових фігур ви будете розглядати площини, в яких доведення й обчислення спираються на закони планіметрії, бо на площині виконуються всі аксіоми і теореми планіметрії.

Ідеї геометрії втілені в усіх сферах навколишнього світу, вони з успіхом використовуються у природничих і технічних науках, у тому числі й у найрізноманітніших розділах математики. Переконатися в цьому вам допоможуть власний досвід і останній розділ підручника «Цікаві додатки».

Про місце геометрії у розвитку людини важко сказати краще за ірландського філософа Дж. Берклі: ***«Давно підмічено, що геометрія – це чудова логіка... Набувається звичка міркувати точно, послідовно і методично; ця звичка посилює й загострює розум і стає в нагоді під час пошуків істини в інших галузях».***

Останнє стає особливо актуальним, якщо працювати за підручником так, як відзначив відомий психолог Д. Юнг: ***«Десять сторінок математики, які ти зрозумів, краще за сто сторінок, вивчених напам'ять і незасвоєних, а одна самостійно опрацьована сторінка краще, ніж десять сторінок, засвоєних чітко, але пасивно».***

Бажаю вам успішного навчання за порадою Юнга, самостійних пошуків і відкриттів, отримати естетичне задоволення від вивчення геометрії.

Автор

Інформація для учнів

Перш ніж розпочати роботу за підручником, уважно прочитайте *вступ*, у якому узагальнюється вже вивчене вами, і зверніть увагу на *форзаци* і *схеми* наприкінці підручника – на них представлено основні опорні факти геометрії за курс сьомого і восьмого класів.

Домашню роботу доцільно починати з опрацювання *практичних робіт*, поданих після кожного параграфа. Це допоможе вам «відчути» геометрію, полегшить засвоєння і запам'ятовування вивченого.

На поля підручника винесено *головну* (*опорну*) *інформацію*, а наприкінці підручника наводяться узагальнюючі *опорні конспекти* з окремих тем. Користуйтеся ними під час підготовки до уроку та під час розв'язування задач.

Обов'язковий (мінімальний) обсяг інформації позначено вертикальною кольоровою рискою. До нього відносяться завдання з нуликами біля номерів.

Завдання за складністю поділено на чотири рівні: завдання з нуликом біля номера – найпростіші, завдання без позначки біля номера – дещо складніші, завдання із зірочкою біля номера вимагають більш глибоких міркувань, завдання з двома зірочками – найскладніші, їх виконання вимагає творчих зусиль.

Завдання «*Для повторення*» та «*Готуємося до тематичного оцінювання*» допоможуть вам повторити вивчене, підготуватися до підсумкової атестаційної роботи.

Окрім того, наприкінці підручника пропонуються *завдання в тестовій формі* «*Перевір себе*». Їхня мета – визначити рівень ваших умінь і знань та допомогти вам адаптуватися до майбутнього тестування.

«*Відповіді і поради*» допоможуть вам переконатися у правильності виконання завдань, а інколи вкажуть шлях до розв'язування.

Завдання рубрики «*Для допитливих*», параграфи з такою самою піктограмою та останній розділ «*Цікаві додатки*» призначені для ширшого і глибшого ознайомлення з геометрією, ніж це вимагається за програмою загальноосвітньої школи.

Наприкінці підручника на вас чекає «*Словничок*» термінів і незнайомих слів (із посиланнями на сторінки, де вони обговорюються).

Піктограми в підручнику позначають:

 – означення; $\boxed{\mathcal{T}}$ – теорема; $\boxed{\mathcal{H}}$ – наслідок;

 – матеріал для ознайомлення;  – додатковий матеріал.

Не чекайте вказівок учителя, працюйте самостійно – підручник надає вам таку можливість. Пам'ятайте, що готуватися до зовнішнього тестування, до вступних іспитів у ВНЗ із певних тем треба тоді, коли ці теми вивчаються.

Той, хто вчиться самостійно, досягне в сім разів більше, ніж той, кому все роз'яснюється.

Артур Гітерман (поет)

Інформація для вчителів і батьків

Зазвичай у підручнику обсяг навчального матеріалу строго обмежений – усе, що в ньому наводиться, вчитель повинен опрацювати з класом. Тому й створюються підручники окремо для ЗОНЗ та для класів з поглибленим вивченням математики. А як бути учню, котрий може і хоче знати більше? Як йому готуватися до математичних змагань чи вступних іспитів (тестування)? Зрозуміло, що за такого підходу більше можливостей мають діти в мегаполісах, де є спеціалізовані навчальні заклади. **Головна мета цього підручника** – надати рівні можливості всім учням, незалежно від місця їхнього проживання та навчання, а вчителю допомогти здійснити диференційований підхід до кожної окремої особистості в класі, природно продовжити й поглибити вивчення геометрії на позакласних заняттях (або запропонувати декотрим учням зробити це самостійно).

Цей підручник є дворівневим – *за ним можна працювати як за загальноосвітньою програмою, так і в класах з поглибленим вивченням математики (МК)*. Можна сказати, що він є багаторівневим за формою, спектром і обсягом дидактичного й теоретичного матеріалу. Це надає змогу певним учням плавно йти вгору, а декому, за потреби, «спуститися» й залатати «прогалини».

Теоретичний матеріал пропонує:

- *параграфи, обов'язкові для вивчення,* – за програмою ЗОНЗ, основний матеріал (мінімум за держстандартом) позначено вертикальною кольоровою рискою;
- *параграфи для ознайомлення* – необов'язкові для оцінювання в ЗОНЗ;
- *параграфи, необов'язкові для вивчення* в ЗОНЗ;
- *інформацію рубрики «Для допитливих»*, яка доповнює параграфи історичною та математичною інформацією;
- *інформацію розділу «Цікаві додатки»* для МК, гурткової та самостійної позакласної роботи, підготовки до олімпіад, реферативних розробок (містить список літератури до кожної з представлених тем).

Дидактичний матеріал:

- *практичні роботи* (наводяться після кожного параграфа); задачі чотирьох рівнів складності, задачі перших трьох рівнів з кольоровими номерами пропонуються для домашньої роботи в ЗОНЗ;
- *завдання рубрики «Для допитливих»* містять додаткові задачі підвищеної складності і не тільки за програмним матеріалом;
- *завдання розділу «Цікаві додатки»* – завдання підвищеної складності із пропонованих у розділі тем;
- *завдання для повторення* наводяться наприкінці розділів і наприкінці підручника (у тестовій формі);
- *«Готуємося до тематичного оцінювання»* – орієнтовні завдання тематичної атестації (для ЗОНЗ).

Полегшить засвоєння, повторення, узагальнення й використання навчального матеріалу при розв'язуванні задач і посібник «Геометрія в опорних схемах і малюнках. Робочий зошит учня 9 класу». Він містить опорні схеми до теоретичного матеріалу підручника, узагальнюючі опорні схеми й завдання на готових кресленнях. Використання такого посібника дасть змогу учням не носити підручник до школи (працювати за ним лише вдома).

Наостанок варто підкреслити, що неможливо і не треба опрацьовувати в класі весь навчальний матеріал підручника, розв'язувати всі наведені завдання. Достатньо обрати рівень вашого класу, і завжди залишиться «запас» – комусь для повторення, а комусь для поглиблення або для опрацювання на факультативі чи для самостійної роботи учня.

Підручник пропонує «можливості», а от які саме й наскільки вони будуть реалізовані – це вже залежить від Вас особисто і Ваших дітей.

Талану вам, друзі!

З повагою, автор

**Пам'ять – вартовий усьому
і скарбничка всього.**

Цицерон

Вступ

**Погляд на старі проблеми під іншим кутом зору –
це потребує творчої уяви і дає великі переваги.**

Альберт Ейнштейн

Вступаючи в геометрію 9-го класу, варто спочатку зупинитися й озирнутися на те, що було раніше. Роздивіться той «краєвид», відчуйте його логічність та цілісність, красу маленьких сюжетів опорних задач. Це допоможе вам опанувати нові простори Геометрії у 9-му класі.

Побудова геометрії:
1) основні поняття;
2) аксіоми;
3) означення інших фігур та доведення тверджень про їхні властивості.

Нагадаємо: *твердженням* називається речення, про яке можна сказати або «так», або «ні», тобто воно може бути або істинним, або хибним.

Логічний крок *доведення*:
1. Вихідне твердження (кілька тверджень).
2. «Тоді».
3. Твердження-висновок.

Геометрія – це не просто зібрання певних фактів і міркувань, а строга, цілісна й естетична у своїй логічності наука. *Геометрія як математична наука про просторові форми спирається на дедуктивний метод – ланцюжок логічних переходів (кроків) від твердження-умови до твердження-висновку*. Тому так важливо узагальнити вже вивчене і виділити у цьому матеріалі основні опорні факти. Допоможуть вам у цьому «Запитання для повторення», малюнки-схеми на форзацах і наприкінці підручника, «Словничок» та інформація, яка розміщена на полі вступного розділу.

Запитання для повторення

1. Яку будову має планіметрія?
2. Яку будову має логічний крок доведення?
3. Поясніть, який вираз називають твердженням. Поясніть, що таке: **а)** аксіома; **б)** теорема; **в)** наслідок; **г)** означення; **д)** ознака; **е)** властивість; **є*)** теорема, обернена до даної; **ж**)** необхідна і достатня умови.
4. Що таке «спосіб доведення від супротивного»? Наведіть приклад доведення якогось твердження цим способом.
5. Які кути називаються: **а)** суміжними; **б)** вертикальними? Які властивості цих кутів ви знаєте?

6. Дайте означення паралельності двох прямих і сформулюйте їхні: **а)** властивості; **б)** ознаки.
7. Яка фігура називається трикутником? Які властивості кутів трикутника (внутрішніх і зовнішніх) та нерівності для сторін і кутів трикутника ви знаєте?
8. Які трикутники називаються рівнобедреними? Сформулюйте властивості й ознаки рівнобедреного трикутника.
9. Які властивості висот (бісектрис, медіан) трикутника ви знаєте?
10. Яке коло називають: **а)** вписаним у трикутник; **б)** описаним навколо трикутника; **в**)** зовнівписаним для даного трикутника? Які властивості цих кіл ви знаєте?
11*. Що таке «геометричне місце точок (ГМТ), яке задовольняє певну умову»? Сформулюйте властивості бісектриси кута й серединного перпендикуляра до відрізка як відповідних ГМТ. Які ще ГМТ ви знаєте?
12. Яка фігура називається колом? Які властивості хорд кола ви знаєте?
13. Сформулюйте означення прямої, дотичної до кола, й пригадайте її властивості.
14. Які види дотику двох кіл ви знаєте? Сформулюйте властивості таких кіл.
15. Сформулюйте означення вписаного та центрального кутів кола. Які властивості цих кутів і кутів, утворених хордами, січними й дотичними до кола, ви знаєте?
16. Сформулюйте: **а)** теорему Фалеса та теорему, обернену до неї; **б)** узагальнену теорему Фалеса та теорему, обернену до неї.
17. Які трикутники називаються: **а)** рівними; **б)** подібними?
18. Сформулюйте ознаки й властивості: **а)** рівних трикутників; **б)** подібних трикутників; **в)** рівних прямокутних трикутників; **г)** подібних прямокутних трикутників.
19. Які властивості прямокутних трикутників ви знаєте? (Пригадайте й метричні співвідношення у прямокутному трикутнику.)
20. Яка фігура називається: **а)** багатокутником; **б)** опуклим багатокутником; **в)** правильним багатокутником; **г)** вписаним багатокутником; **д)** описаним багатокутником? Які властивості багатокутників ви знаєте?
21*. **а)** У який багатокутник можна вписати коло? **б)** Навколо якого багатокутника можна описати коло?
22*. Пригадайте властивості й ознаки вписаного та описаного чотирикутників.
23. Які види чотирикутників ви знаєте? Сформулюйте їхні означення, властивості й ознаки.
24**. Яку фігуру утворюють бісектриси: **а)** паралелограма; **б)** прямокутника; **в)** ромба; **г)** зовнішніх кутів прямокутника?

Примітка для вчителя. Зірочкою позначено дещо складніші для учнів питання, а двома – необов'язкові для вивчення у класах загальноосвітньої підготовки (призначені для матккласів). Більшість з наведених питань сформульовано так, що ви маєте змогу уточнити вимоги щодо їхнього змістовного наповнення опорними фактами.

Означення – назва (з поясненням, що саме так називається).

Аксіома – приймається без доведення.

Теорема – *доводиться* певним логічним міркуванням (доведенням).

Доведення спирається на аксіоми і твердження, доведені раніше (складається з логічних кроків).

Наслідок – безпосередній висновок з теореми або аксіоми.

Пряма й обернена теореми – міняються місцями умова і висновок.

ОБЕРНЕНА ТЕОРЕМА ВИМАГАЄ ДОВЕДЕННЯ!

Множина – сукупність об'єктів, які ми уявляємо як єдине ціле.
Наприклад: множина вусатих, множина трикутників.

Ознака – теорема, яка за висновок має належність фігур певній множині (означення якій було дано раніше).

25*. Визначте вид чотирикутника, що має за вершини середини сторін: **а)** довільного чотирикутника; **б)** паралелограма; **в)** рівнобедреної трапеції; **г)** ромба.

26. Що таке: **а)** середня лінія трикутника; **б)** середня лінія трапеції? Які властивості цих відрізків вам відомі?

27*. Які опорні задачі трапеції ви знаєте?

28*. Які опорні задачі рівнобедреної трапеції ви знаєте?

29. **а)** Яким властивостям фігури відповідає поняття площі фігури? **б)** Які фігури називаються рівновеликими? **в**)** Які багатокутники називаються рівноскладеними?

Властивість – теорема, яка за висновок має виконання певних умов, якщо фігура належить даній множині.

30. За якими формулами обчислюють площу: **а)** квадрата; **б)** прямокутника; **в)** паралелограма; **г)** трикутника; **д)** прямокутного трикутника; **е)** трапеції; **є**)** рівнобедреної трапеції, діагоналі якої взаємно перпендикулярні?

31*. Як відносяться площі: **а)** трикутників з рівними основами; **б)** трикутників з рівними висотами; **в)** подібних трикутників; **г)** паралелограмів, по дві сторони яких містяться на спільних паралельних прямих; **д)** трапецій з відповідно рівними основами; **е)** трапецій, основи яких містяться на спільних паралельних прямих?

Доведення від супротивного

1. Чітко сформулювати твердження, що саме треба довести.
2. Сформулювати твердження, обернене до (1).
3. Зробити припущення, що (2) виконується.
4. Прийти логічними кроками до протиріччя.
5. Висновок: (2) є хибним і виконується (1).

32. Доведіть методом подібності опорні факти: **а*)** про відрізки, на які бісектриса трикутника поділяє його сторону; **б**)** формулу Лагранжа для довжини бісектриси трикутника; **в*)** про добуток відрізків хорд кола, на які вони поділяються при перетині; **г**)** про відстань між центром кола і точкою на хорді кола (наслідок з факту **в)**); **д*)** про співвідношення між відрізками дотичної і січної, проведеними з однієї точки до кола; **е**)** теорему Птолемея.

33. Які опорні задачі ви вмієте доводити методом: **а*)** подібності; **б**)** допоміжного кола; **в**)** площ?

34.** На стороні AC трикутника ABC взято точку M, а на стороні BC – точку K так, що $AM : MC = m : n$, $BK : KC = p : t$. У якому відношенні AK поділяє відрізок BM?

35.** На стороні AB трикутника ABC взято точку M, а на стороні BC – точку K так, що $CK : KB = m : n$, а точка перетину AK і CM поділяє CM у відношенні $p : t$. У якому відношенні точка M поділяє сторону AB?

36. Сформулюйте означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса гострого кута прямокутного трикутника. Чи залежить значення цих тригонометричних функцій від розміщення і розмірів прямокутного трикутника?

Щоб встановити хибність якогось твердження, достатньо навести один контрприклад.

37. Запишіть співвідношення між тригонометричними функціями: **а)** одного і того самого кута; **б)** доповняльних кутів (кутів, що в сумі становлять 90°).

38*. Як змінюється значення синуса (косинуса, тангенса, котангенса) при зміні градусної міри кута від 0° до 90°?

39. Запишіть табличку значень тригонометричних функцій для кутів градусної міри: 0°; 30°; 45°; 60°; 90°.

Якщо навести приклади (навіть дуже багато), коли твердження виконується, – це не є його доведенням.

40. Пригадайте задачі на розв'язування прямокутних трикутників: **а)** як за градусною мірою одного з гострих кутів і довжиною однієї зі сторін знайти другий гострий кут та інші його сторони; **б)** як за довжинами двох сторін знайти довжину третьої сторони й міри гострих кутів.

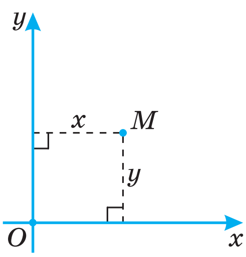
41. Що означає «розв'язати задачу на побудову»? Які опорні задачі на побудову ви знаєте?

Розділ I
КООРДИНАТНА ПЛОЩИНА. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ КУТІВ ВІД 0° ДО 180°. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

У цьому розділі ви дізнаєтеся, у чому полягає відкриття французького вченого Декарта і як воно дає змогу перекладати геометричні задачі на мову алгебри, а алгебраїчним задачам надавати геометричного тлумачення. Завдяки саме цьому відкриттю ми з вами, зокрема, маємо змогу визначити тригонометричні функції тупих кутів, значно спростити розв’язування певних геометричних задач, зокрема – розв’язування трикутників. Узагалі, сучасна математика, мабуть, не існувала б без цього відкриття Декарта.

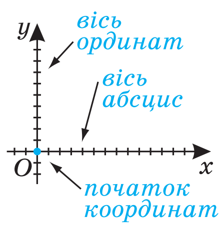
§ 1. Декартова система координат. Відстань між двома точками на координатній площині і рівняння кола. Координати середини відрізка

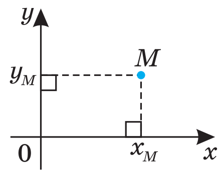
У чому полягає відкриття *Декарта* (1596–1650)? Ми називаємо його *аналітичною геометрією*. Як і все геніальне, воно геніально просте. Декарт змусив алгебру працювати на геометрію.



Мал. 1.1

Базовим поняттям аналітичної геометрії є поняття системи координат. Найпростішою системою координат є так звана *декартова прямокутна система*. Її задають так: на площині вибирають дві взаємно перпендикулярні числові осі – *осі координат*, які перетинаються в точці *O* – *початку координат* (мал. 1.1).





$(x; y)$ – координати точки,

$M(x_M; y_M)$.

абсциса

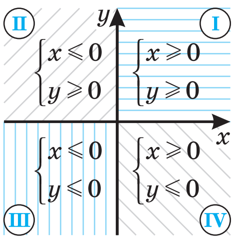
ордината

Осі координат називають: горизонтальну – *віссю абсцис* (позначають як Ox), вертикальну – *віссю ординат* (позначають як Oy). Для довільної точки площини M знаходимо відстані від осей координат. Числа x і y – *абсциса й ордината точки* M – за модулями дорівнюють цим відстаням (див. мал. 1.1 і мал. на полі). При цьому, *якщо точки лежать* (мал. 1.2):

- *праворуч від осі ординат – їхні* ***абсциси додатні***;
- *ліворуч від осі ординат – їхні* ***абсциси від'ємні***;
- *над віссю абсцис – їхні* ***ординати додатні***;
- *нижче від осі абсцис – їхні* ***ординати від'ємні***.

Числа x і y саме у такій послідовності і є *декартовими координатами точки* M: x – її *абсциса*; y – *ордината*. Пишемо так: $M(x; y)$.

Площину, на якій уведено декартову систему координат, називають *координатною площиною, декартовою площиною*, або *площиною* xy, і позначають (xOy) або просто (xy).



Осі координат розбивають координатну площину на чотири частини – *чверті* (мал. 1.2). Інколи їх називають *координатними кутами*. **У межах однієї координатної чверті знаки обох координат зберігаються.**

Зауваження. Точки на координатних осях відносять до відповідних координатних чвертей.

Точки, які лежать на осі Ox, мають ординати, що дорівнюють нулю ($y = 0$), а точки осі Oy мають абсциси, що дорівнюють нулю ($x = 0$) (мал. 1.3).

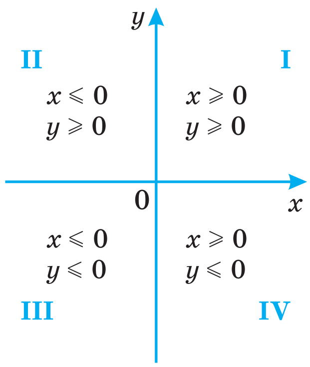
Кожній точці площини відповідає певна пара чисел, і навпаки – кожній парі чисел відповідає певна точка площини. Саме **ця взаємно однозначна відповідність і є прямокутною системою координат Декарта**.

Для допитливих

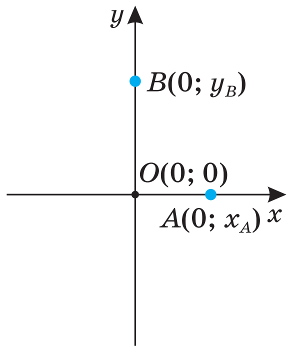
Доведіть методом від супротивного (спираючись на ознаки рівності прямокутних трикутників й аксіоми геометрії) взаємно однозначну відповідність між точкою координатної площини і парою чисел – її координат (необхідну й достатню умови).

Нащадок старовинного французького дворянського роду *Рене Декарт* (1596–1650) був справжнім улюбленцем долі. Про такого говорять, що при народженні його поцілували всі музи. Удача супроводила його не тільки в науці. Сміливий і безстрашний, він перемагав не лише інтелектом, а й інколи зі зброєю в руках. Так, якось йому вдалося за допомогою шпаги, якою він володів з д'артаньянівською майстерністю, змусити піратів пристати до берега і дати можливість висадитися йому самому та його слузі.

Немає, мабуть, точної закономірності у співвідношенні між сміливістю наукового мислення й особистою мужністю вченого. Проте поєднання цих рис ми бачимо в переважній більшості відомих дослідників (Фалес, Піфагор, Архімед, Ейлер, Лобачевський, Декарт...).



Мал. 1.2



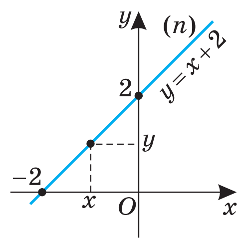
Мал. 1.3

А що можна поставити у відповідність лінії на площині? Декарт пропонує *у відповідність лініям площини ставити рівняння з двома невідомими x і y так, що*:

- *координати довільної точки, яка лежить на цій лінії, задовольнятимуть це рівняння*;
- *координати точок, що не лежать на цій лінії, не задовольнятимуть його.*

Позначають:
Ox – вісь абсцис;
Oy – вісь ординат.

Наприклад, для точок прямої лінії і тільки для точок цієї лінії справедлива рівність $y = kx + l$ (якщо k і l – фіксовані сталі). Цю рівність називають *рівнянням прямої*.



Пряма (n) – усі її точки мають координати $(x; x+2)$.

А як задати рівнянням коло? Ми знаємо з курсу геометрії 7-го класу, що *коло – це геометричне місце точок площини, рівновіддалених від певної точки цієї площини – його центра*. (Для будь-якої точки площини, що не належить колу, ця відстань буде меншою або більшою за радіус кола.) Тоді щоб знайти рівняння кола, спочатку треба виразити відстань між двома точками площини через їхні координати.

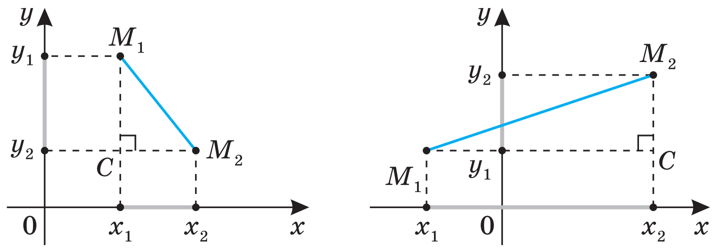
Для допитливих

Мати Декарта померла від туберкульозу через кілька днів після його народження, а з 8-ми років він повністю утримувався вихователями єзуїтської школи, заснованої у той час за особливого сприяння Генріха IV.

Щасливий випадок спрямував інтереси Декарта в бік математики. Під час гарнізонної служби в голландському містечку якось увагу його привернуло оголошення, наклеєне на стіні. Проте написане воно було фламандською мовою, якої Декарт не знав. З проханням перекласти текст він звернувся до найближчого з перехожих, який також зацікавився цим оголошенням. Незнайомець, до якого звернувся Декарт, виявився професором математики Бекманом, який не без іронії на цікавість молодого солдата відповів, що це публічний виклик до розв'язування геометричної задачі і він перекладе зміст задачі, якщо юнак візьметься розв'язати її. Другого ж дня Декарт приніс розв'язання, і це поклало початок його заняттям математикою під керівництвом Бекмана, що тривали два роки.

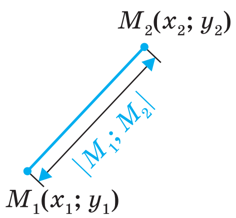
ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ

Нехай маємо дві точки площини $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$. Знайдемо довжину відрізка M_1M_2 (мал. 1.4).



а) б)

Мал. 1.4



$M_1M_2 =$
$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

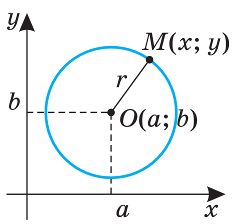
Відстані між проекціями даних точок M_1 і M_2 на осі абсцис і ординат дорівнюють $|x_1 - x_2|$ і $|y_1 - y_2|$ відповідно. Катети прямокутного трикутника M_1CM_2 мають такі самі довжини (як сторони утворених прямокутників).

За теоремою Піфагора знаходимо довжину гіпотенузи трикутника M_1CM_2 – **відстань між точками $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$:**

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Зауваження. Якщо відрізок M_1M_2 паралельний одній з координатних осей, то або $|x_1 - x_2| = 0$, або $|y_1 - y_2| = 0$ і наведена формула для обчислення довжини M_1M_2 теж є правильною.

РІВНЯННЯ КОЛА



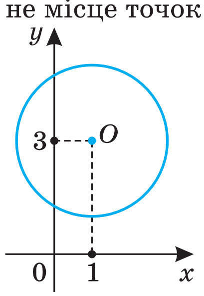
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Тепер можна записати рівняння кола, як геометричне місце точок $M(x; y)$, відстань від яких до центра кола – точки $O(a; b)$ є сталою і дорівнює радіусу кола r:

$$MO = r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Тоді **рівняння кола з центром $O(a; b)$ і радіусом r** має вигляд

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$



Мал. 1.5

Наприклад, на малюнку 1.5 зображено коло, задане рівнянням

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 2^2.$$

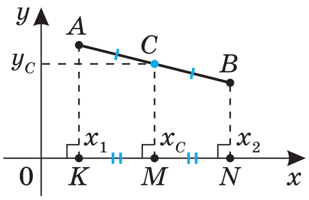
Для допитливих

Декарт – математик, закоханий у поезію, писав: «У вільний час зимою, порівнюючи таємниці природи із законами математики, я насмілююсь сподіватися, що знайшов основу дивної науки». Уся літературна діяльність Декарта розвивалася протягом лише 12 років; вона промайнула, як метеор, але залишила блискучі й міцні сліди в усій конструкції сучасної математики. Основи відкритої аналітичної геометрії Декарт опублікував у 1637 р. в книзі «Геометрія».

КООРДИНАТИ СЕРЕДИНИ ВІДРІЗКА

Корисно знати ще й вираз для *обчислення координат точки, що є серединою відрізка, за координатами його кінців*.

1) Нехай відрізок з кінцями $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ не паралельний осям координат, тобто $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Знайдемо координати його середини – точки $C(x_C; y_C)$ (мал. 1.6).



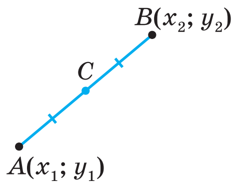
Мал. 1.6

Проведемо: $AK \perp Ox$, $CM \perp Ox$, $BN \perp Ox$. Тоді $AK \parallel BN \parallel CM$. Звідси, враховуючи, що $AC = CB$, отримаємо $KM = MN$, тобто $|x_1 - x_C| = |x_2 - x_C|$.

Тоді $(x_1 - x_C) = (x_2 - x_C)$, або $(x_1 - x_C) = -(x_2 - x_C)$.

За умовою $x_1 \neq x_2$ і виконується лише друга рівність, з якої маємо:

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}.\ \text{Аналогічно}\ y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

2) Якщо $AB \parallel Ox$, то $y_1 = y_2 = y_C$, а $x_C = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

Якщо $AB \parallel Oy$, то $x_1 = x_2 = x_C$, а $y_C = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Тобто отримані раніше співвідношення також є правильними.

Таким чином, **координати середини відрізка, кінцями якого є точки $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$, обчислюють за формулами:**

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Нагадаємо позначення:
$\not\equiv$ – «не збігається», «не є тотожністю»;
$\in$ – «належить»;
$[AB]$ – відрізок AB.

Зауваження. При *розв'язуванні геометричної задачі методом координат* треба не лише «перекласти» мовою алгебри її умову і розв'язати алгебраїчну задачу, а ще й дати геометричне тлумачення отриманого алгебраїчного результату. Розглянемо приклади.

1. *Рівняння $x^2 + y^2 = c^2$ описує коло, центром якого є початок координат* $O(0; 0)$, а радіус $r = |c|$.

2. *Рівняння $x^2 + y^2 + nx + my + p = 0$ визначає: або коло, або точку, або порожню множину.* Щоб визначити, який саме випадок має місце,

Для допитливих

1. Полем проходить прямолінійна дорога. Людина, яка стоїть на цій дорозі в точці A, може рухатися: полем зі швидкістю не більш як 3 км/год; дорогою – не більш як 6 км/год. Знайдіть множину точок, у які вона може дістатися за 1 год.

2. У селі Семихатки сім хат – для довільних трьох хат відстань хоча б між двома з них дорівнює 50 м. Накресліть план розташування хат у цьому селі.

у рівнянні треба виділити квадрати двочленів відносно x та y:

$$x^2 + 2\cdot\frac{n}{2}x + \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2 + y^2 + 2\cdot\frac{m}{2}y + \left(\frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 + p = 0,$$

$$\left(x + \frac{n}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{m}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4} + \frac{m^2}{4} - p.$$

Якщо права частина отриманого співвідношення:
- *додатна – це рівняння кола;*
- *дорівнює нулю – це точка;*
- *від'ємна – це порожня множина.*

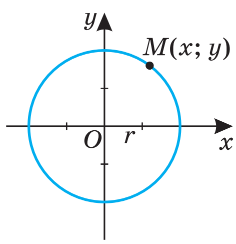
Наприклад, $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ перетворюємо так:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) - 1 - 4 + 1 = 0,$$
$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2^2.$$

Розглянуте рівняння задає коло з центром $O(1; -2)$, радіус якого дорівнює 2.

$\boldsymbol{x^2 + y^2 + nx + my + p = 0}$ визначає: або **коло** – $r^2 > 0$, або **точку** – $r^2 = 0$, або **порожню множину** – $r^2 < 0$, $r^2 = \frac{n^2}{4} + \frac{m^2}{4} - p$

3. З аксіоми про вимірювання відрізків і нерівності для сторін трикутника маємо таке. **Якщо на площині задано три точки A, B, C і для відстаней між ними виконується співвідношення $|AB| = |AC| + |CB|$, то ці точки лежать на одній прямій (причому точка C лежить між точками A і B).** Правильним є й обернене твердження.

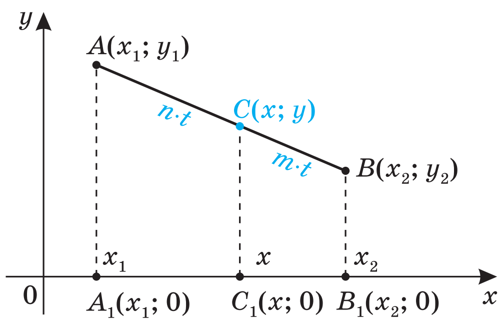


$x^2 + y^2 = c^2$

$O(0; 0)$; $r = |c|$

КООРДИНАТИ ТОЧКИ, ЯКА ДІЛИТЬ ВІДРІЗОК У ЗАДАНОМУ ВІДНОШЕННІ

Нехай точка $C(x; y)$ лежить на відрізку з кінцями у точках $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$ і ділить цей відрізок у відношенні $|AC| : |CB| = n : m$ (мал. 1.7). Знайдемо координати точки C.



Мал. 1.7

$|AB| = |AC| + |CB|$

$\Updownarrow$

A, B, C на одній прямій і $C \in [AB]$

Для допитливих

Термін *координата* походить з латині й означає «впорядкованість».

Співтворцем аналітичної геометрії Декарта вважають любителя математики, автора численних блискучих відкриттів французького юриста *П'єра Ферма* (1601–1665).

Прямі AA_1, CC_1 і BB_1 перпендикулярні до осі Ox, отже, вони паралельні між собою. Тоді, за теоремою Фалеса, маємо:

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1}=\frac{AC}{CB}=\frac{n}{m}, \qquad \left|\frac{x-x_1}{x_2-x}\right|=\frac{n}{m}.$$

Можливі два випадки: $x_2 > x > x_1$; $x_1 > x > x_2$. В обох випадках вираз під знаком модуля додатний. Тоді:

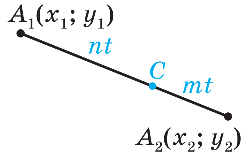
$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{n}{m}, \quad x=\frac{nx_2+mx_1}{n+m}.$$

Аналогічно маємо, що

$$y=\frac{ny_2+my_1}{n+m}.$$

Таким чином, координати точки C, яка ділить відрізок з кінцями в точках $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ у відношенні $|AC| : |CB| = n : m$, дорівнюють

$$x=\frac{nx_2+mx_1}{n+m};\; y=\frac{ny_2+my_1}{n+m}.$$



$$x_C=\frac{nx_2+mx_1}{n+m}$$

$$y_C=\frac{ny_2+my_1}{n+m}$$

У випадку $\frac{A_1C}{CA_2}=\lambda$: $(\lambda=n:m)$

$$x_C=\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1};$$

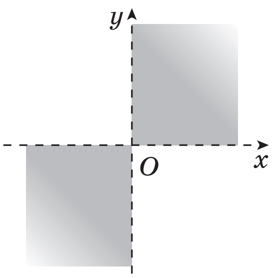
$$y_C=\frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

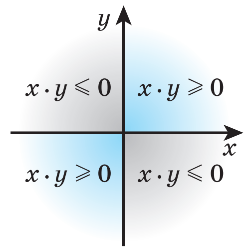
Приклад 1. Знайдіть усі точки $(x; y)$ координатної площини, які задовольняють умову $xy > 0$.

Розв'язання

Умова $xy > 0$ рівносильна тому, що числа x і y мають однакові знаки, тобто $x > 0$ і $y > 0$ або $x < 0$ і $y < 0$. Тоді розв'язком задачі буде множина точок, які лежать у I або III координатній чверті, але не на координатних осях (мал. 1.8).



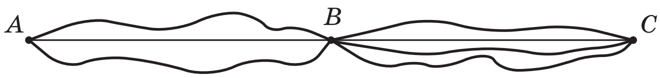
Мал. 1.8



Для допитливих

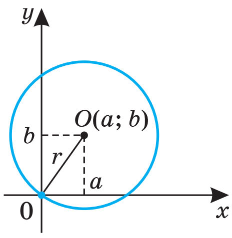
ПРАВИЛО МНОЖЕННЯ

Проаналізуємо таку уявну ситуацію, яка зрештою може виявитись і цілком реальною. Нехай із пункту A до пункту B прокладено 2 туристичні маршрути, а з пункту B до пункту C – 3 маршрути. Запитується: скількома способами можна здійснити туристичну подорож із пункту A до пункту C?

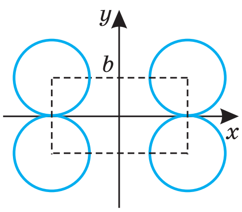


Оскільки після подолання кожного з двох маршрутів, що сполучають пункти A і B, залишається по три можливості дістатися з B до C, то всього з A до C можна дістатися $2\times3 = 6$ способами.

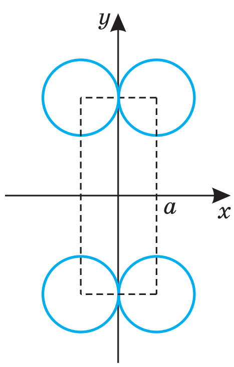
Узагальнення цієї простої задачі є *основним правилом комбінаторики*, яке ще називають *правилом множення*. **Якщо об'єкт X можна обрати m способами, а об'єкт Y – n способами (незалежно від вибору X), то пару X і Y можна обрати $m \times n$ способами.**



$r=\sqrt{a^2+b^2}$



$r=|b|$



$r=|a|$

Приклад 2. Доведіть, що середина відрізка з кінцями в точках $A(5;\ 7)$ і $B(8;\ -7)$ лежить на осі Ox.

Доведення

Нехай $C(x_0;\ y_0)$ – середина відрізка AB. Тоді

$$y_0=\frac{7+(-7)}{2}=0.$$

Щ. в. д.

Приклад 3. Запишіть рівняння кола з центром у точці $(-1;\ 3)$, яке проходить через початок координат.

Розв'язання

1) Точка $(-1;\ 3)$ – центр кола, тоді його рівняння має вигляд:

$$(x-(-1))^2+(y-3)^2=r^2,\quad (x+1)^2+(y-3)^2=r^2.$$

2) Коло проходить через точку $O(0;\ 0)$, тому значення $x=0$ і $y=0$ задовольняють рівняння цього кола:

$$(0+1)^2+(0-3)^2=r^2,\quad r^2=10.$$

3) Висновок: рівняння шуканого кола має вигляд:

$$(x+1)^2+(y-3)^2=10.$$

Відповідь: $(x+1)^2+(y-3)^2=10$.

Зауваження. Відповідь до останньої задачі можна записати й інакше, наприклад (якщо розкрити дужки і звести подібні доданки) $x^2+y^2+2x-6y=0$.

Приклад 4. Знайдіть точку на осі ординат, рівновіддалену від початку координат і точки $A(3;\ -1)$.

Розв'язання

1) Шукана точка M лежить на осі Oy, тому $M(0;\ y_M)$ і $|MO|=y_M$, $|AM|=\sqrt{(x_A-x_M)^2+(y_A-y_M)^2}=\sqrt{9+(-1-y_M)^2}$.

2) $|MO|^2=|AM|^2$, тоді $y_M{}^2=9+(1+y_M)^2$, $y_M=-5$.

Відповідь: $(0;\ -5)$.

Приклад 5. Знайдіть точку, яка належить колу $(x-2)^2+(y-3)^2=3$ і рівновіддалена від осей координат.

Розв'язання

Точки $C(x_C;\ y_C)$, які рівновіддалені від осей координат, лежать на бісектрисах кутів, утворених координатними осями, тобто задовольняють умову $x_C=y_C$ або $x_C=-y_C$. Коло з центром $O(2;\ 3)$ і радіусом $R=\sqrt{3}$ міститься в I чверті координатної площини (бо $R=\sqrt{3}<2$ і $R=\sqrt{3}<3$).

Для допитливих

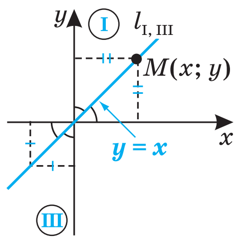
Розв'язування геометричних задач інколи пов'язано з *комбінаторним перебором* варіантів конфігурацій (див. с. 15). Цілеспрямований перебір різних можливих варіантів потрібний і для складання розкладу руху транспорту, занять у школі, шифрування та дешифрування письмової інформації, у тому числі кодування тощо. Наприклад, кодами є державні номерні знаки для транспорту, товарні знаки (штрих-коди) тощо.

Тоді шукана точка може належати тільки бісектрисі I чверті координатної площини і $x_C = y_C$. Маємо:

$$(x_C - 2)^2 + (x_C - 3)^2 = 3, \quad 2x_C^{\,2} - 10x_C + 13 = 3,$$
$$x_C^{\,2} - 5x_C + 5 = 0.$$

Коренями останнього рівняння є додатні числа $\dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Відповідь: $\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$.



Приклад 6. Знайдіть точку, рівновіддалену від осей координат і точки $A(-3; -6)$.

Розв'язання

Координати точок $C(x_C; y_C)$, рівновіддалених від осей Ox і Oy, задовольняють умову $|x_C| = |y_C|$. Тобто треба розглянути два випадки, коли $x_C = y_C$; $x_C = -y_C$.

1) Нехай $x_C = y_C$. Тоді

$$CA^2 = (x_C + 3)^2 + (x_C + 6)^2 = x_C^{\,2}; \quad x_C^{\,2} + 18x_C + 45 = 0.$$

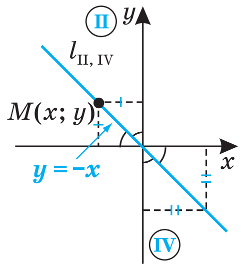
Останнє рівняння має два розв'язки $\{-3; -15\}$. Таким чином, точки $(-3; -3)$ і $(-15; -15)$ рівновіддалені від осей координат і точки A.

2) Нехай $x_C = -y_C$. Тоді

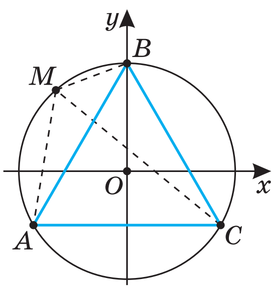
$$CA^2 = (x_C + 3)^2 + (-x_C + 6)^2 = x_C^{\,2}; \quad x_C^{\,2} - 6x_C + 45 = 0.$$

Отримане рівняння не має коренів.

Відповідь: $(-3; -3)$, $(-15; -15)$.



Точки, рівновіддалені від осей координат, належать бісектрисам координатних кутів і навпаки.



Мал. 1.9

Приклад 7. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин вписаного в нього правильного трикутника не залежить від положення точки на колі.

Доведення

Через центр O кола, описаного навколо рівностороннього трикутника ABC, і його вершину B проведемо вісь Oy; вісь Ox – паралельно AC (мал. 1.9).

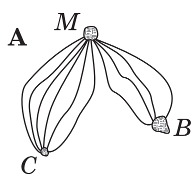
Для допитливих

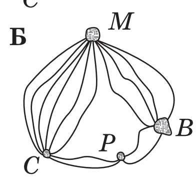
1. Із села C до міста M веде 6 доріг, а з міста M до міста B – 4 дороги (див. мал. **А**). Скількома способами можна проїхати із села C до міста B?

2. Недалеко від пунктів C, M і B попередньої задачі побудували селище P і кілька нових доріг (див. мал. **Б**). Скількома способами тепер можна дістатися із села C до міста B?

3. Скільки існує відрізків, довжини яких (в метрах) є двоцифровими цілими числами з різними цифрами?

4. Кожну клітинку квадратної таблиці 5×5 можна пофарбувати в жовтий або синій колір. Скільки існує різних варіантів розфарбування цієї таблиці?





Координати довільної точки кола $M(x;\ y)$ задовольняють рівняння кола $x^2 + y^2 = R^2$.

Довжина сторони трикутника ABC $a = R\sqrt{3}$, тому координати вершин трикутника $A\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$, $B\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$, $C\left(\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$ можна записати у такому вигляді:

$$A\left(-\frac{R\sqrt{3}}{2}; -\frac{R}{2}\right),\ B(0; R),\ C\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}; -\frac{R}{2}\right).$$

Тоді

$$MA^2 = \left(x + \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{R}{2}\right)^2;\ MB^2 = x^2 + (y - R)^2;$$

$$MC^2 = \left(x - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{R}{2}\right)^2.$$

Шукана сума має вигляд:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \left(x + \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{R}{2}\right)^2 + x^2 + (y - R)^2 +$$

$$+ \left(x - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{R}{2}\right)^2 = 3(x^2 + y^2) + 3R^2 = 6R^2,$$

тобто не залежить від положення точки M на колі.

Щ. в. д.

Уміння розв'язувати задачі – таке ж практичне мистецтво, як і вміння плавати, бігати чи танцювати. Цього можна навчитися тільки шляхом наслідування і тренування.

Д. Пойя

Практична робота 1

1. Накресліть декартову систему координат і в ній позначте по дві точки: **а)** з абсцисами, що дорівнюють 3; **б)** з ординатами, що дорівнюють –2. Запишіть координати цих точок.
2. Накресліть декартову систему координат і в ній позначте дві точки та знайдіть їхні координати. Обчисліть відстань між точками за відповідною формулою. Виміряйте відстань між заданими точками і порівняйте отримані результати.
3. Накресліть декартову систему координат і позначте в ній точку. Знайдіть її координати і накресліть коло з центром у цій точці. Виміряйте радіус кола і запишіть його рівняння. Позначте довільну точку на колі. Запишіть її координати. Чи повинні координати цієї точки задовольняти рівняння кола? Перевірте відповідь відповідним обчисленням.

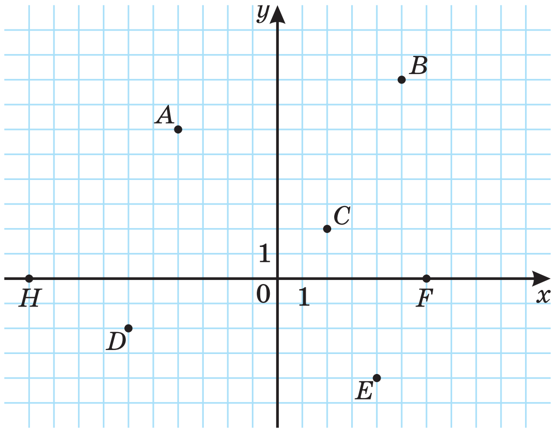
Для допитливих

Опорна задача. Доведіть, що координати центроїда трикутника дорівнюють середньому арифметичному відповідних координат вершин цього трикутника.

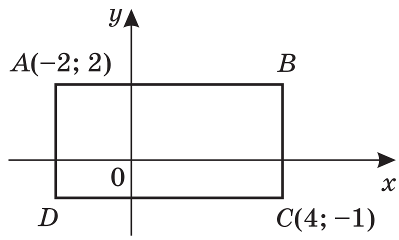
4. Накресліть декартову систему координат і в ній довільний трикутник. Запишіть координати його вершин. Користуючись лінійкою, відмітьте середини його сторін і знайдіть координати цих точок. Обчисліть координати середин його сторін за відповідною формулою. Порівняйте отримані результати.

Завдання 1

1°. Запишіть координати точок, позначених на координатній площині (xy) (мал. 1.10).



Мал. 1.10



Мал. 1.11

2°. Позначте на координатній площині точки $M(5; 4)$, $N(-5; 4)$, $K(-5; -4)$, $T(5; -4)$, $A(4; 0)$, $B(-4; 0)$, $C(0; 5)$, $D(0; -5)$.

3°. Побудуйте чотирикутник, якщо відомі координати його вершин $A(2; 3)$, $B(3; -5)$, $C(-4; -1)$, $D(-5; 3)$.

4°. Не виконуючи побудови, вкажіть, у яких координатних чвертях лежать точки $M(-0,3; 80)$, $N(100; 200)$, $K(-500; -1000)$, $T(200; -0,1)$, $L(-100; 0,3)$, $S(120; -5)$.

5. На якій осі декартової системи координат знаходяться точки з координатами: **а)** $A(0; 4)$; **б)** $B(-2; 0)$; **в)** $C(5; 0)$; **г)** $D(0; -10)$?

6. Через точку $K(-4; 1)$ проведіть прямі m і n, паралельні осям координат. **а)** Чи лежать на прямих m і n точки $A(-4; 3)$, $B(4; -3)$, $C(2; 1)$, $D(-2; -1)$? **б)** Укажіть на прямих m і n координати точок, які віддалені від точки K на 2 одиниці.

7. За малюнком 1.11 знайдіть координати вершин прямокутника $ABCD$, сторони якого паралельні осям координат.

8. Три вершини прямокутника містяться в точках $(-1; 4)$, $(3; 4)$, $(-1; -2)$. Знайдіть координати четвертої вершини.

Для допитливих

Важливу роль мала аналітична геометрія у розвитку поняття числа. Від'ємні числа, відомі ще індійцям у VI–XI ст., європейські математики вважали абсурдними. Навіть Вієт не визнавав їх. Тільки завдяки аналітичній геометрії Декарта (правило вибору знаків координат точки на координатній площині) від'ємні числа повністю утвердилися в математиці.

Цікаво, що відкриття декартових координат не належить Декарту. Так, стародавній математик Александрійської школи *Аполлоній* (III–II ст. до н. е.) фактично користувався прямокутною системою координат, але замість алгебраїчної символіки (яка ще не існувала тоді) здійснював опис рівнянь через геометричні поняття.

9. Перевірте, чи лежать на лінії $y^2 - x^2 = 7$ точки $A(1; 8)$, $B(3; 16)$, $C(-5; 4)$.
10. Яка з точок $A(2; -1)$, $B(-1; 3)$, $C(0; -2)$ належить лінії, рівняння якої $|x| + 2y^2 = 4$?
11*. Сторона квадрата дорівнює 6. Одна його вершина міститься в початку координат, а дві – на осях і мають невід'ємні координати. Знайдіть координати всіх вершин квадрата.
12*. Точка перетину діагоналей ромба збігається з початком координат. Діагоналі ромба лежать на осях координат. Довжина однієї діагоналі дорівнює 8 одиниць, другої – 4 одиниці. Які координати можуть мати вершини ромба?
13. Дано точку $A(2; 4)$. Побудуйте точку, записавши її координати:
а) A_1, симетричну точці A відносно осі Ox;
б) A_2, симетричну точці A відносно осі Oy;
в) A_3, симетричну точці A відносно початку координат;
г*) A_4, симетричну точці A_1 відносно точки A_2.
14. Дано точку $A(-3; 2)$. Побудуйте точку:
а) A_1, симетричну точці A відносно осі Ox;
б) A_2, симетричну точці A відносно осі Oy;
в) A_3, симетричну точці A відносно початку координат;
г*) A_4, симетричну точці A_3 відносно точки A_1.
Запишіть координати побудованих точок.
15*. Чи належать точки координатної площини, що задовольняють рівняння $y = x$, множині точок, яка задається рівнянням $|y| + y^2 = |x| + x^2$?

Завдання 2

1°. Знайдіть відстань між точками: **а)** $A(3; 2)$ і $B(1; -7)$; **б)** $M(-4; -8)$ і $N(2; 0)$; **в)** $F(2; -1)$ і $D(2; 4)$; **г)** $G(3; -5)$ і $H(6; -5)$.
2°. Знайдіть відстань від початку координат до точки: **а)** $A(2; 3)$; **б)** $B(-7; 5)$; **в)** $M(-3; 4)$; **г)** $N(-4; -3)$.
3. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $A(2; -1)$, $B(-1; 3)$, $C(2; 7)$.
4. Доведіть, що трикутник FGH рівнобедрений, якщо $F(4; -2)$, $G(-4; 4)$, $H(-12; 10)$.
5*. Доведіть, що точки A, R і T лежать на одній прямій, якщо $A(-3; -7)$, $R(2; 3)$, $T(0; 1)$. Яка з точок лежить між двома іншими?
6*. Не виконуючи побудови точок, з'ясуйте, чи лежать точки $K(0; -4)$, $M(3; -2)$, $N(7; 1)$ на одній прямій.
7. Відстань між точками $A(m; -3)$ і $B(1; 5)$ дорівнює 10. Знайдіть координату m.
8*. На осі абсцис знайдіть точку, рівновіддалену від точок $M(-1; 4)$ і $N(5; -7)$.
9*. На осях координат знайдіть точку, віддалену від точки $P(6; -8)$ на: **а)** 16 одиниць; **б)** 10 одиниць; **в)** 4 одиниці.
10*. Знайдіть точку, рівновіддалену від точок $K(4; -5)$ і $T(-7; 8)$, якщо: **а)** шукана точка лежить на осі абсцис; **б)** шукана точка лежить на осі ординат; **в)** абсциса й ордината шуканої точки рівні.
11*. Доведіть, що чотирикутник з вершинами $A(4; 8)$, $B(7; 3)$, $C(4; -2)$ і $D(1; 3)$ – ромб.
12**. Координати всіх вершин трикутника – парні числа. Доведіть, що площа цього трикутника виражається натуральним числом.

Для допитливих

Французький математик *Орезм* у XIV ст. користувався прямокутними координатами для графічної ілюстрації залежності двох змінних. Замість сучасних термінів «абсциса» і «ордината» він використовував терміни «довгота» і «широта». Ідеї Орезма не мали поширення, бо в ті часи поняття функціональної залежності було ще дуже туманним.

13.** Координати вершин A і B квадрата $ABCD$ – цілі числа. Доведіть, що координати вершин C і D – також цілі числа.

14°. Складіть рівняння кола з центром у точці O, радіус якого дорівнює R, якщо:

а) $O(1; 2)$, $R = 3$; **г)** $O(3; 0)$, $R = 4$;
б) $O(-3; 4)$, $R = 8$; **д)** $O(0; -2)$, $R = 6$;
в) $O(-5; -4)$, $R = 1$; **е)** $O(0; 0)$, $R = 3$.

15°. Запишіть координати центра та радіус кола, заданого рівнянням:

а) $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 4$; **в)** $(x - 1)^2 + y^2 = 36$;
б) $(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 16$; **г)** $x^2 + y^2 = 100$.

16°. На координатній площині побудуйте коло, задане рівнянням:

а) $x^2 + y^2 = 25$; **б)** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$; **в)** $x^2 + (y + 4)^2 = 16$.

17°. Які з точок $A(0; 5)$, $B(1; 2)$, $C(5; -1)$, $D(-5; 0)$, $E(-4; 3)$, $F(-3; -4)$ лежать на колі $x^2 + y^2 = 25$?

18°. Які з точок $A(0; 3)$, $B(1; -4)$, $C(-4; -3)$ належать колу $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 26$?

19°. На координатній площині побудуйте коло із центром у точці $B(0; 4)$, діаметр якого дорівнює 4. Запишіть рівняння цього кола.

20. Складіть рівняння кола, що проходить через точку $A(1; 7)$, якщо його центром є точка $M(-3; 5)$.

21. На колі $x^2 + y^2 = 25$ знайдіть точки:
а) з ординатою –2; **б)** з абсцисою 4; **в)** такі, що лежать на осі абсцис; **г)** такі, що лежать на осі ординат.

22*. Знайдіть центр і радіус кола:

а) $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 6$;

б) $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 3$.

23. Якому колу (мал. 1.12) відповідає рівняння:

а) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$;

б) $x^2 + y^2 = 4$;

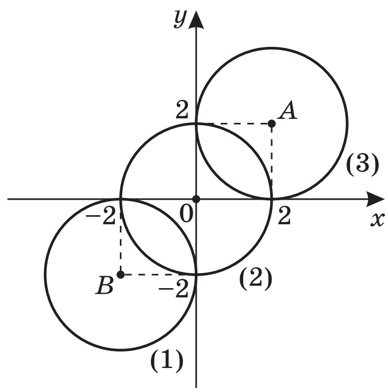
в) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$?

24*. Знайдіть відстань між центрами кіл:

а) $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ і $x^2 + y^2 - 10x - 6y = 2$;

б) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$ і $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 3$.

25*. Коло дотикається до координатних осей. Знайдіть координати точки дотику кола до осі Oy, якщо точка $M(3; 0)$ – точка дотику до осі Ox.



Мал. 1.12

26*. Запишіть рівняння кола, яке дотикається до координатних осей і проходить через точку (0; –1).

27*. Знайдіть координати центра кола, радіус якого дорівнює 2 і яке дотикається до осей координат.

28*. Запишіть рівняння кола, яке дотикається до координатних осей і проходить через точку (1; 2).

Для допитливих

1. Чи можуть три лицарі, кожний зі своїм зброєносцем, переправитися через річку в човні, що вміщує лише двох осіб, якщо зброєносці відмовляються залишатися з незнайомими лицарями без своїх хазяїв?

2. Учитель на уроці геометрії задав «хитру» задачу. Число хлопців, які її розв'язали, дорівнює числу дівчат, які цього не зробили. Кого в класі більше – тих, хто розв'язав задачу, чи дівчат?

29°. Знайдіть координати середини відрізка AB, якщо $A(-4; 7)$, $B(12; -5)$.

30. Точка K – середина відрізка NP, $K(5; -7)$, $P(-3; 8)$. Знайдіть координати точки N.

31. Знайдіть довжину медіани AM трикутника ABC, якщо $A(5; 1)$, $B(-3; -2)$, $C(-5; -6)$.

32. Складіть рівняння кола, діаметр якого дорівнює AB, якщо $A(4; -9)$, $B(-6; 5)$.

33*. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O. Знайдіть координати точок C і D, якщо відомо координати точок $A(-1; 6)$, $B(8; -3)$, $O(3; -2)$.

34*. Чотирикутник $MNPK$ – паралелограм, причому $M(1; -2)$, $N(2; 3)$, $P(5; 6)$. Знайдіть координати точки K.

35.** На осі ординат знайдіть точки, з яких відрізок AB видно під прямим кутом, якщо:
а) $A(-4; -1)$, $B(12; 1)$; **б)** $A(0; 6)$, $B(6; 14)$.

36.** На осі абсцис знайдіть точки, з яких відрізок AB видно під прямим кутом, якщо:
а) $A(-4; -1)$, $B(12; 1)$; **б)** $A(4; 0)$, $B(6; 14)$.

37*. Відрізок AB поділено на 3 рівні частини: $AC = CD = DB$. Знайдіть координати точок C і D, якщо $A(1; -2)$, $B(4; 4)$.

38*. Відрізок MN поділено на 4 рівні частини $MP = PT = TK = KN$. Знайдіть координати точок P, K, N, якщо $M(7; -13)$ і $T(-5; 1)$.

39.** Нехай $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $M(x_M; y_M)$. Відомо, що точка M належить відрізку AB і $AM : MB = \lambda$. Доведіть, що $x_M = \dfrac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}$; $y_M = \dfrac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}$.

40.** Відрізок AB поділено точкою M у відношенні 1 : 2. Знайдіть координати точки M, якщо $A(5; 3)$, $B(-1; -3)$.

41.** За даними вершиною трикутника $A(3; -2)$ і серединою протилежної сторони $M(-6; 2)$ знайдіть координати центра мас трикутника.

42.** Знайдіть координати точки перетину медіан трикутника ABC, якщо відомо координати:
а) його вершин: $A(4; 1)$, $B(2; 1)$, $C(4; 3)$;
б) середин сторін трикутника: $M_1(-3; 2)$, $M_2(1; 0)$, $M_3(3; 4)$.

43.** Доведіть, що AL – бісектриса внутрішнього кута трикутника ABC, якщо:
а) $A(4; 1)$, $B(6; 5)$, $C(2; 7)$, $L(3; 4)$;
б) $A(0; 7)$, $B(-4; -1)$, $C(12; 1)$, $L(2{,}4; -0{,}2)$.

44.** Точки $A(9; 4)$, $B(-3; -1)$, $C(3; 4)$ є вершинами трикутника ABC, AK – його бісектриса. Знайдіть:
а) координати точки K;
б) довжину бісектриси AK.

45.** Скільки на площині існує таких точок, сума квадратів відстаней від кожної з яких до даних двох точок $A(2; 3)$ і $B(-2; -1)$ дорівнює 5,5?

Для допитливих

1. Декілька шахістів у парку цілий день грали в шахи. Оскільки вони мали лише один комплект шахів, то встановили такий порядок гри. Той, хто виграє партію, – пропускає дві наступні. Той, хто програє партію, – пропускає чотири наступні. У випадку нічиєї – у програші залишається той, хто грав білими фігурами. Скільки було шахістів, якщо цих правил вдалося дотриматися?

2. Існують шахівниці, що мають бортики для того, щоб фігури не падали з них під час гри, наприклад у поїзді. Спробуйте розмістити на такій дошці 28 пластинок доміно, кожна з яких займає тільки дві клітинки дошки, так, щоб жодну з пластинок не можна було зрушити з місця у площині шахівниці.

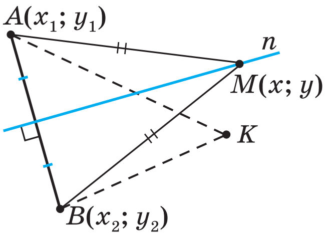
§ 2. Рівняння прямої

ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

З курсу алгебри відомо, що графіком функції $y = kx + l$ є пряма. Цю рівність ще називають *рівнянням прямої*.

Ми з'ясуємо, чи будь-якій прямій на координатній площині відповідає рівняння $y = kx + l$.

З цією метою знайдемо рівняння довільної прямої n декартової площини, спираючись на властивість серединного перпендикуляра до відрізка.



Мал. 1.13

Позначимо на координатній площині дві точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ так, щоб пряма n була серединним перпендикуляром до відрізка AB (мал. 1.13). Тоді, за властивістю серединного перпендикуляра до відрізка, довільна точка $M(x; y)$ прямої n рівновіддалена від кінців відрізка AB, тобто $AM = BM$ і $AM^2 = BM^2$:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2.$$

Після розкриття дужок і зведення подібних доданків отримаємо:

$$2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y + x_2^{\,2} + y_2^{\,2} - x_1^{\,2} - y_1^{\,2} = 0.$$

У цьому співвідношенні значення чисел x і y можуть змінюватися (як координати довільної точки M прямої n), а числа x_1, y_1, x_2, y_2 при цьому не змінюються.

Звідси координати x і y довільної точки прямої n задовольняють рівняння

$$ax + by + c = 0,$$

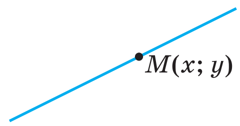
де $a = 2(x_1 - x_2)$, $b = 2(y_1 - y_2)$ і $c = x_2^{\,2} - x_1^{\,2} + y_2^{\,2} - y_1^{\,2}$ – сталі величини для даної прямої.

Важливе зауваження. Якщо деяка точка K не належить заданій прямій n (мал. 1.13), то $AK^2 \neq BK^2$ (за властивістю серединного перпендикуляра до відрізка), і координати цієї точки не задовольняють рівняння прямої n.

Рівняння $ax + by + c = 0$ називають ***загальним рівнянням прямої***. Ще кажуть, що пряму задано *рівнянням загального вигляду*, або *рівняння прямої записано у загальній (канонічній) формі*.

З усіх мов світу найкраща – це мова штучна, вельми стисла, мова математики.

М. І. Лобачевський



$ax + by + c = 0$

загальне рівняння прямої,
або
рівняння прямої у загальній (канонічній) формі

Точка $(x_0; y_0)$ НАЛЕЖИТЬ прямій $ax + by + c = 0$ тоді і тільки тоді, ЯКЩО $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Для допитливих

1. А чи можете ви відповісти на запитання, чому в алгебрі лінійну функцію не задають у вигляді $ax + by + c = 0$? Порада. Пригадайте означення функції.
2. Якій множині точок на координатній площині відповідає випадок $a = 0$, $b = 0$ і $c \neq 0$? А випадок $a = 0$, $b = 0$ і $c = 0$?

Нагадаємо: *(1)* $\Leftrightarrow$ *(2)* – твердження рівносильні, (*1*) $\Rightarrow$ (*2*) і (*2*) $\Rightarrow$ (*1*).

Рівняння прямої *n*:

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ b\neq 0 \end{cases}$$

n $\not\parallel$ ***Oy***

можна записати як

$y = kx + l$;

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ b=0 \\ a\neq 0 \end{cases}$$

n $\parallel$ ***Oy***

має вигляд

$x =$ **const;**

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a=0 \\ b\neq 0 \end{cases}$$

n $\parallel$ ***Ox***

має вигляд

$y =$ **const;**

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ c=0 \\ b\neq 0 \\ a\neq 0 \end{cases}$$

має вигляд

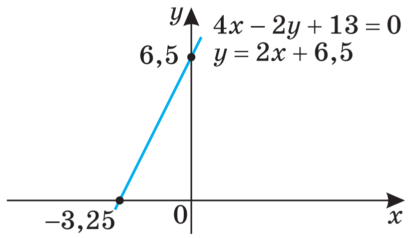
$y = kx$ **– пряма пропорційність.**

Виникає запитання, чи можна сказати, що загальне рівняння прямої і рівняння прямої $y = kx + l$, з яким ми ознайомилися в курсі алгебри, рівносильні?

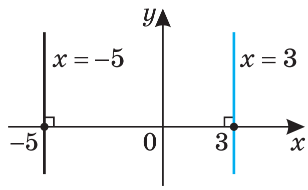
Якщо рівняння $ax + by + c = 0$ поділити на b, то його справді можна представити у вигляді $y = kx + l$. Але це можна зробити *лише у випадку, коли* $b \neq 0$!

Наприклад, прямій, зображеній на малюнку 1.14, відповідають рівносильні рівняння $4x - 2y + 13 = 0$ і $y = 2x + 6{,}5$. (Друге можна отримати з першого, якщо його поділити на $b = -2 \neq 0$.)

Якщо $b = 0$ і $a \neq 0$, рівняння прямої можна записати у вигляді $x = -\dfrac{c}{a}$. Його задовольняють точки з довільною ординатою і сталою абсцисою. Це може бути тільки пряма, паралельна осі Oy (мал. 1.15).



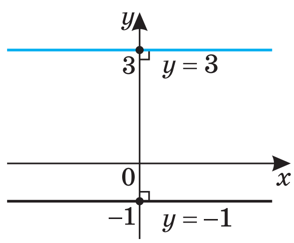
Мал. 1.14



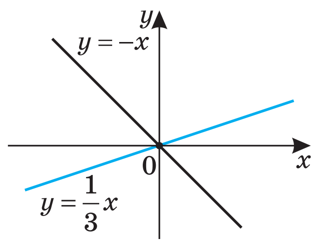
Мал. 1.15

Випадок $a = 0$ і $b \neq 0$ відповідає прямій $y = -\dfrac{c}{b}$, точки якої мають сталу ординату і довільну абсцису. Це пряма, паралельна осі Ox (мал. 1.16).

Якщо $c = 0$, то координати точки (0; 0) задовольняють рівняння прямої і вона проходить через початок координат. У цьому випадку рівняння прямої можна записати у вигляді *прямої пропорційності* $y = kx$ (мал. 1.17).



Мал. 1.16



Мал. 1.17

Для допитливих

У процесі наукових досліджень людина прагне з уже відомих їй знань дістати нові. Ці нові знання називають *вивідними*. Давньоіндійські логіки часто наводили такий приклад. Нехай відомо, що «там, де дим, є і вогонь» і що «на пагорбі є дим». Тоді на основі цих відомостей дістанемо нове – вивідне знання: «на пагорбі є вогонь». Якщо вихідні дані були істинними, то не треба підніматися на пагорб, аби переконатися, що там є вогонь.

Висновок.

Загальне рівняння прямої $ax + by + c = 0$. При цьому:

- **тільки за умови $b \neq 0$ рівняння прямої можна записати у вигляді $y = kx + l$; графік прямої не паралельний осі Oy;**
- **при $b = 0$, $a \neq 0$ – пряма, паралельна осі Oy; її рівняння $x = m$ не можна представити у вигляді $y = kx + l$;**
- **при $a = 0$, $b \neq 0$ – пряма, паралельна осі Ox; її рівняння $y = l$;**
- **при $c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ – рівняння прямої пропорційності $y = kx$.**

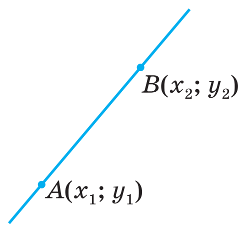
Нагадаємо:
$\triangleq$ – «позначили як».

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДВІ ЗАДАНІ ТОЧКИ

Через дві точки можна провести пряму і до того ж лише одну – це **аксіома** геометрії. Знайдемо рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки координатної площини $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$.

Можливі два випадки: пряма AB паралельна осі Oy і пряма AB не паралельна осі Oy.

Шукаємо рівняння прямої:



ВИПАДОК 1.

Якщо пряма паралельна осі Oy, то абсциси всіх її точок однакові. Тобто це випадок, коли $x_1 = x_2 \triangleq \lambda$. Рівняння шуканої прямої: $x = \lambda$.

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки, абсциси яких однакові, $A(\lambda; y_1)$ та $B(\lambda; y_2)$, має вигляд $x = \lambda$.

– якщо $x_1 = x_2 = n$
$x = n$;

– якщо $y_1 = y_2 = m$
$y = m$;

ВИПАДОК 2.

Нехай абсциси заданих точок різні: $x_1 \neq x_2$.

Шукана пряма не паралельна осі Oy, тоді її рівняння можна записати у вигляді $y = kx + l$.

Точки A і B належать цій прямій. Тоді їхні координати задовольняють рівняння прямої:

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + l, \\ y_2 = kx_2 + l. \end{cases}$$

– якщо $x_1 \neq x_2$
$y = kx + l$,
де k і l знайдемо з:

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + l \\ y_2 = kx_2 + l. \end{cases}$$

Для допитливих

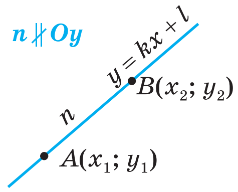
Наука про закони і форми мислення називається *логікою*. Дотримання законів логіки – неодмінна умова доказовості й істинності наших міркувань.

Закон тотожності (один із чотирьох основних законів логіки) вимагає, щоб одна й та сама думка, яка наводиться в даному умовиводі, при повторенні мала один і той самий зміст.

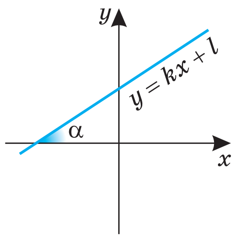
Закон суперечності полягає в тому, що не можуть бути одночасно істинними два протилежні твердження.

Закон виключення третього (з латинської – «третього не дано») стверджує, що з двох суперечливих висловлювань про один і той самий об'єкт одне – обов'язково істинне (пригадайте спосіб доведення від супротивного).

Закон достатньої підстави вимагає, щоб кожна істинна думка була обґрунтована.

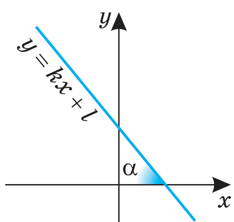


$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$



$\operatorname{tg}\alpha = k$

k – кутовий коефіцієнт



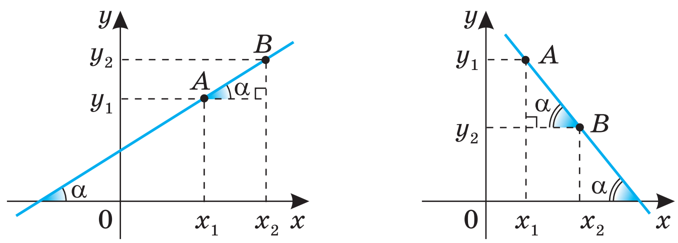
$\operatorname{tg}\alpha = -k$

Маємо систему двох лінійних рівнянь для двох невідомих коефіцієнтів k і l. Якщо від другого рівняння відняти перше, дістанемо

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1), \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Якщо підставити це значення k в одне з двох вихідних рівнянь системи, можна знайти і значення коефіцієнта l.

У випадку, що розглядається, пряму на координатній площині можна зобразити так, як представлено на малюнку 1.18.



а) б)

Мал. 1.18

Тоді маємо: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$, або $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -k$.

Таким чином, **коефіцієнт k у рівнянні прямої $y = kx + l$ з точністю до знака дорівнює тангенсу кута, під яким ця пряма перетинає пряму, що збігається з віссю абсцис.** Тому цей коефіцієнт називають *кутовим коефіцієнтом прямої.*

НЕОБХІДНА І ДОСТАТНЯ УМОВА НАЛЕЖНОСТІ ТРЬОХ ТОЧОК ОДНІЙ ПРЯМІЙ

Теорема. **Необхідною і достатньою умовою розміщення трьох точок $C(x; y)$, $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ на одній прямій є виконання співвідношень**

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

(Тобто існує таке число λ, що вказані співвідношення виконуються.)

Для допитливих

Англійський математик *Чарльз Лютвідж Доджсон* (1832–1898) друкував свої казки і збірники з цікавої математики та логіки під псевдонімом *Льюїса Керрола*. Який із законов логіки (с. 25) порушив у його казці Чеширський кіт, коли розмовляв з Алісою?

– А звідки Ви знаєте, що Ви не у своєму розумі? – спитала Аліса.

– Почнемо з того, що Пес у своєму розумі. Згодна? – відповів Кіт.

– Припустимо, – погодилася Аліса.

– Далі, – сказав Кіт, – Пес гарчить, коли сердиться, а коли задоволений, виляє хвостом. Ну а я муркочу, коли задоволений, і виляю хвостом, коли серджуся. Тому я не у своєму розумі.

I. Доведемо *необхідну умову*. **Якщо точка $C(x; y)$ належить прямій, що проходить через точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, то**

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Доведення

Можливі два випадки: $C \in [AB]$ і $C \notin [AB]$.

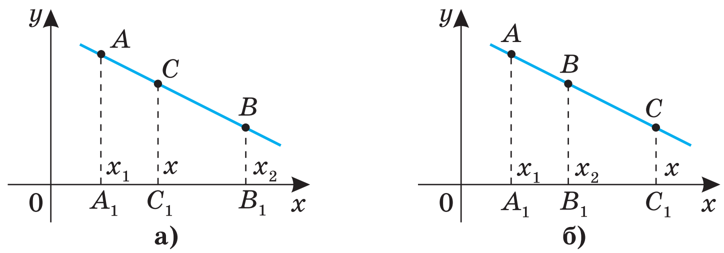
1 Точка C належить відрізку AB (мал. 1.19-а).

Маємо випадок, який було розглянуто раніше (с. 15), коли точка C поділяла відрізок AB у відношенні $|AC| : |CB| = n : m$. Тоді

$$x = \frac{mx_1 + nx_2}{n+m}, \quad x = \frac{x_1 + \frac{n}{m}x_2}{1 + \frac{n}{m}} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}.$$

Аналогічно $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, і твердження умови виконується.

2 Точка C не належить відрізку AB (мал. 1.19-б).



Мал. 1.19

Позначимо за теоремою Фалеса $|AC| : |CB| = n : m = \lambda$.

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \frac{AC}{CB} = \frac{n}{m} = \lambda, \quad \left|\frac{x - x_1}{x_2 - x}\right| = \lambda.$$

Вираз під знаком модуля додатний (див. с. 15), тоді

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}.$$

Аналогічно $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, і твердження умови виконується.

Нагадаємо:
$\in$ – «належить»;
$\notin$ – «не належить»;
$[AB]$ – відрізок AB.

НЕОБХІДНІСТЬ І ДОСТАТНІСТЬ

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}$$

$\Updownarrow$

Точки $(x; y)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ лежать на одній прямій.

Геометрія є пізнання всього існуючого.

Платон
(IV ст. до н. е.)

Для допитливих

У казках Льюїса Керрола знаходимо чудові приклади «доведень», у процесі яких його герої допускають порушення закону достатньої підстави (с. 25):

– Зніми свого капелюха, – сказав Король Капелюшнику.

– Він не мій, – відповів Капелюшник.

– Крадений! – закричав Король і тріумфуюче повернувся до присяжних, які миттю взялися за грифелі.

– Я їх тримаю для продажу, – пояснив Капелюшник. – У мене своїх немає, адже я капелюхових справ майстер.

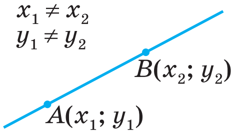
II. Доведемо *достатню умову* (твердження, обернене до твердження I): **якщо для точок $C(x;\, y)$, $A(x_1;\, y_1)$, $B(x_2;\, y_2)$ виконується співвідношення**

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},$$

то ці точки належать одній прямій.

Доведення

$x_1 \neq x_2$
$y_1 \neq y_2$



Проведемо доведення від супротивного. Нехай виконуються вказані умовою співвідношення, але $C \notin (AB)$.

Візьмемо на прямій AB таку точку P, для якої: $|AP| : |CP| = \lambda$. Тоді (за необхідною умовою I) координати точки P дорівнюють:

$$x_P = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \text{ і } y_P = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$

– координатам точки C, тобто точки P і C збігаються, що суперечить припущенню. Тоді твердження умови виконується.

Теорему доведено.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

рівняння прямої у відрізках

Н Наслідок. *Рівняння прямої у відрізках*. **Рівняння прямої, яка проходить через точки $A(x_1;\, y_1)$ і $B(x_2;\, y_2)$ і яка не паралельна осям координат ($x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$), можна записати у вигляді $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.**

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$$

необхідна й достатня умови належності трьох точок одній прямій

За доведеною теоремою маємо, що всі точки даної прямої $(x;\, y)$ і тільки вони задовольняють умову

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Знайдемо з кожного співвідношення вирази для λ і прирівняємо їх:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \lambda = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Для допитливих

Логіка геометрів, або методи доведення, які Евклід з'ясував і встановив щодо теореми, – це поширення загальної логіки.

Г. Лейбніц

Повернемося до закону виключення третього (див. с. 25). Цей закон співставляє два твердження, одне з яких є *загальностверджувальним*, а друге – *частково заперечувальним*. Наприклад: «Навколо будь-якого чотирикутника не можна описати коло» і «Навколо деяких чотирикутників можна описати коло»; «Усі парні числа складені» і «Деякі парні числа не є складеними».

Зауважимо, якщо зіставляти два протилежні загальностверджувальні висловлювання, то вони обидва можуть бути хибними. Наприклад: «Усі парні числа складені» і «Усі парні числа нескладені» (існує третя можливість: «Деяке парне число є нескладеним» – це просте число 2).

Тобто з **істинності твердження A випливає хибність твердження, протилежного до A; з хибності твердження A не випливає істинність твердження, протилежного до A (воно може бути як правильним, так і хибним).**

Тоді умову належності трьох точок одній прямій можна записати у вигляді

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-6; 7)$ паралельно осі ординат.

Розв'язання

Шукана пряма паралельна осі Oy, тоді абсциси точок цієї прямої однакові й дорівнюють абсцисі точки A. Рівняння прямої $x = -6$.

Відповідь: $x = -6$.

Рівняння прямих, паралельних осям координат:

1) $\begin{cases} A(x_A; y_A) \in n \\ n \parallel Oy \end{cases}$

$\boldsymbol{x = x_A}$

2) $\begin{cases} B(x_B; y_B) \in n \\ n \parallel Ox \end{cases}$

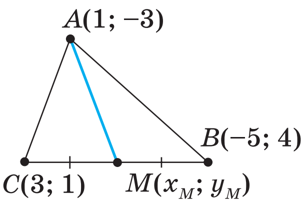
$\boldsymbol{y = y_B}$

Приклад 2. Дано три точки: $A(1; -3)$; $B(-5; 4)$ і $C(3; 1)$. Запишіть рівняння прямої, що містить медіану AM трикутника ABC.

Розв'язання

1) Координати середини відрізка BC – точка $M(x_M; y_M)$ (мал. 1.20):

$$x_M = \frac{-5+3}{2} = -1; \quad y_M = \frac{4+1}{2} = 2{,}5.$$



Мал. 1.20

2) Знайдемо рівняння прямої AM. Маємо $x_M \neq x_A$, тоді рівняння (AM) можна шукати у вигляді $y = kx + l$. Точки A і M лежать на цій прямій, тобто їх координати задовольняють шукане рівняння:

$$\begin{cases} -3 = k \cdot 1 + l, \\ 2{,}5 = k \cdot (-1) + l, \end{cases} \quad l = -0{,}25, \quad k = -2{,}75.$$

Відповідь: $y = -2{,}75x - 0{,}25$.

Ми ніколи не станемо математиками, навіть знаючи напам'ять усі чужі доведення, якщо наш розум нездатний самостійно розв'язувати проблеми.

Р. Декарт

Завдання 3

1°. Знайдіть координати точок перетину з осями координат прямої: **а)** $4x - 3y + 12 = 0$; **б)** $y = -4x + 7$; **в)** $y = -0{,}5x - 2{,}5$.

Для допитливих

Прийнявши кожне із суджень за істинне, з'ясуйте, чи є перше з тверджень в кожній парі достатньою підставою (див. с. 25) для другого.

1. «Трикутник ABC дорівнює трикутнику ABD»; «Трикутники ABC і ABD рівновеликі».

2. «Ця книжка цікава»; «У цій книжці чудові малюнки».

3. «Діагоналі даного чотирикутника взаємно перпендикулярні»; «Даний чотирикутник – ромб».

4. «З A випливає B, і з B випливає C»; «З A випливає C».

5. «Висловлення $p \to q$ істинне»; «Висловлення $\neg q \to \neg p$ істинне». (Знак «$\neg$» означає «протилежне твердження».)

2°. Пряма задана рівнянням $x - 4y + 8 = 0$. Які з точок $A(0; 2)$, $B(-1; 1)$, $C(2; 0{,}5)$, $D(8; 0)$ належать цій прямій, а які не належать?

3°. Перевірте, чи проходить пряма $y = 7x - 1$ через точки $A(1; -1)$, $B(0; -1)$, $C(1; 6)$, $D(-3; 2)$.

4°. Побудуйте на координатній площині прямі:

а) $3x - 6y + 1 = 0$; **б)** $x - y = 7$; **в)** $y = 5x$; **г)** $y = \frac{1}{2}x - 1$; **д)** $y = 3$; **е)** $x = -2$.

5°. Побудуйте на координатній площині прямі, які проходять через точку $K(-4; 3)$ паралельно осям координат. Запишіть їх рівняння.

6°. Запишіть рівняння прямої, яка паралельна осі ординат і проходить через точку $(-6; 0)$.

7. Запишіть рівняння прямої, яка паралельна осі абсцис і відсікає на додатній півосі ординат відрізок, довжина якого дорівнює 10.

8. Запишіть рівняння прямих, які паралельні осі абсцис і кожна з яких відсікає на півосі ординат відрізок, довжина якого дорівнює 4.

9. Відомо, що графік функції $y = ax + 5$ проходить через точку $M(4; 13)$. Знайдіть значення параметра a.

10°. Знайдіть точки перетину з осями координат прямої:

а) $y = 3x - 1$; **б)** $2x + 3y = 7$; **в)** $y = 5$; **г)** $x = 3$; **д)** $4x - 3y + 12 = 0$; **е)** $5x = 3y$.

11. Одна з вершин квадрата знаходиться в початку координат, а протилежна вершина має координати $(-2; 2)$. Запишіть рівняння прямих, на яких лежать сторони квадрата.

12. Одна з вершин прямокутника має координати $(0; 0)$, а протилежна вершина – координати $(5; -3)$. Запишіть рівняння прямих, на яких лежать сторони прямокутника, якщо вони паралельні осям координат.

13*. Одна з вершин квадрата лежить у точці $(5; 5)$. Точка перетину діагоналей має координати $(7; 7)$.

1) Складіть рівняння прямих, на яких лежать сторони квадрата.

2) Знайдіть: **а)** довжину сторони квадрата; **б)** довжини діагоналей квадрата.

14°. Запишіть рівняння прямої у вигляді $y = kx + l$ і знайдіть її кутовий коефіцієнт:

а) $2x - 4y = 5$; **б)** $3x + y = 7$; **в)** $x - 2y - 3 = 0$; **г)** $3x + 4y - 1 = 0$; **д)** $3x = 5y$; **е)** $5y = 12$.

Для допитливих

Софізм (від грецького «хитрий викрутас», «вигадка», «хибний умовивід») – міркування, побудоване так, що містить навмисне допущену логічну помилку і приводить до хибних висновків. Першим увів софізми *Протагор із Абдери* (бл. 480–410 рр. до н. е.).

Найчастіше софістичні міркування ґрунтуються: на зовнішній подібності явищ; на навмисне неправильному доборі посилок; на тому, що певний факт виривається із загального зв'язку об'єктів; на двозначності слів; на підміні понять тощо.

Спробуйте розгадати *софізм М. Г. Чернишевського*, який він запропонував у 1846 році своєму братові Олександру.

Квадрат будь-якої сторони тупокутного трикутника, що лежить проти тупого кута, дорівнює сумі квадратів двох інших сторін цього трикутника.

Доведення

У трикутнику ABC кут B тупий. Проведемо перпендикуляр CD до прямої AB. Тоді $AC^2 = AD^2 + CD^2$ і $CD^2 = CB^2 - BD^2$. Підставимо значення CD^2 з другої рівності у першу: $AC^2 = AD^2 + BC^2 - BD^2$. Звідси $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$. Але $AD = AB + BD$, тому $AD^2 - BD^2 = AB^2$. Тоді $AC^2 - BC^2 = AB^2$.

Твердження доведено?!

Чернишевський закінчив лист із софізмом словами: «Десь тут має приховуватися обман; віднайшовши його, ти зробиш велику послугу люблячому тебе брату Миколі Чернишевському».

15. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(1; -3)$ і має кутовий коефіцієнт:

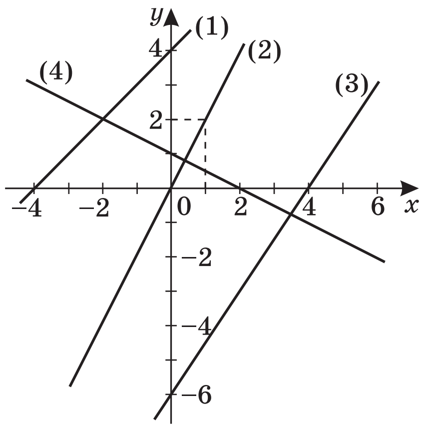
а) -2; **б)** $\frac{1}{3}$; **в)** $1\frac{3}{4}$; **г)** $-5\frac{1}{2}$.

16. Пряма проходить через початок координат і має кутовий коефіцієнт, що дорівнює 4. Запишіть рівняння цієї прямої. Чи належить їй точка $M(2; 5)$?

17*. Знайдіть рівняння прямої, яка проходить через точки: **а)** $A(-1; 0)$ і $B(0; 2)$; **б)** $A(-5; 16)$ і $B(-5; 12{,}5)$; **в)** $A(1; -2)$ і $B(3; 2)$; **г)** $A(1; -12)$ і $B(23; -12)$.

18*. Складіть рівняння прямої, графік якої проходить через точки A і B: **а)** $A(4; 0)$, $B(0; 5)$; **б)** $A(1; 1)$, $B(2; 2)$; **в)** $A(-1; 7)$, $B(-1; 4)$; **г)** $A(-3; 2)$, $B(-1; 5)$; **д)** $A(7; -3)$, $B(0; 0)$.

19*. Запишіть рівняння кожної з прямих, графіки яких зображено на малюнку 1.21.



Мал. 1.21

20*. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої, якщо вона проходить через точки A і B, які мають такі координати: **а)** $A(0; 3)$, $B(8; 1)$; **б)** $A(-1; 3)$, $B(4; -5)$; **в)** $A(1; -4)$, $B(-7; 1)$; **г)** $A(-8; -1)$, $B(-3; -5)$.

21*. Знайдіть градусні міри кутів, які утворює з додатним напрямом осі абсцис пряма:

а) $y = x - 2$; **б)** $x + y - 3 = 0$; **в)** $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$.

22*. Знайдіть коефіцієнти a і b у рівнянні прямої $ax + by = 1$, якщо вона проходить через точки $A(1; 2)$ і $B(2; 1)$.

23*. Складіть рівняння прямої, яка проходить через центри двох заданих кіл:

а) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ і $x^2 + y^2 - 10x - 6y = 2$;

б) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$ і $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 3$.

24*. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(8; 2)$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут: **а)** 30°; **б)** 45°; **в)** 60°; **г)** 135°.

25*. Довжини діагоналей ромба дорівнюють 8 одиниць і 4 одиниці. Запишіть рівняння прямих, на яких лежать сторони ромба, якщо його більша діагональ належить осі Ox, а менша – осі Oy.

26*. Вершини трикутника мають координати $M(2; 6)$, $N(-6; 0)$, $K(-3; -4)$. Складіть:

а) рівняння прямих, що містять сторони трикутника;

б) рівняння прямих, що містять медіани трикутника.

27*. Перевірте, чи лежать на одній прямій точки з координатами:

а) $(0; -2)$, $(3; 0)$, $(6; 2)$, $(5; 7)$; **б)** $(1; -2)$, $(4; 1)$, $(0; -5)$, $(3; 0)$.

28*. Знайдіть ординату точки $M(10; y)$, яка лежить на прямій, що проходить через точки $(2; 0)$ і $(0; -3)$.

29*. Знайдіть абсцису точки $K(x; 4)$, яка лежить на прямій, що проходить через точки $(5; 0)$ і $(0; 5)$.

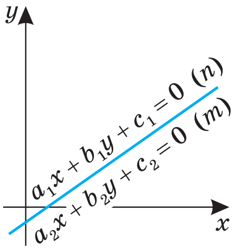
30*. Точка K лежить на одній прямій з точками $A(2; 1)$ та $B(-4; -2)$ і має рівні між собою координати. Знайдіть значення координат точки K.

31.** Знайдіть координати вершини C трикутника ABC і запишіть рівняння його сторін, якщо дано координати вершин $A(3; 4)$ і $B(-5; 6)$ і середину сторони BC – точку $M(-5; 3)$.

§ 3. Взаємне розміщення двох прямих на координатній площині

Розглянемо усі три можливі випадки взаємного розміщення двох прямих на площині.

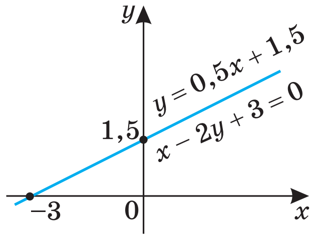
ПРЯМІ ЗБІГАЮТЬСЯ



$n \equiv m$

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

Якщо прямі збігаються, то їхні рівняння $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ – рівносильні, тобто описують одну й ту саму множину точок координатної площини. Тоді вони можуть відрізнятися лише множенням на деяке число $\lambda \neq 0$:

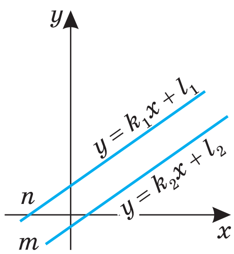


Мал. 1.22

$$\lambda = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

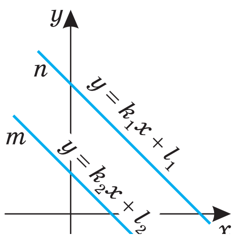
Наприклад, рівняння $2x - 4y + 6 = 0$ і $x - 2y + 3 = 0$ рівносильні, бо перше відрізняється від другого множенням на число $2 = \frac{2}{1} = \frac{-4}{-2} = \frac{6}{3}$. Вони описують одну й ту саму множину точок – одну пряму (мал. 1.22).

Зауваження. Ми розглянули випадок, коли $a_{1,2} \neq 0$, $b_{1,2} \neq 0$ і $c_{1,2} \neq 0$. Зрозуміло, якщо якась з цих пар дорівнює нулю, то її не можна включати у наведене відношення (ділити на нуль не можна). Наприклад, якщо $c_{1,2} = 0$, $a_{1,2} \neq 0$ і $b_{1,2} \neq 0$, маємо два рівняння прямої пропорційності, що описують одну пряму за умови $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.



$n \parallel m$

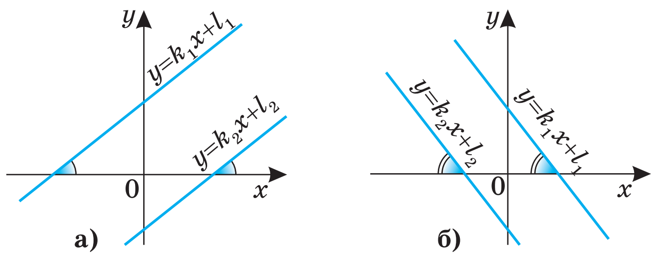
$k_1 = k_2$, $l_1 \neq l_2$



ПРЯМІ ПАРАЛЕЛЬНІ

Нехай прямі не паралельні осям координат. Тоді їх рівняння можна записати у вигляді $y = k_1x + l_1$ і $y = k_2x + l_2$.

Якщо ці прямі паралельні, то кути, утворені ними з прямою, що містить вісь Ox, рівні (мал. 1.23). Тоді значення тангенсів цих кутів також рівні і кутові коефіцієнти у рівняннях цих прямих рівні між собою: $k_1 = k_2$ (але $l_1 \neq l_2$).



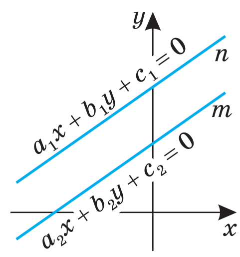
Мал. 1.23

Якщо такі прямі задано рівняннями загального вигляду $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, то маємо

$$k_1 = -\frac{a_1}{b_1} = k_2 = -\frac{a_2}{b_2}.$$

Звідси

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}, \text{ тобто } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$



$n \parallel m$

$$k_1 = -\frac{a_1}{b_1} = k_2$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$a_{1,2} \neq 0,\ b_{1,2} \neq 0$$

Ці прямі не збігатимуться за умови $l_1 = -\frac{c_1}{b_1} \neq l_2 = -\frac{c_2}{b_2}$, тобто $\frac{c_1}{c_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

Тоді прямі будуть **паралельними за умови**

$$\boldsymbol{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}}.$$

Наприклад, прямі $2x - 4y + 6 = 0$ і $x - 2y + 1 = 0$ паралельні, бо

$$\frac{2}{1} = \frac{-4}{-2} \neq \frac{6}{1}.$$

Це означає, що система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 4y + 6 = 0, \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

не має розв'язків. Справді, якщо у цій системі рівнянь перенести у праві частини вільні коефіцієнти і поділити перше рівняння на друге, отримаємо

$$\frac{2(x-2y)}{x-2y} = \frac{-6}{-1}, \text{ тобто } 2 = 6,$$

чого бути не може.

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow n \parallel m$$

$$\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow n \parallel m$$

З а у в а ж е н н я. **У випадку $a_1 = a_2 = 0$ або $b_1 = b_2 = 0$** прямі паралельні одній і тій самій координатній осі, отже, **паралельні одна одній.**

Для допитливих

Інспектор Петренко прибув на місце події і опитав свідків.

Перший із них стверджував, що поряд з «Мерседесом» стояла біла машина, а трохи далі від неї – синя.

Другий свідок сказав, що він учитель математики і тому добре запам'ятав, що машин було чотири. «Номер однієї з них, – вів він далі, – 23-30, і вона не жовта і не синя. Поряд з машиною 32-30 стояла машина 30-23. Другим у ряду був «Москвич», що стояв поряд з машиною червоного кольору. А біля машини 23-30 «Мерседеса» не було».

Третій свідок показав, що номер білої машини був 32-30 і що сам він стояв біля другої машини.

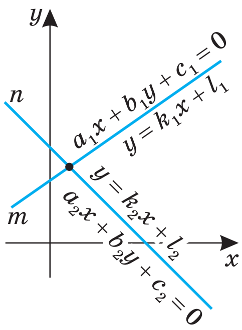
Четвертий запам'ятав, що поряд із «Москвичем» стояв «Запорожець».

П'ятий свідок, який був художником, добре запам'ятав, що єдина синя машина стояла поруч із червоною, причому синя не була «Москвичем».

Зіставивши отримані дані, інспектор Петренко встановив, якого кольору були «Жигулі» і яка машина мала номерний знак 30-23.

Спробуйте і ви зробити те саме.

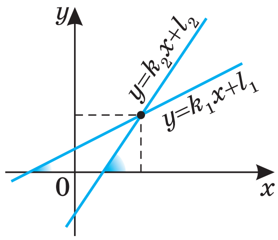
ПРЯМІ ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ



$\boldsymbol{n \cap m}$, $k_1 \neq k_2$

$\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$

Якщо прямі перетинаються (мають лише одну спільну точку), то вони не збігаються і не є паралельними (мал. 1.24). Тоді ці прямі утворюють різні кути із віссю Ox, і значення їхніх кутових коефіцієнтів різні: $k_1 \neq k_2$.



Мал. 1.24

Для загальної форми запису рівняння прямих це виглядає так:

$$\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}, \text{ тобто } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

Для того щоб знайти координати точки перетину двох прямих, треба розв'язати систему двох лінійних рівнянь, які задають ці прямі на координатній площині.

ВИСНОВОК

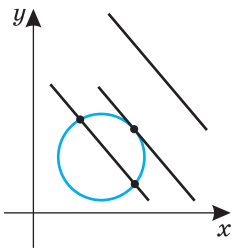
Система двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

а) має безліч розв'язків, якщо $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$;

б) не має розв'язків, якщо $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$;

в) має єдиний розв'язок, якщо $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.



$$\begin{cases} y = kx + l \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \end{cases}$$

$$(x-a)^2 + (kx + l - b)^2 = r^2$$

$D > 0$ – *перетин*;
$D = 0$ – *дотик*;
$D < 0$ – *немає спільних точок*.

Зауваження. *Для того щоб знайти координати спільних точок прямої та кола*, треба розв'язати систему рівнянь, одне з яких є рівнянням даної прямої, а друге – рівнянням заданого кола. Можливі такі випадки:

а) система має два розв'язки – *пряма перетинає коло*;
б) система має один розв'язок – *пряма дотикається до кола*;
в) система не має розв'язків – *пряма і коло не мають спільних точок*.

Для допитливих

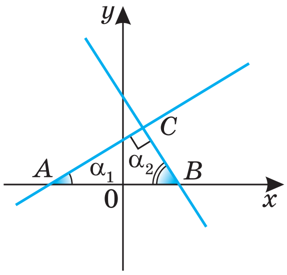
Діти пустували і випадково розбили вазу. Коли батьки повернулися з роботи, вони спитали, хто саме розбив вазу. Діти відповіли таке.

Ганна. Я не розбивала вазу, я сиділа і читала. Маруся знає, хто винен.
Маруся. Я вазу не розбивала, про це знає Борис, бо ми з ним у цей час розмовляли. Це зробила Ганна.
Борис. Я не винен. Це Данило, а з Марусею я давно не товаришую.
Данило. Я не винен. Це Маруся. Борис обманув, коли говорив, що вазу розбив я.

Кожний з дітей тільки двічі сказав правду. То хто розбив вазу?

ПРЯМІ ВЗАЄМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ

Нехай маємо дві взаємно перпендикулярні прямі, які не паралельні осям координат: $y = k_1x + l_1$ і $y = k_2x + l_2$ (мал. 1.25).



Мал. 1.25

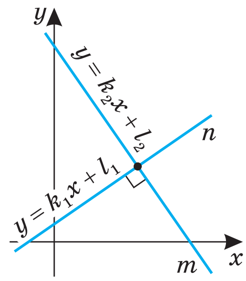
Тангенси гострих кутів, які утворюють ці прямі з віссю Ox, дорівнюють $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$ і $\operatorname{tg}\alpha_2 = -k_2$ відповідно (див. с. 26).

Із прямокутного трикутника ACB, який утворений цими прямими і віссю абсцис, маємо:

$$\alpha_1 = 90° - \alpha_2; \quad k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}(90° - \alpha_2) = \operatorname{ctg}\alpha_2 = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{1}{-k_2}.$$

Отже, **якщо прямі взаємно перпендикулярні, то**

$$\boldsymbol{k_1 = -\frac{1}{k_2}}.$$



$n \perp m$

$k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $P(-1; 1)$ паралельно прямій $y = 2x - 3$.

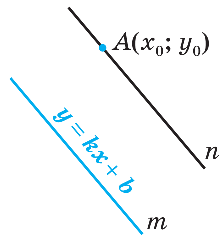
Розв'язання

1) Шукана пряма паралельна прямій з кутовим коефіцієнтом 2. Тоді її рівняння $y = 2x + l$.

2) Ця пряма містить точку $(-1; 1)$, тоді:

$$1 = 2\cdot(-1) + l, \quad l = 3.$$

Відповідь: $y = 2x + 3$.



Через $A(x_0; y_0)$ проводимо

$n \parallel m$

(n): $\begin{cases} y = kx + l \\ y_0 = kx_0 + l \end{cases}$

$l = y_0 - kx_0$

Приклад 2. На площині задано точки $A(0; 0)$, $B(1; -3)$, $D(-2; 4)$. Які координати повинна мати точка C, щоб чотирикутник $ABCD$ був паралелограмом?

Розв'язання

Позначимо координати шуканої точки C через x_0 і y_0 відповідно.

1) $ABCD$ – паралелограм. Тоді $(AB) \parallel (CD)$ і $(AD) \parallel (CB)$.

2) Рівняння (AB) і (AD) – рівняння прямої пропорційності, тобто мають вигляд $y = kx$. Враховуючи, що $B(1; -3) \in (AB)$, $D(-2; 4) \in (AD)$, отримаємо рівняння (AB) і (AD): $y = -3x$ і $y = -2x$ відповідно.

3) $(CD) \parallel (AB)$, а $(CB) \parallel (AD)$. Тоді рівняння (CD) і (CB) мають відповідно вигляд $y = -3x + m$ і $y = -2x + n$.

4) Врахуємо, що (CD) проходить через точку $D(-2; 4)$, а (CB) – через B $(1; -3)$, маємо:

$$4 = -3\cdot(-2) + m \ \text{ і } \ -3 = -2\cdot 1 + n; \ m = -2 \ \text{ і } \ n = -1.$$

5) (CD) і (CB) проходять через точку $C(x_0; y_0)$. Тоді

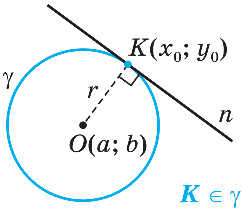
$$y_0 = -3x_0 + (-2) \ \text{ і } \ y_0 = 2x_0 + (-1).$$

З останньої системи рівнянь маємо: $x_0 = -1$, $y_0 = 1$.

Відповідь: $C(-1; 1)$.

Нагадаємо:
$\in$ – «належить»;
(AB) – пряма AB.

Дотична n до кола γ через т. K:



$K \in \gamma$

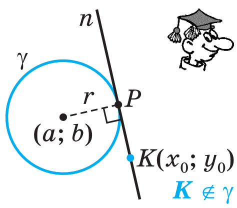
$(n) \nparallel Oy$ шукаємо як $y = kx + l$:

$$\begin{cases} y_0 = kx_0 + l \\ y_0 = -\dfrac{1}{k}x_0 + m \\ b = -\dfrac{1}{k}a + m \end{cases}$$

$\Uparrow$

Не забудьте проаналізувати випадок $n \parallel Oy$

$\Downarrow$



$K \notin \gamma$

$(n) \nparallel Oy$ шукаємо як $y = kx + l$:

$$\begin{cases} y_0 = kx_0 + l \\ b = -\dfrac{1}{k}a + m; \end{cases}$$

$(x - a)^2 + (kx + l - b)^2 = r^2$ має один розв'язок відносно x:

$D = 0$.

Приклад 3. Запишіть рівняння прямої, що дотикається до кола $x^2 + y^2 - 4x - 6y = -8$ у точці $K(1; 1)$.

Розв'язання

1) У рівнянні кола виділимо квадрати двочленів відносно змінних x і y:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 2.$$

Центром заданого кола є точка $O(3; 2)$.

2) Абсциси точок K і O різні, тому рівняння прямої OK, що містить радіус кола $[OK]$, можна шукати у вигляді $y = kx + l$.

3) Точки $O(3; 2)$ і $K(1; 1)$ належать (OK). Тоді

$$\begin{cases} 2 = 23 + l, \\ 1 = k + l \end{cases} \text{ і } \begin{cases} k = \dfrac{1}{2}, \\ l = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

4) Шукана дотична перпендикулярна до (OK), рівняння якої $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Тоді рівняння дотичної має вигляд $y = -2x + n$.

5) Точка $K(1; 1)$ належить шуканій прямій, тому

$$1 = -2 \cdot 1 + n \quad \text{і} \quad n = 3.$$

Відповідь: $y = -2x + 3$.

Приклад 4. Запишіть рівняння прямої, яка дотикається до кола $(x-1)^2 + y^2 = 1$ і проходить через точку $K(0; 5)$.

Розв'язання

1) Нехай шукана пряма паралельна осі Oy або збігається з нею, тобто її рівняння має вигляд $x = c = 0$.

Підставимо значення $x = 0$ в рівняння кола – отримаємо квадратне рівняння з y. Якщо воно має один розв'язок, то пряма $x = 0$ – дотична до кола. Якщо це рівняння має два розв'язки або не має розв'язків, то $x = 0$ не є рівнянням шуканої дотичної.

Маємо: $(0-1)^2 + y^2 = 1$, $1 + y^2 = 1$ і $y = 0$ – один розв'язок.

Висновок: пряма $x = 0$ – дотична до кола.

2) Нехай шукана пряма не паралельна осі Oy, її рівняння можна записати у вигляді $y = kx + l$. Врахуємо, що точка $K(0; 5)$ належить цій прямій: $5 = 0 + l$, тобто рівнянням шуканої прямої буде $y = kx + 5$.

Для допитливих

Напишіть співвідношення, які описують:

1) множини точок, рівновіддалених від осей координат;
2) множини точок, рівновіддалених від осі Oy на 2;
3) усі точки площини, розміщені ближче до осі Oy, ніж до осі Ox;
4) усі точки зовні квадрата, діагоналі якого перетинаються в початку координат, а довжина сторони дорівнює 4.

3) Пряма $y = kx + 5$ як дотична до кола має з ним одну спільну точку – точку дотику. Отже, треба знайти такі значення k, при яких система рівнянь

$$\begin{cases} y = kx + 5, \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

має єдиний розв’язок.

Підставляємо y з першого рівняння системи у друге:

$$(1 + k^2)x^2 - 2(1 - 5k)x + 25 = 0.$$

Дискримінант цього рівняння прирівнюємо до нуля:

$$\frac{D}{4} = (1-5k)^2 - 25(1+k^2) = 0,\ 1 - 10k - 25 = 0,\ k = -2{,}4.$$

Висновок: пряма $y = -2{,}4x + 5$ – дотична до кола.

Відповідь: $x = 0$; $y = -2{,}4x + 5$.

Приклад 5. Запишіть рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = x - 3$ і дотикається до кола $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Розв’язання

1) Шукана пряма паралельна прямій $y = x - 3$, тоді її рівняння $y = x + l$.

2) Точка дотику $K(x_K; y_K)$ – єдина спільна точка шуканої прямої і кола. Отже, треба знайти такі значення l, при яких має єдиний розв’язок система

$$\begin{cases} y_K = x_K + l, \\ (x_K - 1)^2 + y^2_K = 1. \end{cases}$$

3) Ця система має єдиний розв’язок, коли дискримінант рівняння $(x_K - 1)^2 + (x_K + l)^2 = 1$ дорівнює нулю:

$$\frac{D}{4} = (l-1)^2 - 2l^2 = 0,\quad l - 1 = \pm\sqrt{2}\cdot l,\quad l = -1 \pm \sqrt{2}.$$

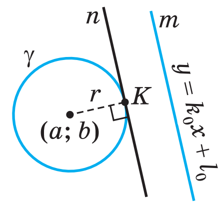
Маємо дві дотичні: $y = x - 1 + \sqrt{2},\ y = x - 1 - \sqrt{2}.$

Відповідь: $y = x - 1 + \sqrt{2},\ y = x - 1 - \sqrt{2}.$

Приклад 6. Доведіть самостійно, застосувавши формулу відстані між двома точками координатної площини, таку теорему. Поміркуйте, як зручніше розмістити осі координат, чи залежатиме відповідь від їх розміщення.

Теорема. **Якщо $ABCD$ прямокутник, то для будь-якої точки M його площини справджується рівність: $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.**

Дотична до кола
$n \parallel m$

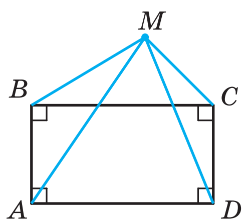


(n) шукаємо як
$y = kx + l,$
$k = k_0;$

$(x - a)^2 +$
$+ (k_0x + l - b)^2 = r^2$

має один розв’язок відносно x:

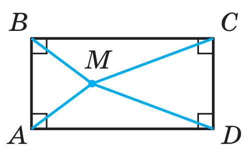
$D = 0.$



$\Downarrow$

$AM^2 + CM^2 =$
$= BM^2 + DM^2$

$\Uparrow$



Для допитливих

Напишіть співвідношення, які описують такі множини точок:

1) частину площини між прямими $y = 3x$ і $y = x - 3$ (включно з цими прямими);

2) усю полосу між прямими $y = 0$ і $y = 1$ (без цих прямих);

3) усі внутрішні точки квадрата з вершинами (0; 0), (0; 1), (1; 1), (1; 0) (разом з його сторонами).

Завдання 4

1. Як розміщені прямі (паралельні, збігаються чи перетинаються)? Якщо прямі перетинаються, вкажіть точку їх перетину.

а) $x + 6y - 1 = 0$ і $x + 2y - 3 = 0$;
б) $3x + 6y - 1 = 0$ і $x - 2y - 1 = 0$;
в) $3x + 6y - 4 = 0$ і $9x + 18y - 3 = 0$;
г) $2x - y = 0$ і $4x = 2y$;
д) $x - 5 = 0$ і $4x - 20 = 0$;
е) $5x + 1 = 0$ і $4x - 3y + 5 = 0$;
є) $2x - 3y + 1 = 0$ і $x + y - 2 = 0$;
ж) $y = 5x - 7$ і $y = 5x + 8$;
з) $y = 3x - 1$ і $y = 8x + 5$;
и) $y = 4x + 2$ і $y = 8x + 4$.

2.** Чи будуть взаємно перпендикулярні прямі:

а) $y = 5x - 3$ і $y = 7 - 0{,}2x$;
б) $y = 4x + 1$ і $y = -4x + 1$;
в) $2x - 3y = 6$ і $3x + 2y = 1$;
г) $7x + 5y - 1 = 0$ і $5x - 7y + 4 = 0$;
д) $8x + 7y - 3 = 0$ і $7y + 8x + 3 = 0$?

3*. При якому значенні параметра m прямі будуть паралельні:

а) $y = (m - 1)x + 3$ і $y = 3x - 7$;
б) $mx - 3y = 5$ і $4x - (m + 1)y = 15$?

4.** Знайдіть значення параметра m, при яких прямі, задані у попередній задачі, будуть взаємно перпендикулярними.

5*. Складіть рівняння прямої, яка паралельна заданій прямій і проходить через точку A:

а) $y = 7x - 3$, $A(-1; 4)$; **б)** $3x - y = 1$, $A(1; 1)$; **в)** $3x + 2y = 6$, $A(2; -3)$.

6.** Знайдіть рівняння прямої, яка перпендикулярна до заданої прямої і проходить через точку B:

а) $y = 8x - 3$, $B(3; -1)$; **б)** $4x - y = 6$, $B(-2; 6)$; **в)** $5x + 35y = 13$, $B(-4; -3)$.

7.** Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3; -4)$:

а) перпендикулярно до прямої AB, де $A(2; 0)$, $B(0; 2)$;
б) паралельно прямій CD, де $C(1; 1)$, $D(5; 0)$.

8*. Знайдіть рівняння прямих, які проходять через точку перетину заданих прямих $2x - 7y = 1$ і $y = x + 3$ паралельно осям координат.

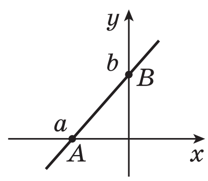
9.** Складіть рівняння прямих, на яких лежать висоти трикутника ABC, якщо $A(4; 5)$, $B(0; 0)$ і $C(-6; 1)$.

Для допитливих

РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ У ВІДРІЗКАХ

Теорема. **Якщо пряма перетинає осі координат у точках $(a; 0)$, $a \neq 0$ і $(0; b)$, $b \neq 0$, то всі точки цієї прямої задовольняють рівняння $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$,** яке називають *рівнянням прямої у відрізках*.

Доведення



Пряма, що розглядається, не паралельна осі Oy, тоді її рівняння можна представити у вигляді $y = kx + l$.

Координати точок $A(a; 0)$ і $B(0; b)$ належать цій прямій (див. мал.). Тоді маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0 = ka + l, \\ b = k \cdot 0 + l; \end{cases} \quad \begin{cases} l = b, \\ k = -\dfrac{b}{a}. \end{cases}$$

Рівняння заданої прямої має вигляд $y = -\frac{b}{a}x + b$, тобто $ay + bx = ab$. Якщо поділити останнє рівняння на добуток ab, отримаємо шукане співвідношення $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

10.** Знайдіть відстань від точки $M(4; -2)$ до прямої $3x - 4y = 5$.

11.** Знайдіть відстань між паралельними прямими $3x + 4y - 8 = 0$ і $3x + 4y + 12 = 0$.

12.** Запишіть рівняння серединного перпендикуляра до відрізка прямої $4x - 5y = 20$, що лежить між осями координат.

13.** Знайдіть координати точки, симетричної точці $A(-2; -2)$ відносно прямої $x + y - 3 = 0$.

14.** Знайдіть координати точки перетину медіан трикутника ABC, якщо $A(-1; -3)$, $B(1; 3)$ і $C(0; 6)$.

15*. Дано точки $M(-7; 3)$, $N(5; 2)$, $P(3; -3)$, $K(-2; -4)$. Покажіть, що чотирикутник з вершинами, які лежать на серединах сторін чотирикутника $MNPK$, – паралелограм.

16*. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$, де $A(-2; 10)$, $B(1; 3)$, $C(-2; -4)$, $D(-5; 3)$, – ромб.

17.** Чи є трикутник із вершинами в точках $M(4; -5)$, $N(7; 6)$, $P(-7; -2)$ прямокутним?

18*. У яких точках пряма $x - 2y - 4 = 0$ перетинає коло $x^2 + y^2 - 14x - 10y = 11$?

19*. Дві прямі перетинають коло $x^2 + y^2 = 25$ у точках з ординатами 3 і з ординатами –4 відповідно. Запишіть рівняння цих прямих.

20*. Рівняння кола $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 36$. Знайдіть довжини хорд, що лежать на осях координат.

21*. Запишіть рівняння кола, центр якого знаходиться в початку координат і яке дотикається до прямої $y = x - 3$.

22.** Знайдіть координати центрів кіл, одне з яких вписане в трикутник ABC, а друге – описане навколо цього трикутника, якщо:
а) $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(0; 3)$; **б)** $A(1; 2)$, $B(5; 2)$, $C(1; 5)$.

23.** Дві вершини трикутника ABC містяться в точках $A(0; -2)$ та $B(2; 0)$, а третя вершина $C(x; y)$ лежить на прямій $y = -x$, якщо площа трикутника ABC дорівнює 8. Визначте значення x і y, якщо $x < 0$.

24.** Скільки спільних точок мають пряма $y = -x$ і коло $(x - a)^2 + (y + 2)^2 = 1$ залежно від значення параметра a?

Для допитливих

1. Знайдіть довжини відрізків, які відтинає на осях координат пряма $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (разом із початком координат). Як ви думаєте, чому вказане співвідношення назвали рівнянням прямої у відрізках?

2. Назвіть усі випадки, коли рівняння прямої не можна записати у вигляді рівняння прямої у відрізках.

3. Скористайтеся рівнянням прямої у вигляді, запропонованому на с. 29, для того, щоб отримати рівняння прямої, яка проходить через точки $(a; 0)$ і $(0; b)$; перетворіть його до вигляду $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

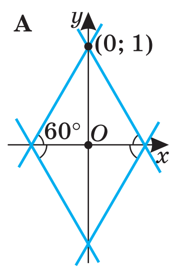
4. Чому рівняння, наведене на с. 29, також називають рівнянням у відрізках?

5. Скориставшись записом рівняння прямої у відрізках, розв'яжіть такі задачі.

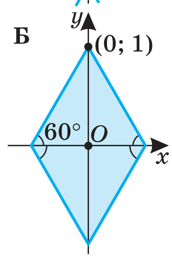
1) Напишіть рівняння кожної із чотирьох прямих, зображених на малюнку **А**.

2) Напишіть співвідношення, яке задовольняють усі точки зафарбованої фігури на малюнку **Б**.

А

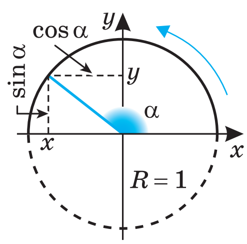


Б

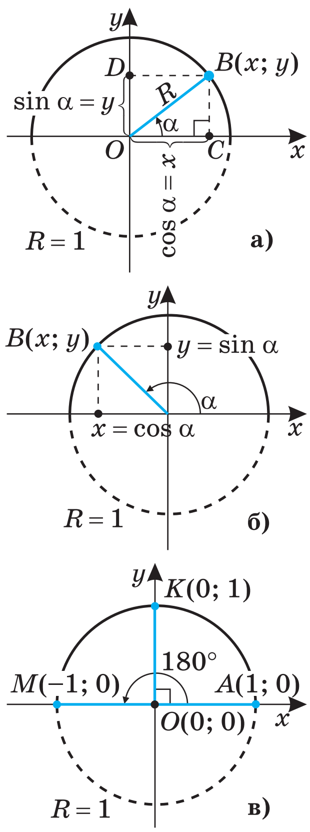


§ 4. Тригонометричні функції кутів від 0° до 180°

Досі значення тригонометричних функцій синуса, косинуса, тангенса і котангенса були означені лише для кутів від 0° до 90°. Розширимо ці поняття.



численно
$\sin\alpha = y$
$\cos\alpha = x$



Мал. 1.26

На координатній площині з центром у початку координат $O(0; 0)$ побудуємо в I і II координатних чвертях півколо одиничного радіуса. Позначимо через α кут між радіусом OB цього півкола і додатним напрямом осі абсцис (мал. 1.26).

Якщо кут α гострий, то з прямокутного трикутника OCB (мал. 1.26-а) маємо, що

$$\sin\alpha = \frac{BC}{R},\quad \cos\alpha = \frac{OC}{R}.$$

Такі співвідношення ми знаємо з 8-го класу.

ПРИ $R = 1$ ЧИСЕЛЬНО:

$\sin\alpha = BC = y$, $\cos\alpha = OC = x$, де $B(x; y)$.

Підкреслимо, що останні рівності виконуються **саме чисельно**. Тобто якщо кут BOC гострий, то значення синуса цього кута чисельно дорівнює ординаті точки $B(x; y)$, а косинуса – її абсциси:

$$\sin\alpha = y,\quad \cos\alpha = x.$$

Аналогічно будемо визначати синус і косинус для тупого (мал. 1.26-б), прямого, розгор-

Для допитливих

Термін *синус* латинського походження і означає «затока». Який зв’язок має затока із синусом?

Дугу кола можна уподібнити до зігнутого лука, а хорду, що її стягує, – до тятиви цього лука. Індійський математик – складач таблиці синусів – саме і назвав півхорду тятивою.

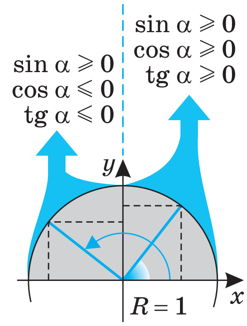
Один з арабських математиків, перекладаючи індійський текст на арабську мову, переклав його як і треба було: півхорду назвав тятивою. Але арабська мова має таку особливість, що в ній виписуються тільки приголосні літери, а голосні пропускаються. Те, які саме голосні стоять у слові, доводилося встановлювати з контексту. Слово «затока» арабською має однакові приголосні із словом «тятива». Перекладач, який пізніше перекладав арабський текст латинською мовою, умудрився прочитати його як «затока», що латинню звучить як «синус».

нутого кутів і кута, міра якого дорівнює нулю (мал. 1.26-в).

Розглядається кінець радіуса одиничного півкола з центром у початку координат (той, що міститься на півколі); відповідний кут відкладається від осі Ox проти годинникової стрілки.

Для довільного кута з проміжку від 0° до 180°:

- ***синус кута – ордината (чисельно) кінця радіуса одиничного півкола, що відповідає цьому куту;***
- ***косинус кута – абсциса (чисельно) кінця радіуса одиничного півкола, що відповідає цьому куту.***



Координати $(x; y)$ точок одиничного півкола змінюються в межах:

$$0 \leqslant y \leqslant 1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Тому для довільного кута α з проміжку $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ виконуються нерівності

$$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

При цьому:

- **для гострого кута** α: $\sin\alpha = y > 0$ і $\cos\alpha = x > 0$;
- **для тупого кута** α: $\sin\alpha = y > 0$ і $\cos\alpha = x < 0$.

α	0°	90°	180°
sin α	0	1	0
cos α	1	0	–1
tg α	0	—	0
ctg α	—	0	—

Знайдемо значення синуса і косинуса кутів міри 0°, 90° і 180°. Для цього розглянемо промені OA, OK і OM, що відповідають цим кутам (див. мал. 1.26-в). Враховуючи, що $A(1; 0)$, $K(0; 1)$ і $M(-1; 0)$, отримаємо:

$$\mathbf{\sin 0° = 0, \quad \cos 0° = 1;}$$
$$\mathbf{\sin 90° = 1, \quad \cos 90° = 0;}$$
$$\mathbf{\sin 180° = 0, \quad \cos 180° = -1.}$$

Тангенсом кута α будемо називати відношення **sin α** ***до*** **cos α**, ***а котангенсом кута α – відношення*** **cos α** ***до*** **sin α**. Як відомо, на нуль ділити не можна. Тоді це означення треба доповнити умовою, що число, на яке ділять, не дорівнює нулю. Тобто

$$\mathbf{tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}, \quad \textbf{за умови } \alpha \neq 90°;$$

$$\mathbf{ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}, \quad \textbf{за умови } \alpha \neq 0° \textbf{ і } \alpha \neq 180°.$$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,

при $\alpha \neq 90°$

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$,

при $\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 180°$

Для допитливих

1. Нехай правильними є такі твердження: «Серед людей, які мають телевізори, є такі, які не є малярами»; «Люди, які щодня плавають у басейні і не є малярами, не мають телевізорів». Чи правильними будуть тоді твердження: **а)** «Не всі ті, хто мають телевізори, щодня плавають у басейні»; **б)** «Не всі ті, хто не має телевізора, щодня плавають у басейні»?

2. В одній кімнаті три вимикачі, а в другій – три лампочки. Кожний вимикач призначений для однієї лампочки. Як встановити, який із вимикачів відповідає кожній із лампочок, якщо в кімнату з лампочками можна зайти лише один раз?

3. Перемикач має 6 положень, при яких світиться різна кількість лампочок – від 0 до 5. Кілька лампочок перегоріло. Чи може людина, не обізнана з роботою цього перемикача, визначити, які лампочки перегоріли? Як?

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого кута, які ми вивчали у 8-му класі для гострих кутів, правильні і для кутів α з проміжку $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. Доведемо це.

Півколо, яке ми розглядали, є дугою одиничного кола, рівняння якого має вигляд $x^2 + y^2 = 1$. Якщо підставити у це рівняння значення $y = \sin\alpha$ і $x = \cos\alpha$, отримаємо відому нам основну тригонометричну тотожність

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1},$$

яка виконується для довільного кута α з проміжку $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Правильними будуть й інші, вже відомі вам формули:

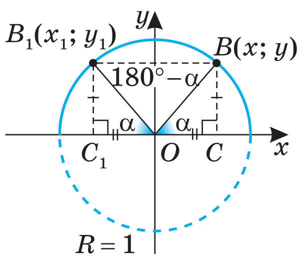
$\mathrm{tg}^2\,\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, при $\alpha \neq 90°$	$\mathrm{ctg}^2\,\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, при $\alpha \notin \{0°; 180°\}$	$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$, при $\alpha \notin \{0°; 90°; 180°\}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\mathrm{tg}^2\,\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$



Мал. 1.27

Знайдемо співвідношення між значеннями тригонометричних функцій суміжних кутів, тобто кутів $180° - \alpha$ і α.

Розглянемо $\triangle OCB$ і $\triangle OC_1B_1$ (мал. 1.27). Вони рівні за гіпотенузою і гострим кутом, тому $y_1 = y$, а $x_1 = -x$. Тобто

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\mathrm{tg}\,(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha \text{ (при } \alpha \neq 90°),$$
$$\mathrm{ctg}\,(180° - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha \text{ (при } \alpha \neq 0° \text{ і } \alpha \neq 180°).$$

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$
$\mathrm{tg}\,(90° - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,(90° - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$,
кут α – гострий

Скориставшись отриманим співвідношенням між тангенсами суміжних кутів, твердження про значення кутового коефіцієнта прямої (с. 26) можна сформулювати так.

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$
$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$
$\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}(180° - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$

Кутовий коефіцієнт k у рівнянні прямої $y = kx + l$ дорівнює тангенсу кута, який утворює ця пряма з додатним напрямом осі абсцис.

Зауваження.

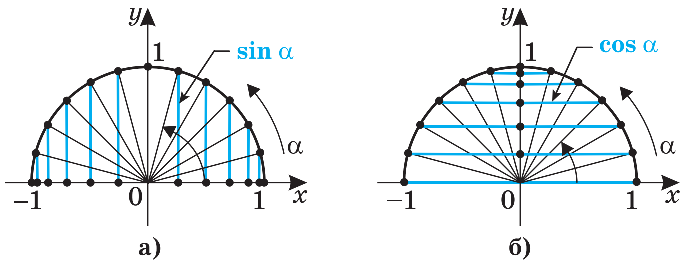
- При зростанні кута від 0° до 90° синус кута зростає від 0 до 1, а косинус спадає від 1 до 0.
- При зростанні кута від 90° до 180° синус кута спадає від 1 до 0 (мал. 1.28-а), а косинус спадає від 0 до –1 (мал. 1.28-б).

Якщо $\alpha \in [0; 90°]$:

$\sin\alpha\uparrow$ $\quad 0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$
$\cos\alpha\downarrow$ $\quad 0 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$

Для допитливих

Знайдіть геометричне місце точок, різниця квадратів відстаней від яких до двох заданих точок A і B дорівнює даній величині c. При яких значеннях c задача не має розв'язку?



Мал. 1.28

Якщо
$\alpha \in [90°; 180°]$:

sin α↓ $0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$
cos α↓ $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 0$

Практична робота 2

1. На розгорнутому подвійному аркуші паперу накресліть декартову систему координат (за одиницю візьміть 10 см). У I і II чвертях побудуйте півколо одиничного радіуса з центром у початку координат. За допомогою транспортира позначте на півколі точки, що ділять його на 12 рівних частин. Підпишіть, яким кутам відповідають ці точки.

2. Користуючись лінійкою, визначте координати кожної з позначених точок. Запишіть значення тригонометричних функцій кутів, що відповідають цим точкам. Заповніть таблицю.

	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
sin x													
cos x													
tg x													
ctg x													

3. Збільшується чи зменшується значення розглянутих тригонометричних функцій при зростанні кута: **а)** від 0° до 90° ; **б)** від 90° до 180°?

4. Користуючись цією таблицею, знайдіть наближене значення:

а) sin 165° + cos 120°; **в)** sin 75° cos 135°;
б) 2cos 105° – sin 120°; **г)** tg 150° : sin 135°.

Завдання 5

1°. Гострим чи тупим є кут β трикутника, якщо значення його: **а)** косинуса від'ємне; **б)** тангенса від'ємне; **в)** котангенса додатне; **г)** косинуса додатне?

2°. Відомо, що $90° < \alpha < 180°$. Який знак має значення cos α, sin α, tg α, ctg α?

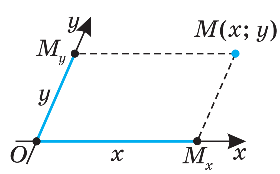
3°. Спростіть вираз:
а) sin (180° – x); **б)** cos (180° – x); **в)** tg (180° – x).

Для допитливих

Поряд з декартовою прямокутною системою координат використовують й інші системи координат на площині. На малюнку ви бачите *декартову косокутну систему координат*. Як визначають координати точки у такій системі, зрозуміло з малюнка.

Інколи доцільно обирати по осях координат різні одиниці масштабу (див., наприклад, додаток 2).

Існують системи координат, які більш суттєво відрізняються від декартових. Прикладом є полярна система координат, про яку ви дізнаєтеся пізніше у § 20.



4°. Спростіть вираз:

а) $\sin(90° - \beta)$; **б)** $\cos(90° - \beta)$; **в)** $\mathrm{tg}(90° - \beta)$.

5. Спростіть вираз:

а) $2\sin(90° - \alpha) - \cos(180° - \alpha)$; **в)** $\mathrm{tg}(90° - \beta) + 3\mathrm{ctg}(180° - \beta)$;
б) $\cos(90° - \alpha) + \sin(180° - \alpha)$; **г)** $\mathrm{ctg}(90° - \beta) - \mathrm{tg}(180° - \beta)$.

6. Спростіть вираз:

а) $2\sin(90° - \beta) - \sin\alpha + \cos(180° - \beta) + \cos(90° - \alpha)$;
б) $\cos(90° - \alpha) + \cos(180° - \alpha) + \sin\alpha - \sin(90° - \alpha)$;
в) $\mathrm{tg}(90° - \beta) + 3\mathrm{ctg}(90° - \alpha) + 2(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta)$.

7. Спростіть вираз:

а) $1 - \cos^2(90° - \alpha)$; **б)** $1 - (\cos^2(180° - \alpha) + \cos^2(90° - \alpha))$.

8*. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{1-2\sin^2(180°-\beta)}{1-2\sin^2(90°-\beta)}$; **б)** $\dfrac{\sin^2(90°-\beta)}{1-\cos(90°-\beta)}$; **в)** $\dfrac{\sin^2\beta(1-\sin^2(180°-\beta))}{\sin^2(90°-\beta)(1-\cos^2(180°-\beta))}$;

г) $(1 + \mathrm{ctg}(90° - \beta))^2 + (1 + \mathrm{tg}(180° - \beta))^2$; **д)** $\dfrac{\mathrm{ctg}^2(90°-\beta)(\mathrm{ctg}^2(180°-\beta)+1)}{\mathrm{tg}^2\beta+1}$.

9. Скористайтеся формулами зв'язку між значеннями тригонометричних функцій суміжних кутів та обчисліть:

а) $\cos 120°$; **б)** $\sin 135°$; **в)** $\mathrm{tg}\,150°$; **г)** $\cos 135°$; **д)** $\mathrm{ctg}\,150°$.

10. Знайдіть значення виразу:

а) $2\cos 60° + \sqrt{3}\cos 150°$; **г)** $3\cos 60°\,\mathrm{tg}\,45°\,\mathrm{tg}\,60°$;
б) $5\sin 30° + \mathrm{ctg}\,135°$; **д)** $\mathrm{tg}\,150°\sin 60°\cos 40° - \mathrm{ctg}\,120°\cos 150°\cos 140°$.
в) $(\cos 60° + \sin 150°)(\sin 30° - \cos 150°)$;

11*. Знайдіть значення виразу:

а) $2\,\mathrm{tg}^2\,120° + 4\cos^2 150°$; **г)** $\mathrm{tg}^3\,60°\sin 120° - \mathrm{ctg}^2\,60°\sin 150°$;
б) $3\cos^2 150° + 5\sin^2 135° - \mathrm{tg}^3\,135°$; **д)** $\sin 157°\cos 67° + \cos 23°\sin 113°$.
в) $3\cos^2 60°\,\mathrm{tg}\,135°\,\mathrm{tg}^2\,120°$;

12*. Відомо, що $0° < \alpha < 180°$. Знайдіть значення $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$, якщо:

а) $\cos\alpha = -0{,}3$; **б)** $\cos\alpha = -0{,}2$; **в)** $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$; **г)** $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

13*. Відомо, що $0° < \beta < 180°$. Знайдіть значення $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\mathrm{ctg}\,\beta$, якщо:

а) $\mathrm{tg}\,\beta = -1$; **б)** $\mathrm{tg}\,\beta = -1{,}5$; **в)** $\mathrm{tg}\,\beta = 3$.

Для допитливих

1. З усіх прямокутних трикутників із заданою гіпотенузою знайдіть трикутник з найдовшою бісектрисою прямого кута.

2. З усіх прямокутних трикутників із заданою бісектрисою прямого кута знайдіть трикутник із найменшою гіпотенузою.

3. Через точку M, яка лежить на бісектрисі прямого кута, проведіть пряму так, щоб її відрізок, обмежений сторонами кута, мав найменшу довжину.

4. Канал завширшки 6 м має прямокутний поворот.
а) Якої найбільшої довжини можна сплавити колоду цим каналом (товщиною колоди нехтуємо)? **б)** Якої найбільшої довжини можна сплавити колоду, що має діаметр поперечного перерізу 40 см? **в)** Якої найбільшої ширини можна сплавити пліт довжиною 5 м?

5. Коридор гуртожитку завширшки 2 м і заввишки 3 м має прямокутний поворот.
а) Якої найбільшої довжини дошку завтовшки 4 см можна пронести через цей коридор? Запитання **б)** і **в)** (аналогічно до завдання 4) сформулюйте самостійно та знайдіть відповіді до них.

14. Знайдіть значення $\mathrm{tg}\,\alpha$, якщо $\sin\alpha = 0{,}3$.

15. Знайдіть значення $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$, якщо:

а) α – гострий кут і $\sin\alpha = 0{,}2$; **в)** α – тупий кут і $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

б) α – тупий кут і $\sin\alpha = 0{,}4$;

16*. Побудуйте кут, косинус якого дорівнює: **а)** -1; **б)** $-\frac{2}{3}$.

17*. Побудуйте кут, тангенс якого дорівнює: **а)** -1; **б)** -3.

18*. Порівняйте тупі кути α і β, якщо:

а) $\sin\alpha < \sin\beta$; **б)** $\cos\alpha > \cos\beta$; **в)** $\mathrm{tg}\,\alpha > \mathrm{tg}\,\beta$; **г)** $\mathrm{ctg}\,\alpha < \mathrm{ctg}\,\beta$.

19*. Порівняйте:

а) $\sin 130°$ і $\sin 150°$; **в)** $\mathrm{tg}\,100°$ і $\mathrm{tg}\,130°$; **д)** $\sin 120°$ і $\sin 50°$.

б) $\cos 100°$ і $\cos 140°$; **г)** $\mathrm{ctg}\,50°$ і $\mathrm{tg}\,100°$;

20.** Знайдіть співвідношення між тригонометричними функціями кутів $90° + \alpha$ і α, скориставшись тотожністю $90° + \alpha = 180° - (90° - \alpha)$.

21*. Знайдіть суму квадратів косинусів кутів прямокутного трикутника.

22*. Знайдіть суму квадратів синусів кутів прямокутного трикутника.

23.** Спростіть вираз (кут α – гострий):

а) $\sin(90° + \alpha) - \cos\alpha\sin^2\alpha$; **г)** $(1 + \cos(90° + \alpha))(1 + \sin\alpha)$;

б) $\mathrm{ctg}^2(180° - \alpha) - \cos^2\alpha\,\mathrm{ctg}^2\alpha$; **д)** $(\mathrm{tg}^2\alpha + 1)\cos^2(180° - \alpha)$.

в) $\cos^2(90° - \alpha) + \mathrm{ctg}^2\alpha\cos^2(90° + \alpha)$;

24.** Спростіть вираз (кут α – гострий):

а) $\dfrac{\sin(180° - \alpha)\cdot\mathrm{tg}(\alpha + 90°)}{\cos(90° - \alpha)\cdot\mathrm{tg}(\alpha - 90°)}$; **б)** $\dfrac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 58°} + \dfrac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 32°}$.

25.** Спростіть вираз (кут α – гострий):

а) $\dfrac{\mathrm{ctg}(90° - \alpha) + \mathrm{ctg}(90° - \beta) + \mathrm{ctg}(90° - \gamma)}{3(\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}(180° - \alpha)) - 2(\mathrm{ctg}(90° - \alpha) + \mathrm{ctg}(90° - \beta)) - \mathrm{ctg}(180° - \gamma)}$;

б) $\dfrac{\mathrm{ctg}(90° - \alpha)(\mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{ctg}(90° - \gamma)) + \mathrm{ctg}(90° - \beta)\,\mathrm{tg}\,\gamma}{\mathrm{tg}(180° - \alpha)\,\mathrm{tg}(180° - \beta) + \mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma + \mathrm{tg}(180° - \alpha)\,\mathrm{tg}(180° - \gamma)}$.

26.** Знайдіть значення виразу, якщо $\mathrm{tg}\,\alpha = 7$:

а) $\dfrac{3\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$; **б)** $\dfrac{\sin^2\alpha}{1 + \cos\alpha}$.

Для допитливих

1. Із пункту, разміщеного на березі річки, відпливає до протилежного берега катер зі швидкістю 40 км/год. Швидкість течії 5 км/год. Під яким кутом до берега треба спрямувати катер, щоб прибути до найближчої точки протилежного берега річки?

2. Під яким кутом до берега треба спрямувати човен, щоб під час переправи через річку його якнайменше знесло течією, за умови, що течія річки 6 км/год, а швидкість човна відносно води 3 км/год?

3. У гострокутному трикутнику висоту, медіану і бісектрису, проведені з однієї вершини, продовжили до перетину з описаним навколо трикутника колом. Яка з отриманих хорд найбільша, а яка найменша?

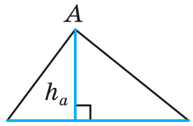
4. Через дану точку M поза даним колом проведіть січну до кола так, щоб сума відстаней від точок перетину січної з колом до даної точки M була: **а)** найбільшою; **б)** найменшою.

5. Запишіть рівняння прямих, що містять бісектриси трикутника, якщо задано координати вершин цього трикутника.

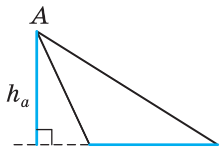
6. Скільки обертів за добу робить бісектриса кута між великою і маленькою стрілками годинника?

§ 5. Теорема синусів

Теорема. **Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін на синус кута між ними.**



$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$



Треба довести, що в усіх можливих випадках – коли кут C трикутника ABC гострий (мал. 1.29-а), тупий (мал. 1.29-б) або прямий (мал. 1.29-в) – площу трикутника ABC можна обчислити за формулою

$$S = \frac{1}{2} ab\sin C.$$

Доведення

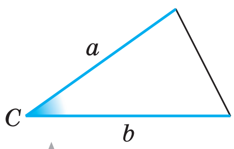
Ми знаємо, що площу довільного трикутника ABC можна обчислити за формулою $S = \frac{1}{2} ah_a$, де h_a – висота трикутника, проведена до його сторони a (мал. 1.29).

Із прямокутного трикутника ACD маємо:

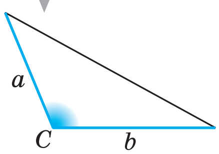
$h_a = b\sin C$, якщо кут C – гострий (мал. 1.29-а);

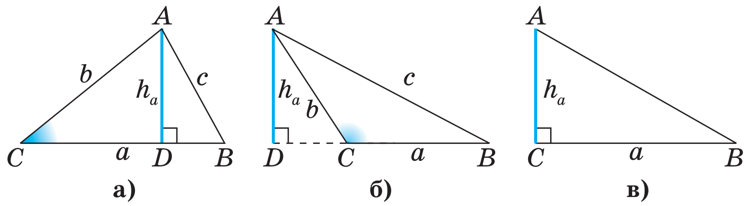
$h_a = b\sin\,(180° - C) = b\sin\,C$, якщо кут C – тупий (мал. 1.29-б).

Тоді $S = \frac{1}{2} ab\sin C$, і твердження теореми виконується.



$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} ab\sin C$$





Мал. 1.29

Якщо кут C – прямий (мал. 1.29-в), то

$$\sin C = \sin 90° = 1,$$

і площу прямокутного трикутника можна представити у шуканому вигляді:

$$S = \frac{1}{2} ab = S = \frac{1}{2} ab\sin C.$$

Теорему доведено.

Теорема синусів. **У трикутнику відношення довжини сторони до синуса протилежного кута є величиною сталою.**

У трикутнику ABC проти кутів A, B і C лежать сторони a, b і c. Треба довести, що

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Доведемо цю теорему двома способами.

СПОСІБ І

За теоремою про площу трикутника маємо:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C,\quad S=\frac{1}{2}ac\sin B,\quad S=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

Тоді з перших двох рівностей отримаємо:

$$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B \text{ і } \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

З останніх двох рівностей отримаємо:

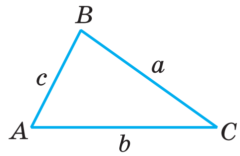
$$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A \text{ і } \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

Маємо:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Теорему доведено.

Теорема синусів



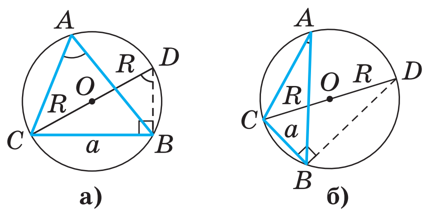
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

СПОСІБ ІІ

Опишемо навколо трикутника ABC коло і проведемо діаметр $CD = 2R$ (мал. 1.30–1.32). Кут DBC спирається на діаметр, отже, є прямим.

1) Якщо кут A – гострий (мал. 1.30), він спирається на ту саму дугу, що і кут CDB. Тоді $\angle CDB=\angle A$ і з трикутника CBD ($\angle B=90^\circ$) маємо:

$$a=2R\cdot\sin A,\quad \frac{a}{\sin A}=2R.$$



Мал. 1.30

2) Якщо кут A – тупий (мал. 1.31), то $\angle A+\angle CDB=180^\circ$ (бо чотирикутник $ABCD$ – вписаний) і

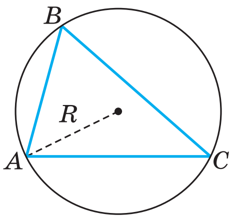
Для допитливих

За часів Паскаля (XVI ст.) математику найчастіше називали геометрією. Якось 12-річний *Блез Паскаль* запитав у батька, Етьєна Паскаля, що таке «геометрія». Етьєн Паскаль, не надаючи своїм словам особливого значення, сказав, що геометрія – це така собі теорія, яка вивчає способи креслення фігур і вказує співвідношення між їх елементами. Через деякий час батько побачив, що син зосереджено розмірковує над складеними з паличок трикутниками. Як з'ясувалося, Блез якраз додумував доведення відкритого ним цікавого факту: у будь-якому трикутнику сума всіх трьох кутів разом складає два прямі кути. Тоді Етьєн відімкнув шафу з книгами і дав Блезу «Начала» Евкліда. 13-річний Блез опанував її як захоплюючий роман. Невдовзі Блеза Паскаля допустили до участі в засіданнях наукового паризького гуртка (пізніше на базі цього гуртка було створено Паризьку академію наук).

$\angle CDB = 180^\circ - \angle A$. З трикутника CBD ($\angle B = 90^\circ$) маємо:

$$a = 2R \cdot \sin(180^\circ - A) = 2R\sin A, \quad \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

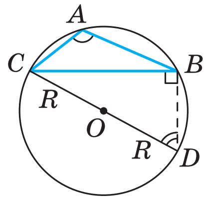
Розширена теорема синусів



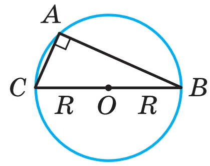
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

3) Якщо кут A – прямий (мал. 1.32), маємо:

$$a = 2R, \ \sin A = \sin 90^\circ = 1 \ \text{ і } \ \frac{a}{\sin A} = 2R.$$



Мал. 1.31



Мал. 1.32

Таким чином, для довільного трикутника ABC

$$\frac{a}{\sin A} = 2R.$$

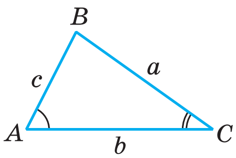
Аналогічно отримаємо:

$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \ \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Тоді

$$\frac{a}{\sin A} = 2R = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Теорему доведено.



Останнє співвідношення, записане у вигляді

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

$$\angle A > \angle C \Leftrightarrow a > c$$

ще називають *розширеною теоремою синусів*.

Н Наслідок. **Площа трикутника ABC, вписаного в коло радіуса R, дорівнює: $S = \frac{abc}{4R}$**, це випливає з формул: $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ і $\frac{c}{\sin C} = 2R$.

Проти більшої сторони у трикутнику лежить більший кут і навпаки.

Користуючись теоремою синусів, можна довести твердження, відоме нам ще з 7-го класу, що **проти більшої сторони у трикутнику лежить більший кут і навпаки.** Таке доведення пропонуємо виконати самостійно (не забудьте при цьому розглянути випадок тупокутного трикутника).

Для допитливих

Шахівницю закривають 32 пластинки доміно, кожна з яких закриває рівно 2 клітинки. 8 пластинок закривають 8 клітинок однієї діагоналі шахівниці, причому деякі пластинки закривають ще одну клітинку вище від діагоналі, а інші – ще одну клітинку нижче від діагоналі. Покажіть, що при будь-якому покритті шахівниці першого і другого видів пластинок буде порівну.

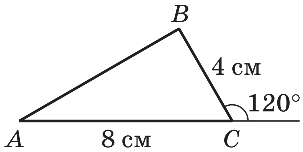
Практична робота 3

1. Накресліть довільний трикутник. Виміряйте довжини сторін трикутника.
2. Виміряйте градусну міру кутів трикутника. Знайдіть значення синусів цих кутів, використовуючи таблиці Брадіса або калькулятор.
3. Обчисліть площу трикутника через довжини двох його сторін і синус кута між ними.
4. Проведіть одну з висот трикутника. Виміряйте її довжину. Обчисліть площу трикутника через довжину цієї висоти і порівняйте з отриманим раніше значенням площі.
5. Обчисліть відношення довжин сторін трикутника до значення синусів протилежних цим сторонам кутів. Зробіть висновок.

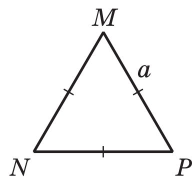
Завдання 6

1°. Знайдіть площу трикутника, якщо дві його сторони і кут між ними дорівнюють: **а)** $\sqrt{8}$ см, 4 см і 45°; **б)** $\sqrt{8}$ см, 4 см і 135°; **в)** 6 см, 4 см і 150°; **г)** 6 см, 4 см і 30°.

2. Знайдіть площу трикутників за малюнком 1.33.



а)



б)

Мал. 1.33

3°. Дві сторони трикутника дорівнюють 8 см і $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть кут між ними, якщо площа трикутника дорівнює: **а)** 16 см^2 ; **б)** $8\sqrt{2}$ см^2.

4°. Площа трикутника ABC дорівнює 16 см^2, сторона $AB = 8$ см, $\angle ABC = 150°$. Знайдіть сторону BC.

5. Знайдіть площу трикутника за двома кутами α і β та радіусом R описаного навколо нього кола.

6°. Два кути трикутника дорівнюють 45° і 60° відповідно. Знайдіть сторону, яка лежить проти кута 45°, якщо проти кута 60° лежить сторона, довжина якої: **а)** 3 см; **б)** $2\sqrt{3}$ см; **в)** $\sqrt{6}$ см.

7°. Дано трикутник ABC, у якого $AC = \sqrt{2}$, $BC = 1$, $\angle ABC = 45°$. Знайдіть кут BAC.

8°. Дано трикутник ABC, у якого $AC = \sqrt{2}$, $BC = 1$. Знайдіть кут ABC, якщо: **а)** $\angle BAC = 45°$; **б)** $\angle BAC = 30°$.

9. Сума двох сторін трикутника дорівнює 18 см. Знайдіть довжини цих сторін, якщо проти них лежать кути: **а)** 60° і 45°; **б)** 30° і 135°; **в)** α і β.

10. Різниця двох сторін трикутника дорівнює t. Знайдіть довжини цих сторін, якщо проти них лежать кути: **а)** 60° і 45°; **б)** 30° і 90°; **в)** α і β.

11. Сторона трикутника дорівнює b, а прилеглі кути дорівнюють α і β. Знайдіть периметр трикутника.

12. Знайдіть сторони трикутника, периметр якого дорівнює P, а два кути – α і β.

13°. Знайдіть радіус описаного навколо трикутника кола, якщо відомо, що в ньому проти сторони 2 см лежить кут: **а)** 30°; **б)** 135°; **в)** 90°.

14°. Радіус описаного навколо трикутника кола дорівнює $\sqrt{8}$ дм. Знайдіть довжину сторони, яка лежить проти кута міри: **а)** 45°; **б)** 150°; **в)** 135°.

15. Знайдіть радіус кола, якщо відомо, що в ньому хорда завдовжки 12 см стягує дугу градусної міри: **а)** 60°; **б)** 90°; **в)** 180°.

16. Радіус описаного навколо трапеції кола дорівнює $\sqrt{8}$ дм. Знайдіть довжину її діагоналі, якщо один із кутів трапеції дорівнює: **а)** 45°; **б)** 150°; **в)** 135°.

17. У коло вписано дві трапеції з відповідно паралельними сторонами. Доведіть, що діагоналі трапецій рівні.

18*. Бічна сторона вписаної трапеції дорівнює a, середня лінія – b, а один із кутів – 30°. Знайдіть радіус описаного кола.

19*. Одна з бічних сторін трапеції утворює з більшою основою кут α, а друга бічна сторона, довжиною a, утворює з меншою основою кут β. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо довжина її меншої основи дорівнює b.

20*. У рівносторонній трикутник ABC вписано рівносторонній трикутник TPH так, що на сторонах AB, BC і AC лежать відповідно точки T, P і H. Знайдіть відношення сторін цих трикутників, якщо $\angle CHP = \beta$.

21*. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 дм і 4 дм. Знайдіть радіус кола, що проходить через вершини гострих кутів цього трикутника і середину більшого катета.

22*. У трикутнику ABC: $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$, $AB = c$, AD – бісектриса. Знайдіть BD.

23*. Сторона трикутника дорівнює b, а прилеглі кути дорівнюють α і β. Знайдіть довжину бісектриси третього кута.

24*. Гострі кути трикутника дорівнюють α і β. Бісектриса, проведена з вершини третього кута, дорівнює l. Знайдіть периметр трикутника.

25*. Гострі кути трикутника дорівнюють α і β. Бісектриса, проведена з вершини третього кута, дорівнює l. Знайдіть бісектриси даних кутів.

26*. У трикутнику ABC проведено медіану BM, довжина якої дорівнює m. Знайдіть AB, якщо $\angle ABM = \alpha$, $\angle CBM = \beta$.

27.** У трикутнику ABC: BM – медіана, $\angle ABM = \alpha$, $\angle CBM = \beta$. Знайдіть BM, якщо $BC = a$.

28*. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 16 см, бічна сторона – 5 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цієї трапеції.

29.** Усередині гострого кута взято точку A. З неї на сторони кута опущено перпендикуляри. Відстань між основами цих перпендикулярів дорівнює 12 см. Знайдіть відстань від точки A до вершини кута, якщо градусна міра кута дорівнює: **а)** $30°$; **б)** α.

30.** Усередині гострого кута $30°$ взято точку A. З цієї точки на сторони кута опущено перпендикуляри. Знайдіть відстань між основами цих перпендикулярів, якщо точка A віддалена від вершини кута на 10 см.

31.** Усередині гострого кута взято точку A. З цієї точки опущено перпендикуляри на сторони кута. Відстань між основами перпендикулярів дорівнює $\sqrt{8}$ дм, а відстань від точки A до вершини кута – 4 дм. Знайдіть градусну міру кута.

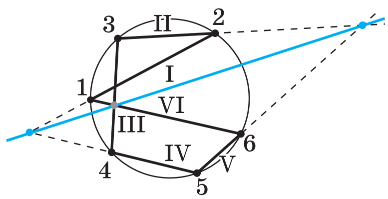
32.** Побудуйте трикутник за кутом і радіусами вписаного та описаного кіл.

33.** Дано відрізок AB і точку C на ньому (точка C не є серединою відрізка AB). Знайдіть геометричне місце точок перетину двох рівних кіл, одне з яких проходить через точки A і C, а друге – через точки B і C.

Для допитливих

Блезу Паскалю (1623–1662) не було ще й 17 років, коли він відкрив теорему, сьогодні відому як *теорема Паскаля*. Про відкриття Паскаля математики того часу дізналися з афіш, які було надруковано у кількості 50 примірників і розклеєно на стінах будинків і церков Парижа (на той час ще не існувало наукових журналів).

Теорема Паскаля. Позначимо на колі довільним чином шість точок, пронумеруємо їх у довільному порядку як 1, 2, 3, 4, 5, 6 (не обов'язково у тому, як вони розміщені на колі). Сполучимо ці точки відрізками I, II, III, IV, V у послідовності нумерації точок (див. мал.), а останнім відрізком VI сполучимо шосту точку з першою. Три точки перетину прямих, що містять отримані відрізки, узятих через два номери (I з IV, II з V, III з VI), лежатимуть на одній прямій. (Далі див. с. 53).



§ 6. Теорема косинусів

Т **Теорема косинусів. Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін на косинус кута між ними.**

Доведемо для довільного трикутника ABC:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Доведення

Введемо систему координат із початком у точці C так, як показано на малюнках 1.34.

Тоді точки A і B мають координати:

$A(b\cos C;\, b\sin C)$ і $B(a;\, 0)$.

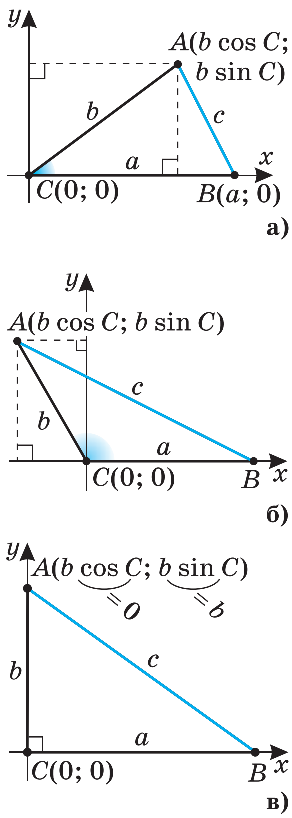
Запишемо квадрат відстані між точками A і B:

$AB^2 = (b\cos C - a)^2 + (b\sin C - 0)^2 =$
$= b^2\cos^2 C - 2ab\cos C + a^2 + b^2\sin^2 C.$

Згрупуємо у цьому виразі перший доданок з останнім і врахуємо, що $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$$c^2 = b^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + a^2 - 2ab\cos C = b^2 + a^2 - 2ab\cos C.$$

Теорему доведено.



Мал. 1.34

Н **Наслідок 1. У паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.**

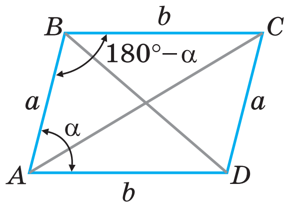
$ABCD$ – паралелограм із довжинами сторін a і b та гострим кутом α (мал. 1.35). Його тупий кут дорівнює $180° - \alpha$.

З трикутників ABD і ABC за теоремою косинусів маємо:

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha;$$
$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha) = a^2 + b^2 - 2ab(-\cos\alpha).$$

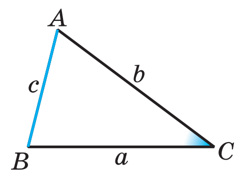
Почленно додамо ліві й праві частини цих рівностей і отримаємо шукане співвідношення:

$$BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

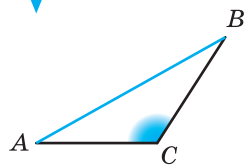


Мал. 1.35

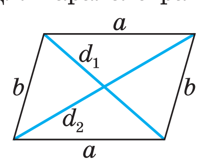
Теорема косинусів



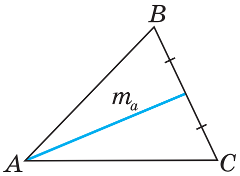
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$



Для паралелограма:



$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$



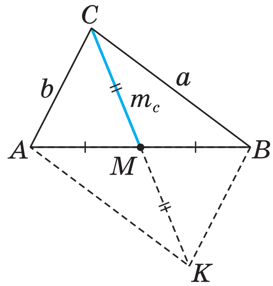
$m_a = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$;

$m_b = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$;

$m_c = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$

Н Наслідок 2. **Квадрат медіани, проведеної до сторони трикутника, дорівнює півсумі квадратів двох інших сторін цього трикутника мінус чверть квадрата сторони, до якої проведено медіану.**

Тобто для медіани m_c трикутника ABC (мал. 1.36) виконується рівність $m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$.



Мал. 1.36

Доведення

Продовжимо медіану m_c на відрізок $MK = m_c$.

Утворений чотирикутник $ACBK$ – паралелограм (бо $CM = MK$, $AM = MB$). Тоді, за наслідком 1, маємо:

$$c^2 + (2m_c)^2 = 2(a^2 + b^2), \quad m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Зауваження. *Теорему косинусів інколи називають узагальненою теоремою Піфагора*. Це пояснюється тим, що коли кут C прямий, то $\cos C = \cos 90° = 0$, і для гіпотенузи c прямокутного трикутника ABC, із теореми косинусів, маємо: $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C = b^2 + a^2$ – твердження теореми Піфагора.

Практична робота 4

1. Накресліть довільний трикутник і виміряйте довжини його сторін.

Для допитливих

Теореми синусів і косинусів у задачах на доведення

У задачах, що пропонуються далі, традиційно позначаємо відповідно: сторони трикутника ABC, що лежать проти кутів A, B, C, як a, b, c; медіани і висоти, проведені до сторін a, b, c, як m_a, m_b, m_c і h_a, h_b, h_c; R і r – радіуси описаного навколо трикутника і вписаного у трикутник кіл; S – його площа.

1. Опорна задача. **Доведіть, що для трикутника ABC: $S = \frac{abc}{4R}$, $h_a = \frac{bc}{2R}$.**

2. Точка D лежить на основі AC рівнобедреного трикутника ABC. Доведіть, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників ABD і CBD, рівні.

3. У гострокутному трикутнику ABC провели висоти AP і CM. Точки P_1 і M_1 симетричні точкам P і M відносно середин сторін BC і AB відповідно. Доведіть, що пряма, яка сполучає вершину B із центром O кола, описаного навколо даного трикутника, ділить відрізок P_1M_1 навпіл.

4. Опорна задача. **Доведіть, що: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.**

5. Доведіть, що $4S = (a^2 - (b-c)^2)\frac{\sin A}{1-\cos A}$.

6. Довжини сторін паралелограма дорівнюють a і b, довжини діагоналей – m і n. Доведіть, що $a^4 + b^4 = m^2n^2$ тоді і тільки тоді, коли гострий кут паралелограма дорівнює 45°.

2. Виміряйте градусну міру кожного кута трикутника. Знайдіть за таблицями Брадіса або використовуючи калькулятор значення косинусів цих кутів і запишіть їх.
3. За допомогою відповідних обчислень переконайтеся, що теорема косинусів правильна для вашого трикутника.

Завдання 7

1°. Знайдіть невідому сторону трикутника ABC, якщо:

а) $\angle C = 60°$, $AC = 25$ дм, $CB = 40$ дм; **в)** $\angle B = 60°$, $BC = 6$ см, $AC = 2\sqrt{7}$ см;

б) $\angle C = 120°$, $AC = 3{,}5$ м, $CB = 4$ м; **г)** $\angle B = 135°$, $BC = 4$ см, $AC = \sqrt{10}$ см.

2°. Знайдіть довжину діагоналі BD чотирикутника $ABCD$, у якого $\angle C = 60°$, $BC = 50$ мм, $CD = 35$ мм.

3. Залізний стрижень завдовжки 5 дм зігнуто посередині під кутом 120°. Обчисліть відстань між його кінцями (з точністю до 0,1 см).

4. Знайдіть рівнодійну двох сил в 3Н і 2Н, прикладених в одній точці під кутом 135°.

5. У паралелограмі $ABCD$ сторони AB і BC дорівнюють 20 см і 12 см відповідно, а $\angle D = 120°$. Знайдіть довжину діагоналі AC.

6. Визначте вид трикутника (гострокутний, тупокутний чи прямокутний), якщо його сторони дорівнюють: **а)** 3 см, 5 см, 7 см; **б)** 3 см, 4 см, 3 см; **в)** 3 см, 4 см, 5 см?

7*. Перевірте, чи є трикутник HPT тупокутним, якщо $H(-2; 5)$, $P(4; 8)$, $T(10; 6)$.

8. У трикутнику ABC сторони AB, BC і AC дорівнюють 15 см, 13 см і 14 см відповідно. Знайдіть: **а)** косинуси найбільшого і найменшого кутів трикутника; **б)** проекції сторін AB і BC на пряму AC.

9. Нехай AD і BC – основи рівнобічної трапеції $ABCD$. Доведіть, що $AC^2 = AD \cdot BC + AB^2$.

10. Основи трапеції дорівнюють 3 см і 8 см. Одна з бічних сторін дорівнює 5 см і утворює з меншою основою кут 120°. Знайдіть: **а)** діагоналі трапеції; **б)** площу трапеції.

11. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 16 см. Одна з бічних сторін дорівнює 10 см і утворює з більшою основою кут 60°. Доведіть, що трапеція рівнобічна.

12. Діагоналі паралелограма дорівнюють 17 см і 19 см, а сторони відносяться як 2 : 3. Знайдіть периметр паралелограма.

13*. Діагоналі паралелограма дорівнюють 24 см і 28 см, а одна зі сторін менша за другу на 8 см. Знайдіть площу паралелограма.

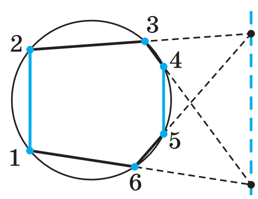
14. Сторони паралелограма дорівнюють 6 м і 7 м. Знайдіть його діагоналі, якщо одна з них довша за другу на 4 м.

15*. З однієї точки кола проведено дві хорди завдовжки 5 см і 8 см. Кінці цих хорд сполучено відрізком, що стягує дугу 120°. Обчисліть довжину цього відрізка, якщо він і задана точка лежать по різні боки від центра кола.

16*. З однієї точки кола проведено дві хорди завдовжки 7 см і 8 см. Кінці цих хорд сполучено відрізком, що стягує дугу 120°. Обчисліть довжину цього відрізка, якщо він і задана точка лежать по один бік від центра кола.

Для допитливих

1. Спробуйте зробити кілька дослідів за умовою теореми Паскаля (с. 50) для довільного розміщення точок на колі і різних способів їх нумерації. Причому може статися, що дві прямі, точку перетину яких ми шукаємо, – паралельні. Тоді теорему Паскаля треба розуміти так, що пряма, яка проходить через дві інші задані точки, паралельна вказаним прямим (див. мал.).



2. У коло вписано трапецію $MNPQ$ $(MQ \parallel NP)$. Точка A – довільна точка прямої, що містить діаметр, паралельний основам трапеції. Доведіть, що

$$AM^2 + AQ^2 = AN^2 + AP^2.$$

17*. З однієї точки кола проведено хорди завдовжки $2\sqrt{2}$ см і 6 см. Кінці цих хорд сполучено відрізком, що стягує дугу 90°. Обчисліть довжину цього відрізка, якщо він і задана точка лежать: **а)** по різні боки від центра кола; **б)** по один бік від центра кола.

18*. Медіана AM трикутника ABC утворює зі стороною BC кут 60°. Знайдіть сторону AC, якщо $BC = 32$ см, $AB = 2\sqrt{97}$ см.

19*. Медіана трикутника, що проведена до сторони, довжина якої дорівнює 20 см, утворює з нею кут 60°. Сторона, що лежить проти цього кута, дорівнює $2\sqrt{19}$ см. Знайдіть третю сторону трикутника.

20*. Бісектриса AP трикутника ABC утворює зі стороною BC кут 60°. Сторони AC і AB дорівнюють 6 см і 8 см відповідно. Знайдіть довжину сторони BC.

21*. Знайдіть найдовшу медіану трикутника, сторони якого дорівнюють 7 см, 6 см і $\sqrt{26}$ см.

22*. Різниця двох сторін трикутника дорівнює 8 см, третя сторона – 32 см, а медіана, проведена до неї, – 28 см. Обчисліть периметр трикутника.

23*. Сторона трикутника більша за медіану, проведену до неї, на 4 см, а дві інші сторони дорівнюють 28 см і 36 см. Обчисліть периметр трикутника.

24*. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 7 см, а медіана, проведена до меншої з них, дорівнює 5 см. Знайдіть третю сторону трикутника.

25.** Медіани трикутника дорівнюють 5 см, $\sqrt{52}$ см і $\sqrt{73}$ см. Доведіть, що цей трикутник прямокутний.

26.** Усередині кута міри 60° взято точку A, яка віддалена від сторін цього кута на 2 см і 4 см. Знайдіть відстань від точки A до вершини кута.

27.** Доведіть, що різниця квадратів двох сторін трикутника дорівнює: **а)** різниці квадратів їх проекцій на третю сторону; **б)** подвоєному добутку третьої сторони і проекції її медіани на цю саму сторону.

28*. У колі з центром O хорда AB перетинає діаметр у точці M і утворює з цим діаметром кут 60°. Знайдіть OM, якщо $AM = 10$ см, $BM = 4$ см.

29.** Доведіть, що медіани трикутника ABC, проведені до сторін a і b, взаємно перпендикулярні, якщо виконується співвідношення $a^2 + b^2 = 5c^2$.

30*. Доведіть, що в паралелограмі проти більшого кута лежить більша діагональ.

31.** Доведіть, що в будь-якому трикутнику: **а)** найбільшій стороні відповідає менша з медіан; **б)** більша з медіан перетинає меншу зі сторін.

32.** Доведіть, що у паралелограмі з гострим кутом 45° добуток квадратів діагоналей дорівнює сумі четвертих степенів двох його суміжних сторін.

33.** За даними відрізками a і b побудуйте відрізок $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

34.** Вершини опуклого чотирикутника $ABCD$ належать колу. Відомо, що $AB^2 + BC^2 = AD^2 + CD^2$. Доведіть, що $\angle ABC = 90°$.

35.** За допомогою теореми косинусів доведіть *теорему Птолемея*: в чотирикутнику, вписаному в коло, добуток діагоналей дорівнює сумі добутків його протилежних сторін.

36.** Для медіан трикутника справедлива рівність: $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$. Чи правильно, що трикутник прямокутний? Відповідь обґрунтуйте.

37.** Для медіан трикутника справедлива нерівність: $m_a^2 + m_b^2 > 5m_c^2$. Яким має бути кут C – тупим чи гострим? Відповідь обґрунтуйте.

Для допитливих

1. У трикутнику ABC висота AH дорівнює медіані BM. Знайдіть кут MBC.

2. Знайдіть залежність між кутами трикутника, в якому одну з медіан із центра кола, описаного навколо цього трикутника, видно під прямим кутом.

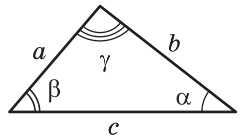
§ 7. Розв’язування трикутників

Назвемо *основними елементами трикутника* його внутрішні кути і сторони.

Розв’язуванням трикутника називають обчислення усіх його основних елементів за значеннями трьох з них, якщо трикутник визначений. (*Трикутник визначений*, якщо за даними елементами можна побудувати конкретний трикутник.)

Зауваження. Набір заданих трьох елементів не може бути довільним. Наприклад, не можна визначити трикутник, задавши три його кути.

Ми вже розв’язували у 8-му класі такі задачі для прямокутного трикутника. Тепер, користуючись теоремами синусів і косинусів, можемо знаходити сторони і кути довільних трикутників.

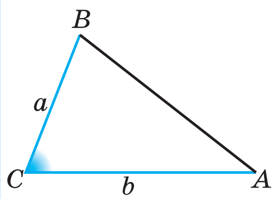


$\alpha, \beta, \gamma,$ ***a*, *b*, *c*, –** **основні елементи трикутника**

Розглянемо розв’язування трикутника на прикладах. Причому будемо використовувати традиційні позначення: у трикутнику *ABC* проти кутів *A*, *B* і *C* лежать сторони *a*, *b* і *c*.

Трикутник визначений, ↑ якщо за даними елементами його можна однозначно побудувати.

Приклад 1. За двома відомими сторонами і кутом між ними (мал. 1.37) знайти всі інші елементи трикутника.



Мал. 1.37

Дано: a, b, $\angle C$.
Знайти: c, $\angle A$, $\angle B$.

1) За теоремою косинусів
$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}.$$
2) За теоремою косинусів
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$
3) $\angle B = 180° - \angle A - \angle C$.

Для допитливих

Уперше аналіз і класифікацію софізмів дав Арістотель (384–322 рр. до н. е.) у трактаті «Про софістичні спростування» (див.: Аристотель. Собрание сочинений. В 4-х т. М., 1978, т. 2).

Розгадайте софізм М. Г. Чернишевського. **У будь-якому тупокутному трикутнику довжина сторони, протилежної тупому куту, більша від суми довжин двох інших його сторін.**

Доведення

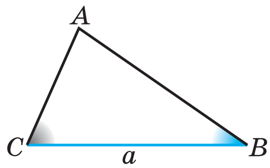
1) Нехай у $\triangle ABC$ кут A – тупий. Тоді $\angle A > \angle B + \angle C$.

2) За теоремою синусів маємо: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$, де R – радіус кола, описаного навколо трикутника ABC.

3) Із попереднього маємо, що $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$.

4) Як відомо, більшому куту відповідає більше значення його синуса. Тоді
$$a > b + c?!$$

Приклад 2. За відомими стороною і прилеглими до неї кутами (мал. 1.38) знайти всі інші основні елементи трикутника.



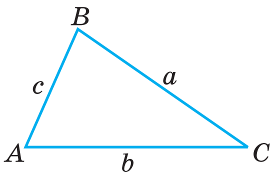
Мал. 1.38

Дано: a, $\angle C$, $\angle B$.
Знайти: $\angle A$, b, c.

1) $\angle A = 180° - \angle B - \angle C$.
2) За теоремою синусів

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A}; \quad c = a\frac{\sin C}{\sin A}.$$

Приклад 3. За трьома відомими сторонами знайти всі кути трикутника (мал. 1.39).



Мал. 1.39

Дано: a, b, c.
Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

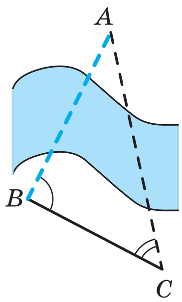
1) За теоремою косинусів

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

2) $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$.

Зауваження. Останні два приклади мають розв'язки не при довільних значеннях заданих елементів, а лише за умови $\angle C + \angle B < 180°$ та $a + b > c$, $a + c > b$, $c + b > a$ відповідно.



$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin(180° - (B + C))},$$

$$AB = \frac{BC \sin C}{\sin(B + C)}$$

Уміння розв'язувати трикутники можна використовувати і на практиці. Наприклад, якщо треба знайти відстань між двома пунктами A і B, які розділено перешкодою, можна скористатися прикладом 2. Тобто обрати на місцевості точку C (див. мал. на полі), виміряти відстань CB, кути C і B та за теоремою синусів обчислити довжину відрізка AB.

Для допитливих

Розгадайте софізм. **У будь-якому трикутнику всі кути рівні.**

Доведення

Нехай ABC – довільний трикутник, кути і сторони якого позначимо, як показано на малюнку.

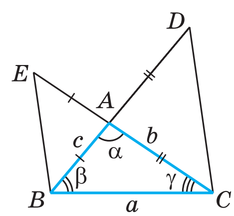
$\triangle BEC$ і $\triangle BDC$: $\angle E = \frac{\alpha}{2}$, $\angle CBE = \beta + \frac{\alpha}{2}$ і $\angle D = \frac{\alpha}{2}$, $\angle BCD = \gamma + \frac{\alpha}{2}$,

за теоремою синусів

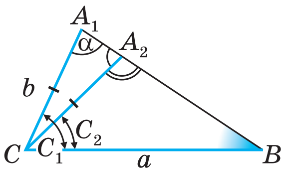
$$\frac{b + c}{\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{b + c}{\sin\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Звідси: $\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right)$ і $\beta = \alpha$.

Аналогічно отримаємо, що $\alpha = \gamma$?!



Не можна не розглянути і четвертий випадок розв'язування трикутника за двома його сторонами і кутом не між ними.



Мал. 1.40

Дано: a, b, $\angle B$

Знайти: c, $\angle A$, $\angle C$.

За теоремою синусів

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b},$$

звідси кут A може бути або гострим, або тупим, бо $\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$ – маємо два розв'язки: $A_1 = \alpha < 90°$ або $A_2 = 180° - \alpha > 90°$ (мал. 1.40).

Тоді

$\angle C_1 = 180° - \angle B - \alpha$,

$\angle C_2 = 180° - \angle B - (180° - \alpha) = \alpha - \angle B$.

Зрозуміло, що градусна міра кута трикутника не може бути від'ємною. Тоді другий розв'язок існує за умови $\alpha > \angle B$, тобто коли $a > b$ (у трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона).

Якщо $a \leqslant b$, то маємо один розв'язок, тобто трикутник ABC визначається однозначно.

Зрозуміло, що *дана задача має один розв'язок також у випадку, коли заданий кут B – тупий.*

Якщо задано a, b, $\angle B$, то розв'язок $\triangle ABC$ єдиний у випадках:

1) $a \leqslant b$;

2) $\angle B$ – тупий.

Завдання 8

1°. У трикутнику ABC проти кутів A, B, C лежать відповідно сторони a, b, c. Знайдіть невідомі сторони та кути трикутника, якщо:

а) $\angle A = 25°$, $\angle B = 48°$, $a = 27$ см;

б) $\angle C = 30°$, $\angle B = 48°$, $b = 70$;

в) $\angle A = 85°$, $a = 30$, $b = 9{,}81$;

г) $\angle C = 17°$, $c = 5$, $b = 8$;

д) $\angle C = 51°$, $a = 15$, $b = 17{,}9$;

е) $\angle C = 32°$, $a = 25$, $b = 40$;

є) $\angle B = 81°$, $\angle C = 45°$, $a = 105$ см;

ж) $\angle A = 30°$, $\angle B - \angle C = 60°$, $c = 38$;

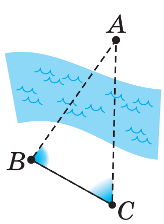
з) $\angle A = 44°$, $\angle B = 77°$, $c = 13$;

и) $a = 7$, $b = 8$, $c = 6$.

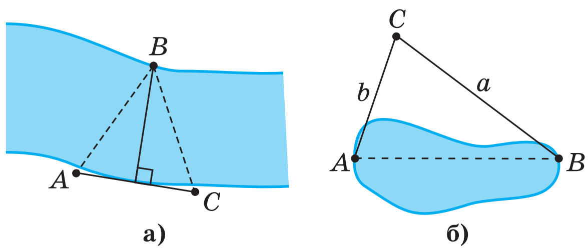
2. Щоб визначити відстань між доступною точкою C і недоступною точкою A (мал. 1.41), вибрали другу доступну точку B. Знайдіть AC, якщо $CB = 100$ м, $\angle C = 82°$, $\angle B = 61°$.

3. Визначте ширину річки при таких даних геодезичних вимірів: $\angle A = 85°$, $\angle C = 81°$, $AC = 490$ м (мал. 1.42-а).

4. Визначте довжину озера (мал. 1.42-б) за такими даними: $\angle C = 48°$, $b = 56{,}7$ м, $a = 129$ м.



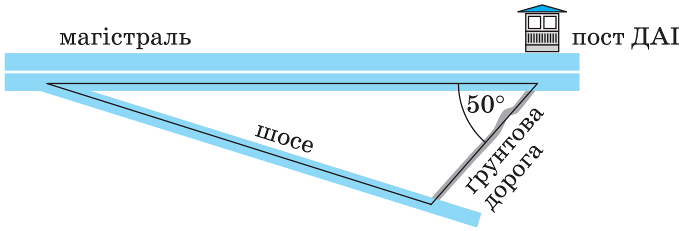
Мал. 1.41



Мал. 1.42

5*. Три дороги утворюють трикутник ABC: AB – шосе, AC і CB – ґрунтові дороги. По шосе можна їхати вдвічі швидше, ніж ґрунтовою дорогою. Автомобіліст хоче швидше дістатися з пункту A до пункту C. Який маршрут краще вибрати автомобілісту – навпростець чи в об'їзд, якщо: **а)** $\angle CAB = 20°$, $\angle ABC = 120°$; **б)** $\angle ACB = 60°$, $\angle CAB = 45°$?

6*. О 12-00 порушник з'їхав з основної магістралі і помчав по шосе зі швидкістю 140 км/год. У цей самий час інспектор ДАІ отримав повідомлення і поїхав ґрунтовою дорогою зі швидкістю 70 км/год напереріз порушнику. В якому випадку інспектор встигне зупинити порушника на перехресті (мал. 1.43)?



Мал. 1.43

7*. До одної точки прикладені три сили: $F_1 = 10$ Н, $F_2 = 10$ Н, $F_3 = 20$ Н. Сили F_1 і F_2 прикладені під кутом 120°, а сили F_2 і F_3 – під кутом 90°. Визначте значення рівнодійної сили.

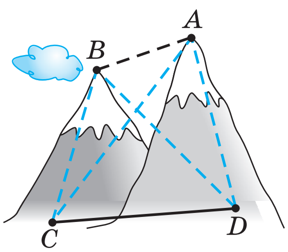
8. У трикутнику ABC проти кутів A, B і C лежать сторони a, b, c відповідно. Висоти і медіани, проведені до цих сторін, позначено як h_a, h_b, h_c і m_a, m_b, m_c відповідно; бісектриси кутів – l_a, l_b, l_c. Знайдіть невідомі сторони і кути трикутника, якщо:

а) $\angle A = 58°$, $\angle B = 73°$, $b - c = 12$ см;
б) $\angle A = 81°$, $\angle B = 68°$, $a + c = 63{,}4$ см;
в) $\angle A = 36°$, $\angle B = 60°$, $a + b + c = 94$ см;
г) $h_a = h_b = 4$ см, $h_c = 6$ см;
д) $\angle B = 48°$, $\angle C = 68°$, $h_a = 32$ см;
е) $m_c = 11$ см, $a = 9$ см, $b = 19$ см;
є) $m_c = 8$ см, $c = 18$ см, $b = 13$ см;
ж) $m_a = 17$ см, $a = 24$ см, $h_a = 15$ см;
з) $h_a = 12$ см, $h_b = 15$ см, $h_c = 18$ см;
и) $\angle A = 38°$, $\angle B = 63°$, $l_c = 15{,}6$ см;
і) $h_a = 24$ см, $h_b = 20$ см, $a = 24$ см;
ї) $a - b = 2$ см, $a - c = 5$ см, $\angle B = 60°$.

9*. Довжина хвилинної стрілки годинника дорівнює 60 мм, а годинної – 54 мм. Через який час пополудні відстань між кінцями стрілок уперше дорівнюватиме 90 мм?

10*. Щоб знайти відстань між двома недоступними точками A і B (мал. 1.44), вибрали дві доступні точки C і D. Знайдіть AB за такими вимірами: $CD = 920$ м, $\angle ADC = 81°$, $\angle BDC = 62°$, $\angle DCB = 88°$, $\angle ACB = 32°$.

11*. Сторони трикутника дорівнюють 1 см і 2 см, а кут між ними – 60°. Через центр вписаного у цей трикутник круга і кінці третьої сторони проведено коло. Знайдіть радіус цього кола.



Мал. 1.44

Для допитливих

1. Доведіть таку теорему.

Теорема. **Для кутів A, B, C і бісектрис l_A, l_B, l_C трикутника ABC нерівності $A \leqslant B \leqslant C$ і $l_A \geqslant l_B \geqslant l_C$ рівносильні.**

Порада. Доведіть, що *з вершини меншого кута виходить більша бісектриса і навпаки*.

2. Дано довжини сторін трикутника ABC. Знайдіть довжини бісектрис цього трикутника.

12*. У трикутнику ABC відомо, що $AC = b$ і $\angle ABC = \beta$. Знайдіть радіус кола, що проходить через вершини A і C та центр вписаного в трикутник кола.

13. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 13 см, 14 см, 15 см.

14.** Висоти трикутника перетинаються в точці H. Доведіть, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників ABC, ABH, BCH і ACH, рівні між собою.

15.** У гострокутному трикутнику ABC відомо, що $AB = 2$ см, $AC = 5$ см, $BC = 6$ см. Знайдіть з точністю до сотих відстань від вершини B до ортоцентра трикутника (точки перетину його висот).

16.** У гострокутному трикутнику ABC провели висоти AP і CH. Площа трикутника ABC дорівнює 18 см^2, площа трикутника BPH – 2 см^2, а $PH = 2\sqrt{2}$ см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC.

17.** Через вершини A і B трикутника ABC проходить коло, радіус якого дорівнює r, яке перетинає сторону BC у точці D. Знайдіть радіус кола, що проходить через точки A, C і D, якщо $AB = c$ і $AC = b$.

18.** Продовження висот AM і CN гострокутного трикутника ABC перетинають описане навколо цього трикутника коло в точках P і Q відповідно. Знайдіть радіус вказаного кола, якщо $AC = a$, $PQ = 1{,}2\,a$.

19.** У прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута дорівнює 18 см і утворює з медіаною, проведеною до гіпотенузи, кут 10°. Знайдіть гіпотенузу.

20.** У трикутник вписано три однакові кола так, що кожне з них дотикається до двох сторін трикутника і всі три кола мають одну спільну точку. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо радіуси вписаного та описаного кіл трикутника дорівнюють r і R.

21.** Знайдіть радіус описаного навколо трикутника ABC кола, якщо: $AB = 20$, $AC = 24$; через вершину C, інцентр трикутника і точку перетину бісектриси кута A з BC можна провести коло, центр якого належить AC.

22.** Доведіть, що для кутів A, B, C довільного трикутника виконується співвідношення:

а) $\cos^2 A = \cos^2 C + \sin^2 B - 2\sin A \sin B \cos C$;

б) $\sin C = \sin A \cos B + \cos A \sin B$;

в) $\sin B \sin C = \cos B \cos C + \cos A$;

г) $\dfrac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \dfrac{\cos A + \cos B}{1 - \cos C}$.

23.** Доведіть, що $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, де α і β – кути, сума яких не перевищує 180°.

Для допитливих

1. За допомогою теореми синусів доведіть відомий факт, що бісектриса трикутника ділить сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам.

2. Пряма, що проходить через вершину прямого кута трикутника, утворює з меншим катетом кут 30° і перетинає гіпотенузу в точці, яка поділяє її у відношенні 1 : 2. Знайдіть довжину гіпотенузи, якщо довжина меншого катета дорівнює $\sqrt{3}$.

3. Побудуйте прямокутний трикутник за його гіпотенузою і бісектрисою гострого кута.

4. Побудуйте трикутник за стороною, протилежним кутом і бісектрисою цього кута (задача Паппа).

5. Побудуйте трикутник ABC за:

а) $\angle A$, m_a, l_a; **б)** $\angle A$, l_a, $2p$; **в)** h_a, h_b, l_c; **г)** h_a, m_a, l_a.

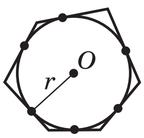
§ 8. Площа трикутника і чотирикутника

Вам уже відомі певні формули для обчислення площ трикутника, паралелограма і трапеції. У цьому параграфі ми їх повторимо і доведемо ще кілька формул для обчислення площ фігур.

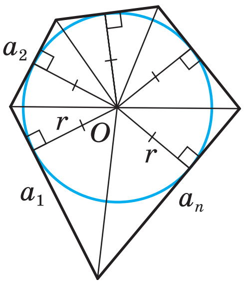
ПЛОЩА ОПИСАНОГО БАГАТОКУТНИКА

Площу описаного багатокутника S **можна обчислити, знаючи його півпериметр** p **і радіус** r **вписаного кола:** $S = p \cdot r$.

Описаний багатокутник



$S = p \cdot r$,
де p – півпериметр



Мал. 1.45

Для доведення цієї формули треба сполучити центр O вписаного у багатокутник кола з вершинами цього багатокутника (мал. 1.45). В утворених трикутниках радіуси кола, проведені в точки дотику, є висотами. Площа багатокутника дорівнює сумі площ цих трикутників:

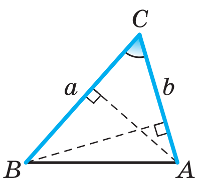
$$S = \frac{1}{2}a_1 \cdot r + \frac{1}{2}a_2 \cdot r + \ldots + \frac{1}{2}a_n \cdot r = p \cdot r.$$

ПЛОЩА ТРИКУТНИКА

Для обчислення площі трикутника ви знаєте такі формули:

$$S = \frac{1}{2}ah_a,\ S = pr,\ S = \frac{1}{2}ab\sin C \text{ і } S = \frac{abc}{4R},$$

де: p – півпериметр трикутника; r і R – радіуси його вписаного й описаного кіл; a і b – довжини двох його сторін, а $\angle C$ – кут між цими сторонами; h_a – довжина висоти, проведеної до сторони a.



$S_\triangle = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b$;
$h_a : h_b = b : a$;
$S_\triangle = pr$;
$S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin C$

Доведемо ще кілька корисних формул для обчислення площі трикутника:

(1) $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$,

(2) $S = \dfrac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A}$,

(3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ – *формула Герона*,

де a, b і c – довжини сторін трикутника; A, B і C – міри його відповідних кутів (мал. 1.46); $p = \dfrac{(a+b+c)}{2}$; R – радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

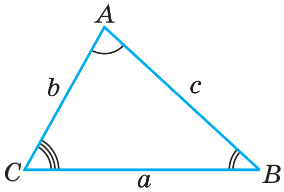
Для допитливих

Чи існує трикутник зі сторонами 8 см і 3 см та висотою, проведеною до третьої сторони цього трикутника, що дорівнює середньому геометричному двох інших висот?

Доведення

1. За розширеною теоремою синусів $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$. Тоді

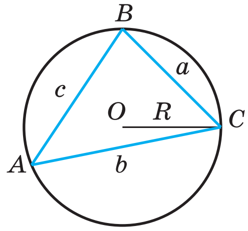
$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$



Мал. 1.46

2. Після підстановки у формулу (1) значення $R = \dfrac{a}{2\sin A}$ отримаємо:

$$S = 2\frac{a^2}{4\sin^2 A}\sin A \sin B \sin C = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A}.$$



$S_\triangle =$
$= 2R^2 \sin A \sin B \sin C$,

$$S_\triangle = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A}$$

3. Перш ніж перейти до доведення *формули Герона*, зауважимо, що

$$\frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{2p-2c}{2} = p-c;$$

аналогічно $\dfrac{b+c-a}{2} = p-a$ і $\dfrac{c+a-b}{2} = p-b$.

Доведемо формулу (3). З теореми косинусів маємо, що

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Знайдемо $\sin C$ з основної тригонометричної тотожності, враховуючи, що значення синуса кута від $0°$ до $180°$ є величиною невід'ємною:

$$\sin C = |\sin C| = \sqrt{1-\cos^2 C} = \sqrt{(1-\cos C)(1+\cos C)}.$$

Розглянемо перетворення кожного з підкореневих множників окремо:

$$1-\cos C = 1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{c^2-a^2-b^2+2ab}{2ab} = \frac{c^2-(a-b)^2}{2ab} =$$

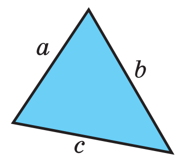
$$= \frac{(c-a+b)(c+a-b)}{2ab} = \frac{2(p-a)(p-b)}{ab};$$

$$1+\cos C = 1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{(a+b)^2-c^2}{2ab} = \frac{2p(p-c)}{ab}.$$

Тоді

$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\text{і } S = \frac{1}{2}ab\sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



Формула Герона

$S_\triangle$
$\|$
$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

$p = (a+b+c) : 2$

Для допитливих

1. Дано трикутник ABC. Знайдіть геометричне місце таких точок M, щоб трикутник ABM був рівновеликий трикутнику ABC.

2. Три висоти трикутника менші за одиницю. Чи може його площа бути більшою за 10 квадратних одиниць?

3. Серед усіх рівнобедрених трикутників, описаних навколо даного кола, знайдіть такий, що має найменшу площу.

Зауваження. Формулу Герона легко довести, скориставшись властивостями зовнівписаного кола трикутника. Зробіть це самостійно, скориставшись наступною теоремою (або зазирніть на с. 63).

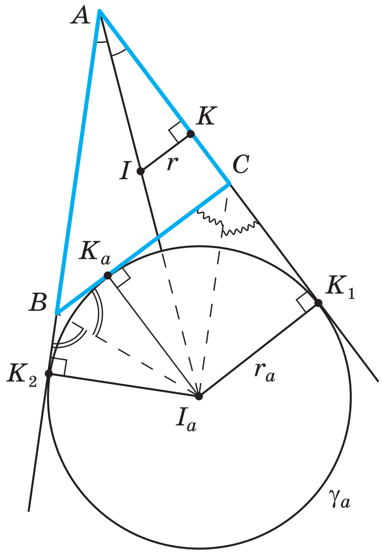
Теорема. **Площу трикутника ABC можна обчислити за формулою**

$$S = (p - a)r_a,$$

де r_a — радіус зовнівписаного кола γ_a, яке дотикається до сторони a трикутника ABC, p — півпериметр цього трикутника.

Доведення

Нехай I і I_a – центри вписаного і зовнівписаного кіл трикутника ABC відповідно; K і K_1 – точки дотику цих кіл до (AC); K_a і K_2 – точки дотику γ_a до (CB) і (AB) (мал. 1.47).



Мал. 1.47

1) За опорною задачею (див. форзац) $AK = p - a$.
2) За властивістю дотичних до кола, проведених з однієї точки:

$$AK_1 = AK_2;\ CK_1 = CK_a;\ BK_a = BK_2.$$

Тоді $AK_1 + AK_2 = AC + CK_a + AB + BK_a = 2p$ і $AK_1 = AK_2 = p$.
3) Із трикутників AKI і AK_1I_a маємо:

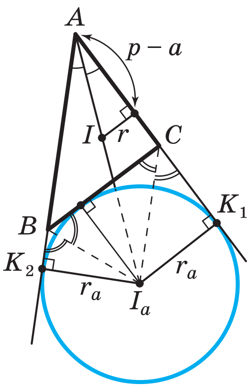
$$r = (p-a)\cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2} \ \text{ і } \ r_a = p\cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Звідси: $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} = \frac{r_a}{p}$ і $r = \frac{(p-a)r_a}{p}$.

4) Врахуємо, що $S = pr$. Тоді $S = p\frac{(p-a)r_a}{p} = (p-a)r_a$.

Теорему доведено.

Зовнівписане коло



Центр I_a рівновіддалений від $[BC]$, (AB) і (AC).

$$AK_1 = AK_2 = p$$

$$r_a = p\cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

$$r_a = \frac{S}{p-a}$$

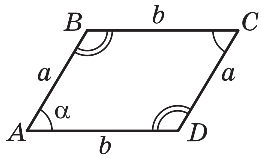
$$\frac{r_a}{r} = \frac{p}{p-a}$$

$$S_{ABC} = (p-a)r_a$$

ПЛОЩА ЧОТИРИКУТНИКА

Як відомо, діагональ паралелограма ділить його на два рівні трикутники. Тоді з того, що площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін на синус кута між ними, маємо:

площа паралелограма дорівнює добутку двох його суміжних сторін на синус кута між ними.



Мал. 1.48

Наприклад, площа паралелограма, зображеного на малюнку 1.48, дорівнює $S = ab\sin A = ab\sin B$.

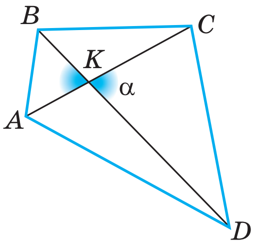
Зауважимо, що за властивістю паралелограма $\angle A + \angle B = 180^\circ$ і $\sin B = \sin(180^\circ - A) = \sin A$.

Теорема. **Якщо d_1 і d_2 – діагоналі довільного чотирикутника, а α – кут між ними, то площа цього чотирикутника дорівнює**

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha.$$

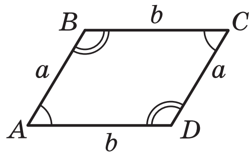
Доведення

Розглянемо чотирикутник $ABCD$ (мал. 1.49). Діагоналі AC і BD поділяють його на чотири частини – трикутники ABK, BKC, CKD і AKD. Тоді площа цього чотирикутника дорівнює сумі площ указаних трикутників.



Мал. 1.49

$ABCD$ – ПАРАЛЕЛОГРАМ



$S = ab\sin A$
$\parallel$
$ab\sin B$

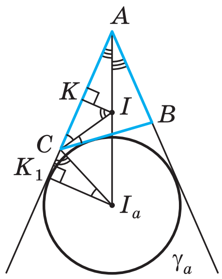
$S = a \cdot h_a$
$\parallel$
$b \cdot h_b$

Для допитливих

ДОВЕДЕННЯ ФОРМУЛИ ГЕРОНА

На малюнку зображено зовнівписане коло γ_a трикутника ABC, I_a – центр цього кола, I – інцентр трикутника ABC, K і K_1 – точки дотику вписаного і зовнівписаного кіл трикутника ABC до (AC).

$$\angle K_1CI_a = \frac{180^\circ - \angle C}{2} = \angle KIC. \text{ Тоді } \triangle I_aK_1C \sim \triangle CKI.$$



З подібності трикутників CKI і I_aK_1C випливає:

$\frac{CK}{KI} = \frac{K_1I_a}{CK_1}$, тобто $\frac{(p-c)}{r} = \frac{r_a}{p-b}$ і $rr_a = (p-b)(p-c)$.

Запишемо такі три рівності:

$$S = pr,\ S = (p-a)r_a,\ rr_a = (p-b)(p-c).$$

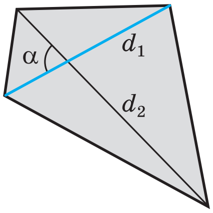
Перемножимо перші дві з них і врахуємо третю:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

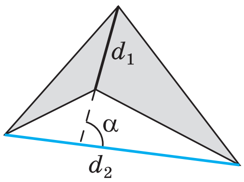
маємо *формулу Герона* $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Доведіть, що площу трикутника ABC можна обчислити за формулою

$$S = \sqrt{rr_ar_br_c}.$$



$$S=\frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$$



$$S=\frac{1}{2}AK\cdot BK\sin\alpha+\frac{1}{2}BK\cdot KC\sin(180^\circ-\alpha)+$$

$$+\frac{1}{2}KC\cdot KD\sin\alpha+\frac{1}{2}KD\cdot AK\sin(180^\circ-\alpha).$$

Врахуємо, що $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$ і винесемо спільні множники:

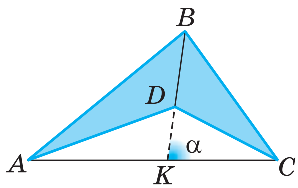
$$S=\frac{1}{2}BK\cdot(AK+KC)\sin\alpha+\frac{1}{2}KD\cdot(KC+AK)\sin\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}(AK+KC)(BK+KD)\sin\alpha=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha.$$

Теорему доведено.

Зауваження. Виведена формула справедлива для будь-якого чотирикутника – як опуклого, так і неопуклого (мал. 1.50).

Доведення цієї формули для неопуклого чотирикутника пропонуємо провести самостійно.



Мал. 1.50

Завдання 9

1°. Знайдіть площу трикутника, якщо дві сторони і кут між ними дорівнюють відповідно:

а) 2 см, 3 см і 30°; **б)** 5 см, 4 см і 150°; **в)** $2\sqrt{3}$ мм, 6 мм і 60°; **г)** 4 дм, 2 дм і 135°.

2°. Обчисліть площу паралелограма, якщо суміжні сторони паралелограма і кут між ними дорівнюють відповідно:

а) 6 см, 7 см і 150°; **б)** $2\sqrt{3}$ мм, 4 мм і 60°.

3°. Обчисліть площу паралелограма, якщо діагональ і сторона паралелограма та кут між ними дорівнюють відповідно:

а) 6 см, 8 см і 30°; **б)** $2\sqrt{3}$ мм, 8 мм і 60°.

4. Катети прямокутного трикутника відносяться як 3 : 4, а гіпотенуза дорівнює 45 см. Обчисліть площу трикутника.

Для допитливих

1. Доведіть, що площу гострокутного трикутника можна обчислити за формулою $S=r\cdot p_H$, де r – радіус кола, вписаного у цей трикутник, а p_H – півпериметр *ортоцентричного* трикутника (трикутника, що має за вершини основи висот заданого трикутника).

Порада. Скористайтеся зовнівписаним колом заданого трикутника.

2. Доведіть, що точка дотику зовнівписаного кола трикутника до сторони цього трикутника, середина висоти, проведеної до цієї сторони, та інцентр лежать на одній прямій.

3. Побудуйте трикутник, якщо дано три точки, які є центрами зовнівписаних кіл цього трикутника.

4. Побудуйте трикутник, якщо дано радіуси його зовнівписаних кіл.

5. Побудуйте трикутник за: стороною; радіусом зовнівписаного кола, що дотикається до заданої сторони; бісектрисою кута, прилеглого до цієї сторони.

5. Знайдіть площу трикутника, якщо його сторона дорівнює a, а прилеглі кути: **а)** 30° і 45°; **б)** 45° і 60°.

6°. Обчисліть площу трикутника, якщо сторони його дорівнюють:
а) 13 см, 14 см, 15 см; **в)** 9 см, 10 см, 17 см;
б) 4 см, 13 см, 15 см; **г)** 13 см, 20 см, 21 см.

7. Знайдіть радіуси вписаного та описаного кіл трикутника, якщо сторони його дорівнюють: **а)** 13 см, 14 см, 15 см; **б)** 4 см, 13 см, 15 см; **в)** 9 см, 10 см, 17 см; **г)** 13 см, 20 см, 21 см.

8*. Вписане в трикутник ABC коло дотикається до його сторін у точках D, E, F. Знайдіть площу трикутника DEF, якщо сторони трикутника ABC дорівнюють 6 см, 8 см, 10 см.

9*. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, у якого бісектриса кута при основі ділить: **а)** висоту, проведену до основи, на відрізки 15 см і 9 см; **б)** бічну сторону – на відрізки 25 см і 30 см, починаючи від вершини.

10*. Висота, опущена на бічну сторону рівнобедреного трикутника, дорівнює 24 см. Обчисліть площу трикутника, якщо: **а)** висота, опущена на основу трикутника, дорівнює 20 см; **б)** бічна сторона відноситься до основи як $5:6$.

11*. Гіпотенуза прямокутного трикутника відноситься до одного з катетів як $5:4$. Обчисліть площі частин трикутника, на які він поділяється висотою, опущеною на гіпотенузу, якщо: **а)** висота, опущена на гіпотенузу, ділить її на відрізки, різниця яких дорівнює 7 см; **б)** бісектриса прямого кута трикутника ділить гіпотенузу на відрізки, різниця яких дорівнює 5 см; **в)** бісектриса гострого кута трикутника ділить катет на відрізки, різниця яких 2 см.

12.** Інцентр прямокутного трикутника віддалений від вершин гострих кутів на $\sqrt{5}$ см і $\sqrt{10}$ см. Знайдіть площу трикутника.

13.** У трикутнику ABC: $AB = 112$ см, $AC = 108$ см. На AB взято таку точку M, що $AM = 84$ см. Через M проведено прямі, які поділили трикутник на частини, площі яких (рахуючи від вершини A) відносяться як $1:2:3:4:5$. На які частини ці прямі поділяють сторону AC?

14*. На сторонах трикутника ABC взято такі точки D, E, F, що $AD : DB = BE : EC = CF : FA = 1 : 2$. Як відносяться між собою площі трикутників ABC і DEF?

15*. Сторони трикутника ABC продовжено так, що $AB = BA_1$, $BC = CB_1$, $CA = CA_1$. Як відносяться площі трикутників ABC і $A_1B_1C_1$?

16*. Точка O – центр кола, вписаного в трикутник ABC, сторони якого дорівнюють 15 см, 28 см, 41 см. Знайдіть площі трикутників ABO, ACO, BCO.

17.** Точка дотику, вписаного у прямокутний трикутник кола, ділить його гіпотенузу на відрізки, що дорівнюють m і n. Знайдіть площу трикутника.

18.** Вписане в трикутник ABC коло, радіус якого дорівнює r, дотикається до його сторін у точках D, E, F, причому $AD = AE = m$, $BD = BF = n$, $CE = CF = t$. Доведіть, що площа трикутника $S = \dfrac{mnt}{r}$.

19.** Медіана, проведена з вершини прямого кута трикутника, дорівнює 20 см. Серединний перпендикуляр до цієї медіани перетинає більший катет у точці, віддаленій від медіани на 7,5 см. Знайдіть площу трикутника.

20*. Найбільша медіана прямокутного трикутника дорівнює m і нахилена до більшого катета під кутом 15°. Знайдіть площу трикутника.

21*. Через точку M на стороні AB трикутника ABC проведіть пряму, яка поділяє трикутник на дві рівновеликі частини.

Для допитливих

Дві вершини трикутника ABC лежать у точках $A(2;\ 2)$ та $B(2;\ 0)$, а третя вершина $C(x;\ y)$ – на прямій $x = 5$. Знайдіть площу трикутника ABC і координати вершини C.

22*. Через точку M на стороні AC трикутника ABC проведіть дві прямі, які поділяють трикутник на три рівновеликі частини.

23*. Обчисліть площу трапеції, якщо: **а)** її основи дорівнюють 8 см і 26 см, а кути при більшій основі – 30° і 60°; **б)** основи дорівнюють 7 см і 55 см, а бічні сторони – 29 см і 35 см; **в)** висота трапеції дорівнює 18 см, а діагоналі – 30 см і 82 см; **г)** основи дорівнюють 10 см і 42 см, а кути при меншій основі – 105° і 165°.

24*. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює a, кут при більшій основі – 60°. Діагональ є бісектрисою гострого кута. Знайдіть площу трапеції.

25*. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, якщо її діагональ має довжину d і утворює з більшою основою кут α.

26*. Три менші сторони прямокутної трапеції дорівнюють 8 см, 8 см і 10 см. Знайдіть її площу.

27*. Центр кола, вписаного у прямокутну трапецію, віддалений від кінців однієї з її бічних сторін на 3 см і 9 см. Знайдіть площу трапеції.

28*. Бічні сторони і висота трапеції дорівнюють 25 см, 30 см і 24 см відповідно. Обчисліть площу трапеції, якщо: **а)** бісектриси гострих кутів трапеції перетинаються на меншій основі; **б)** бісектриси тупих кутів трапеції перетинаються на більшій основі.

29. Обчисліть площу трапеції, описаної навколо кола, якщо: **а)** трапеція прямокутна, її найменша сторона дорівнює 6 см, а гострий кут – 30°; **б)** трапеція рівнобічна, гострий кут становить 60°, а радіус вписаного кола – 4 см.

30. Навколо кола з радіусом 12 см описана рівнобічна трапеція. Її бічна сторона ділиться точкою дотику у відношенні 4 : 9. Знайдіть площу трапеції.

31. Площа рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 200 см^2, а її висота – половині бічної сторони. Знайдіть радіус даного кола.

32. Площа рівнобічної трапеції дорівнює 20 см^2, а радіус кола, вписаного в цю трапецію, дорівнює 2 см. Знайдіть усі сторони трапеції.

33*. Обчисліть площу трапеції, якщо радіус вписаного в неї кола дорівнює 5 см, а радіус описаного кола – 6 см.

34.** Радіус кола, вписаного в рівнобічну трапецію, дорівнює R, відстань між точками дотику цього кола до бічних сторін трапеції дорівнює 8 см. Знайдіть площу трапеції.

35.** Довжина меншої основи трапеції дорівнює 70 см, центр вписаного у трапецію кола віддалений від кінців цієї основи на 65 см і 75 см. Знайдіть площу трапеції.

36.** Основи трапеції дорівнюють 89 см і 142 см, а діагоналі – 120 см і 153 см. Знайдіть площу трапеції.

37.** Прямі, що містять бічні сторони AB і CD рівнобічної трапеції $ABCD$, перетинаються під прямим кутом. Площа трапеції дорівнює 12 см^2, а її висота – 2 см. Знайдіть усі сторони трапеції.

38.** Основи трапеції дорівнюють a і b. Знайдіть довжину відрізка, паралельного основам трапеції, який поділяє її на дві рівновеликі частини.

39.** Доведіть, що площа трапеції дорівнює добутку однієї з її бічних сторін на відстань від середини її другої бічної сторони до першої.

40.** Через середину діагоналі BD опуклого чотирикутника $ABCD$ проведено пряму, паралельну діагоналі AC. Ця пряма перетинає сторону AD у точці E. Доведіть, що відрізок CE поділяє чотирикутник на рівновеликі фігури.

Для допитливих

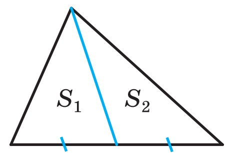
На шахівниці розставили 15 фігур так, що в кожному горизонтальному рядку і кожному вертикальному рядку стоїть хоча б одна фігура. Доведіть, що із шахівниці можна забрати одну фігуру так, що всі інші знову задовольнятимуть сформульоване вище правило.

§ 9. Метод площ у теоремах і задачах

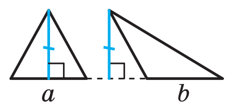
Поняття площі можна використовувати для доведення теорем і розв’язування задач. При цьому в умові таких задач необов’язково йдеться про площу. Тому можна говорити про *метод площ* у геометрії.

При застосуванні методу площ часто використовують відомі вам з 8-го класу факти про площу трикутників:

- **медіана трикутника поділяє його на два рівновеликі трикутники;**
- **якщо висоти трикутників рівні, то їхні площі відносяться як довжини сторін, до яких проведені ці висоти.**



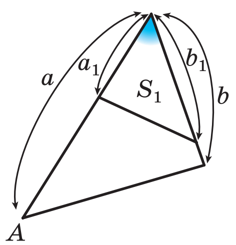
$S_1 = S_2$



$S_1 : S_2 = a : b$

З формули для обчислення площі трикутника, через синус одного з його кутів, випливає такий корисний **опорний факт**:

- **площі трикутників, що мають спільний кут, відносяться як добутки довжин сторін трикутників, що містять цей кут.**

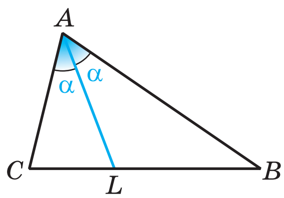


$$\frac{S_1}{S} = \frac{a_1 \cdot b_1}{a \cdot b}$$

Методом площ можна довести вже відому вам властивість бісектриси трикутника.

Теорема. **Якщо AL – бісектриса трикутника ABC, то $CL : LB = AC : AB$.**

Доведення



Мал. 1.51

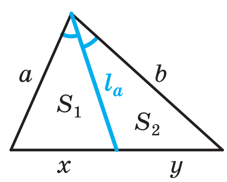
Нехай $\angle A = 2\alpha$ (мал. 1.51).

Трикутники ACL і ABL мають спільну висоту, проведену з вершини A. Тоді

$$CL : LB = S_{ACL} : S_{ABL} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} AC \cdot AL \sin\alpha\right) : \left(\frac{1}{2} AB \cdot AL \sin\alpha\right) = AC : AB.$$

Теорему доведено.



$$\frac{x}{y} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}$$

Розглянемо доведення (методом площ) теореми про точку перетину медіан трикутника.

Теорема. **Медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться цією точкою у відношенні 2 : 1, якщо рахувати від вершини трикутника.**

Нехай AD і BN – медіани трикутника ABC, які перетинаються в точці M (мал. 1.52). Треба довести, що:

(1) пряма CM ділить сторону AB навпіл;

(2) $AM : MD = 2 : 1$.

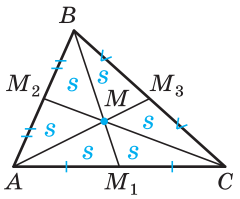
Доведення

Позначимо площі трикутників, на які медіани AD, BN і пряма CM поділяють трикутник ABC так, як зображено на малюнку 1.52.

1) MD і MN – медіани трикутників CMB і CMA, тоді $S_1 = S_2$ і $S_3 = S_4$.

2) AD і BN – медіани трикутника ABC, тоді

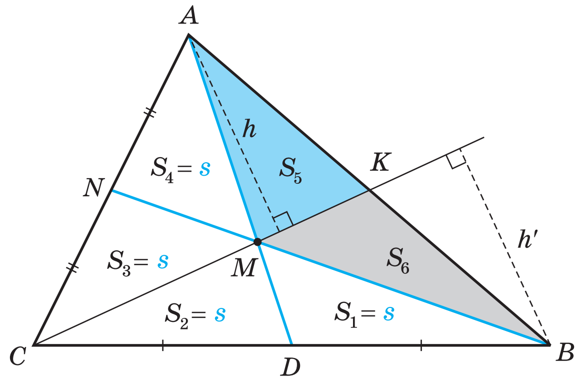
$$\begin{cases} S_2 + S_3 + S_4 = S_1 + S_6 + S_5, \\ S_1 + S_2 + S_3 = S_4 + S_5 + S_6. \end{cases}$$



$BM : MM_1 =$
$= CM : MM_2 =$
$= AM : MM_3 = 2 : 1$

Медіани трикутника ділять його на шість рівновеликих трикутників площею:

$$s = \frac{1}{6} S_{\triangle}$$



Мал. 1.52

Віднімемо від першої рівності другу:

$$S_4 - S_1 = S_1 - S_4 \text{ і } S_1 = S_4.$$

3) Маємо: $S_1 = S_2$, $S_3 = S_4$, $S_1 = S_4$. Звідси:

$$S_2 = S_1 = S_4 = S_3 \triangleq s.$$

4) CM – спільна сторона трикутників CMB і CMA, а $S_{CMB} = 2s = S_{CMA}$. Тоді відповідні висоти цих трикутників рівні: $h = h'$.

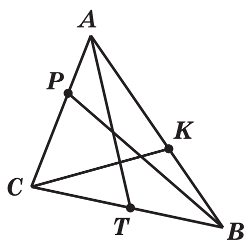
5) MK – спільна сторона трикутників AMK і BMK, а відповідні висоти цих трикутників рівні ($h = h'$). Тоді $S_{AMK} = S_{BMK}$, тобто $S_5 = S_6$.

6) Трикутники AMK і BMK мають спільну висоту, проведену зі спільної вершини M, а $S_{AMK} = S_{BMK}$. Тоді $AK = KB$. Твердження (1) теореми доведено.

7) Трикутники AMC і CMD мають спільну висоту, проведену з вершини C, а $S_{AMC} : S_{CMD} = 2s : s = 2 : 1$. Тоді $AM : MD = 2 : 1$. Твердження (2) теореми доведено.

Теорему доведено.

Методом площ можна довести корисну теорему, твердження якої сформулював і яку довів італійський математик **Джованні Чева** (1648–1734).

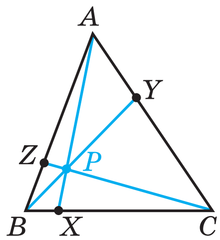


AT, BP, CK – чевіани.

Відрізок, який сполучає вершину трикутника з точкою на протилежній стороні цього трикутника, називають *чевіаною* (на честь Джованні Чеви).

Т Теорема Чеви. **На сторонах BC, AC і AB трикутника ABC взято точки X, Y і Z відповідно (мал. 1.53). Для того щоб чевіани AX, BY і CZ перетиналися в одній точці, необхідно і достатньо, щоб**

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1.$$



Мал. 1.53

Нагадаємо:
$\triangleq$ – «позначили як».

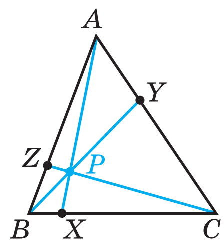
Доведення

I. НЕОБХІДНІСТЬ

Якщо чевіани AX, BY і CZ перетинаються в одній точці, то виконується співвідношення

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1.$$

Теорема Чеви



$$\downarrow\uparrow$$

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$$

$$\downarrow\uparrow$$

Чевіани AX, BY і CZ перетинаються в одній точці.

У трикутнику ABC (мал. 1.53):

$$BX:XC=S_{ABX}:S_{AXC}=S_{PBX}:S_{PXC}\triangleq t;$$

$$(S_{ABX}-S_{PBX})=t\cdot(S_{AXC}-S_{PXC}).$$

Маємо:

$$BX:XC=t=(S_{ABX}-S_{PBX}):(S_{AXC}-S_{PXC})=S_{ABP}:S_{CAP}.$$

Аналогічно $CY:YA=S_{BCP}:S_{ABP}$ і $AZ:ZB=S_{CAP}:S_{BCP}$.

Перемноживши почленно три здобуті рівності, дістанемо:

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=\frac{S_{ABP}}{S_{CAP}}\cdot\frac{S_{BCP}}{S_{ABP}}\cdot\frac{S_{CAP}}{S_{BCP}}=1.\ \text{Щ. в. д.}$$

II. ДОСТАТНІСТЬ

Якщо для чевіан AX, BY і CZ виконується співвідношення $\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$, то вони перетинаються в одній точці.

Нехай $AX\cap BY=P\notin CZ$. Проведемо через точку P чевіану CZ_1, $Z_1\not\equiv Z$. Тоді за доведеним:

$$\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ_1}{Z_1B}=1=\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}\ \text{і}\ \frac{AZ_1}{Z_1B}=\frac{AZ}{ZB},$$

тобто $Z_1\equiv Z$, що суперечить припущенню.

Теорему доведено.

Тригонометрична форма теореми Чеви:

$$\frac{\sin ACZ}{\sin ZCB}\cdot\frac{\sin BAX}{\sin XAC}\times$$

$$\times\frac{\sin CBY}{\sin YBA}=1$$

Н Наслідок. *Тригонометрична форма теореми Чеви.* **На сторонах BC, AC і AB трикутника ABC взято точки X, Y і Z відповідно. Для того щоб чевіани AX, BY і CZ перетиналися в одній точці, необхідно і достатньо, щоб**

$$\frac{\sin ACZ}{\sin ZCB}\cdot\frac{\sin BAX}{\sin XAC}\cdot\frac{\sin CBY}{\sin YBA}=1.$$

За теоремою синусів із трикутників ACZ і ZCB маємо:

$$\frac{AZ}{ZC}=\frac{\sin ACZ}{\sin A} \text{ і } \frac{CZ}{ZB}=\frac{\sin B}{\sin ZCB},$$

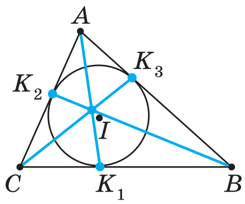
тобто

$$\frac{AZ}{ZB}=\frac{\sin ACZ}{\sin ZCB}\cdot\frac{\sin B}{\sin A}.$$

Аналогічно

$$\frac{BX}{XC}=\frac{\sin BAX}{\sin XAC}\cdot\frac{\sin C}{\sin B} \text{ і } \frac{CY}{YA}=\frac{\sin CBY}{\sin YBA}\cdot\frac{\sin A}{\sin C}.$$

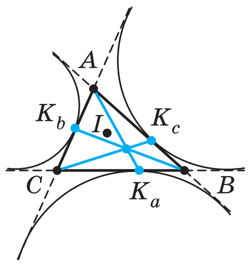
Для завершення доведення залишилося перемножити отримані рівності.



AK_1, BK_2, CK_3 – перетинаються в одній точці.

Н Наслідок. **Наслідками теореми Чеви є такі відомі теореми.**

1. **Медіани трикутника перетинаються в одній точці.**
2. **Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.**
3. **Висоти трикутника перетинаються в одній точці.**
4. **Прямі, які проходять через вершини трикутника і ділять його периметр навпіл, перетинаються в одній точці.**
5. **Прямі, які сполучають вершини трикутника з точками дотику до протилежних сторін трикутника вписаного в цей трикутник кола, перетинаються в одній точці.**
6. **Прямі, які сполучають вершини трикутника з точками дотику до протилежних сторін зовнівписаних кіл цього трикутника, перетинаються в одній точці.**

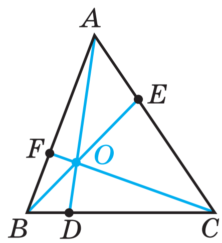


AK_a, BK_b, CK_c – перетинаються в одній точці.

Доведення вказаних наслідків пропонуємо провести **самостійно**.

Для допитливих

Французьким математиком **Жергоном** у 1818 р. була доведена така теорема.



Теорема Жергона. **Якщо прямі AD, BE, CF проходять через вершини A, B, C трикутника ABC і перетинаються в точці O всередині трикутника ABC, то виконуються співвідношення**

$$(1)\ \frac{OD}{AD}+\frac{OE}{BE}+\frac{OF}{CF}=1;\quad (2)\ \frac{AO}{AD}+\frac{BO}{BE}+\frac{CO}{CF}=2.$$

Доведення

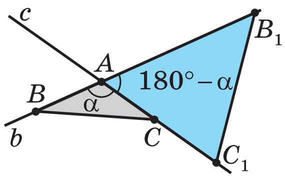
Площі трикутників AOC і ABC (див. мал.) відносяться як їхні висоти, а останні відносяться як OE до BE (якщо з точок B і O провести перпендикуляри до AC, отримаємо подібні трикутники). Тоді $\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}=\frac{OE}{BE}$. Аналогічно $\frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}=\frac{OD}{AD}$ і $\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{OF}{CF}$. Якщо додати отримані рівності, дістанемо:

$$\frac{OE}{BE}+\frac{OD}{AD}+\frac{OF}{CF}=\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1.$$

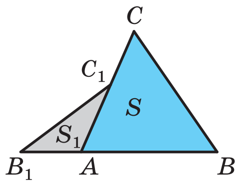
Опорна задача 1

Доведіть, якщо на двох прямих c і b, що перетинаються в точці A, позначити по дві точки C і C_1 та B і B_1 відповідно (мал. 1.54), **то**

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB_1C_1}}=\frac{AB\cdot AC}{AB_1\cdot AC_1}.$$



Мал. 1.54



$$\frac{S_1}{S}=\frac{AB_1\cdot AC_1}{AB\cdot AC}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB_1C_1}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\alpha}{\frac{1}{2}AB_1\cdot AC_1\sin(180^\circ-\alpha)}=\frac{AB\cdot AC\cancel{\sin\alpha}}{AB_1\cdot AC_1\cancel{\sin\alpha}}.$$

Опорна задача 2

Доведіть, що $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, кут α – гострий.

Дано: $\angle B = 2\alpha$.

Довести: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

---

1) $AB = BC = 1$, $BK \equiv l_B$ за побудовою (мал. 1.55). Тоді $BK \perp AC$ і

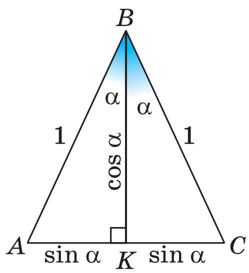
$AK = AB\sin\alpha = \sin\alpha$,

$BK = AB\cos\alpha = \cos\alpha$.

2) $S_{ABC} = S_{ABK} + S_{CBK}$. Звідси:

$$\frac{1}{2}\sin 2\alpha = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\right)$$

і $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

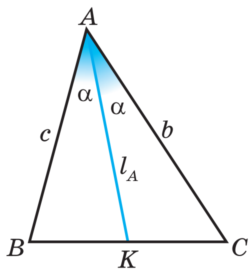


Мал. 1.55

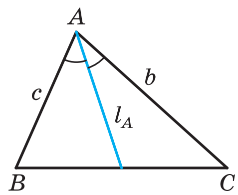
Опорна задача 3

Доведіть, що довжину бісектриси кута A трикутника ABC (мал. 1.56) **можна обчислити за формулою**

$$l_A=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$



Мал. 1.56



$$l_A=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c},$$

$$l_B=\frac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c},$$

$$l_C=\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

---

1) $S_{ABC} = S_{ABK} + S_{CAK}$, тобто

$$\frac{1}{2}cb\sin 2\alpha=\frac{1}{2}cl_A\sin\alpha+\frac{1}{2}bl_A\sin\alpha.$$

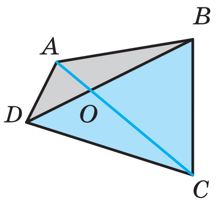
Для допитливих

1. Доведіть, що для будь-якого a існує трикутник зі сторонами $\sqrt{a^2-a+1}$, $\sqrt{a^2+a+1}$, $\sqrt{4a^2+3}$, площа якого не залежить від a. Знайдіть його площу.

2. Точки E і F – середини сторін BC і AD паралелограма $ABCD$. Знайдіть площу чотирикутника, утвореного прямими AE, ED, BF і FC, якщо площа паралелограма $ABCD$ дорівнює S.

2) Скористаємося формулою $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ (О.З.-2):

$$2cb\sin\alpha\cos\alpha = (c+b)l_A\sin\alpha, \text{ звідси } l_A = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

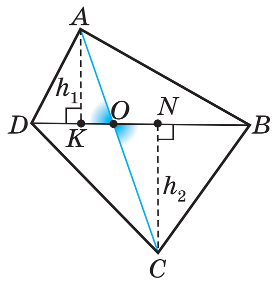


$AO : OC = S_{ABD} : S_{CBD}$

Опорна задача 4

Доведіть, що в довільному опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагональ AC ділиться точкою O перетину діагоналей у відношенні $AO : OC = S_{ABD} : S_{CBD}$ (мал. 1.57).

1) За побудовою: $AK \perp DB$, $CN \perp DB$; $AK \triangleq h_1$, $CN \triangleq h_2$.
2) $\angle AKO = 90° = \angle ONC$, $\angle AOK = \angle CON$ як вертикальні. Тоді $\triangle AOK \sim \triangle CON$ і $AO : OC = h_1 : h_2$.
3) BD – спільна сторона трикутників ABD і CBD. Тоді $S_{ABD} : S_{CBD} = h_1 : h_2 = AO : OC$.

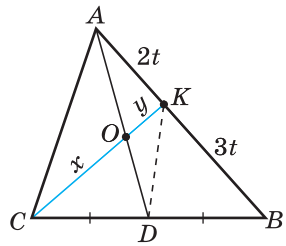


Мал. 1.57

Опорна задача 5

Точка K ділить сторону AB трикутника ABC у відношенні $AK : KB = 2 : 3$ (мал. 1.58). **У якому відношенні медіана AD ділить відрізок CK?**

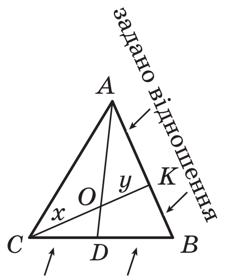
Дано: $AK : KB = 2 : 3$; $AD = m_a$.
Знайти: $CO : OK$.



Мал. 1.58

Позначимо площу трикутника ABC через S.

1) У чотирикутнику $AKDC$ за О.З.-4: $CO : OK = S_{ACD} : S_{AKD}$.
2) AD – медіана, тоді $S_{ACD} = S_{ADB} = \frac{1}{2}S$.
3) $AK : KB = 2 : 3$, тоді маємо:



задано відношення

$x : y$ – ?

Запишіть:
1) $x : y = S_{ACD} : S_{AKD}$.
2) $S_{ACD} : S_{ADB} = \ldots$.
3) $S_{ADK} : S_{KDB} = \ldots$.
4) Поділіть (2) на (3).

Для допитливих

Опорна задача. Знайдіть площу трикутника ABC за його висотами.

1) Площа трикутника ABC дорівнює:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c, \text{ тоді } \frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = k,\ c = \frac{a}{h_c}h_a = k\frac{h_b h_a}{h_c}.$$

2) Трикутник ABC подібний (з коефіцієнтом подібності k) до трикутника $A_1B_1C_1$, що має за сторони відрізки: $a_1 = h_b$, $b_1 = h_a$ і $c_1 = \frac{h_b h_a}{h_c}$.

3) Площу S_1 трикутника $A_1B_1C_1$ знайдемо за формулою Герона. Шукана площа трикутника $S = k^2 S_1$.

$$S_{ADK} : S_{KDB} = 2 : 3 \text{ і } S_{ADK} = \frac{2}{5} S_{ADB} = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}S\right) = \frac{1}{5}S.$$

4) $CO : OK = \frac{1}{2}S : \frac{1}{5}S = \frac{5}{2}.$

Відповідь: $CO : OK = 5 : 2$.

Усе досліджуй,
надай розуму
перше місце.

Піфагор
(VI ст. до н. е.)

Завдання 10

1*. Площа прямокутного трикутника в 4 рази менша від площі квадрата, побудованого на гіпотенузі. Знайдіть гострі кути трикутника.

2*. Доведіть, що в кожному трикутнику відношення периметра до однієї з його сторін дорівнює відношенню висоти трикутника, проведеної до цієї сторони, до радіуса вписаного кола.

3*. Доведіть, що в кожному трикутнику зі сторонами a, b, c і площею S виконується нерівність $ab + ac + bc > 6S$.

4.** Доведіть, що площа чотирикутника не більша за добуток півсум протилежних сторін чотирикутника.

5.** У трикутник вписано паралелограм із сторонами 3 см і 5 см та діагоналлю 6 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо діагоналі паралелограма паралельні двом його сторонам, а менша із сторін паралелограма лежить на третій стороні трикутника.

6.** Доведіть, що сума відстаней від довільної внутрішньої точки правильного трикутника до його сторін не залежить від її розміщення всередині трикутника.

7.** Доведіть, що сума відстаней від довільної точки основи рівнобедреного трикутника до його бічних сторін є величиною сталою для даного трикутника.

8.** Дано $\angle AOB = 120°$, OC – його бісектриса. Точка M міститься всередині кута AOC на відстані a, b, c від OA, OB, OC відповідно. Доведіть, що $b = a + c$.

9*. Два кола, центрами яких є точки O_1 і O_2, а радіуси дорівнюють 21 см і 35 см, перетинаються в точках A і B, причому $\angle O_1AO_2 = 120°$. Знайдіть AB.

10.** Діагоналі трапеції ділять її на чотири трикутники. Доведіть, що трикутники, прилеглі до бічних сторін, рівновеликі і їхня площа дорівнює середньому геометричному площ трикутників, прилеглих до основ трапеції.

11*. Площа квадрата, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, у 8 разів більша від площі трикутника. Знайдіть гострі кути трикутника.

12*. Якщо різниця двох сторін трикутника дорівнює різниці висот, проведених до цих сторін, то названі сторони лежать проти гострих кутів. Доведіть це.

13*. Кожна з двох висот трикутника не менша від обох сторін, до яких проведено ці висоти. Знайдіть кути трикутника.

14*. Кожна з двох висот трикутника поділяє його на дві рівновеликі частини. Визначте кути трикутника.

15*. Довжини катетів прямокутного трикутника дорівнюють 21 см і 28 см. Знайдіть радіус кола, з центром на гіпотенузі цього трикутника, що дотикається до катетів.

16*. Центр півкола, вписаного в прямокутний трикутник, лежить на гіпотенузі цього трикутника і ділить її на відрізки 30 см і 40 см. Знайдіть радіус півкола.

Для допитливих

1. Побудуйте трикутник за його трьома висотами.

Порада. Див. опорну задачу на с. 72.

2. Висоти одного трикутника дорівнюють відповідно висотам другого. Доведіть рівність цих трикутників.

3. Висоти одного трикутника відповідно пропорційні висотам другого. Доведіть подібність цих трикутників.

17.** Півколо, центр якого лежить на одній із сторін трикутника, дотикається до двох інших його сторін з довжинами a і b. Радіуси цього півкола, проведені в точки дотику, утворюють між собою кут α. Знайдіть відстань між точками дотику та радіус півкола.

18.** Точка O – центр кола, вписаного в трикутник ABC. Площі трикутників OAB, OBC і OAC дорівнюють 30 см², 52 см² і 74 см² відповідно. Знайдіть сторони трикутника ABC.

19.** Діагоналі трапеції ділять її на чотири трикутники. Площі трикутників, прилеглих до основ трапеції, дорівнюють p^2 і q^2. Доведіть, що площа трапеції дорівнює $(p+q)^2$.

20.** Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ при перетині в точці O поділяють його на чотири трикутники: AOB, BOC, COD, AOD. Доведіть, що $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}$.

21.** Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Доведіть, що трикутники AOB і COD рівновеликі тоді і тільки тоді, коли $BC \parallel AD$.

22.** Нехай K, L, M, N – середини сторін AB, BC, CD і DA опуклого чотирикутника $ABCD$ відповідно; відрізки KM і LN перетинаються в точці O. Доведіть, що $S_{AKON} + S_{CLOM} = S_{BKOL} + S_{DNOM}$.

23.** Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці P. Відомо площі трикутників ABP, BCP і CDP. Знайдіть площу трикутника ADP.

24.** Діагоналі опуклого чотирикутника поділяють його на чотири трикутники, площі яких виражено цілими числами. Доведіть, що добуток цих чисел є точним квадратом.

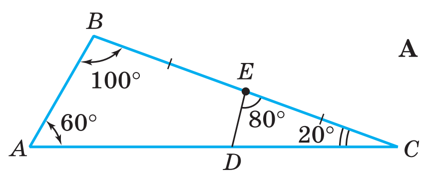
25.** Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці P. Причому $S^2_{ABP} + S^2_{CDP} = S^2_{BCP} + S^2_{ADP}$. Доведіть, що P – середина однієї з діагоналей.

26.** В опуклому чотирикутнику $ABCD$ позначили три внутрішні точки P_1, P_2 і P_3, що не належать одній прямій. Причому сума площ $\triangle ABP_n$ і $\triangle CDP_n$ дорівнює сумі площ $\triangle BCP_n$ і $\triangle ADP_n$ для кожного $n \in \{1; 2; 3\}$. Доведіть, що $ABCD$ – паралелограм.

Для допитливих

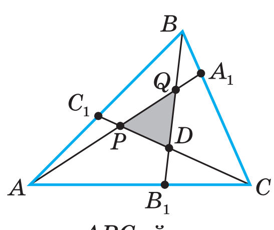
1. Знайдіть площу трикутника ABC за його медіанами m_a, m_b, m_c. (Див. с. 68.)

2. У трикутнику ABC точка E – середина сторони BC, точка D лежить на стороні AC; $AC = 1$; $\angle BAC = 60°$; $\angle ABC = 100°$; $\angle ACB = 20°$; $\angle DEC = 80°$ (мал. **А**). Знайдіть суму площі трикутника ABC і подвійної площі трикутника CDE.



А

3. У трикутник $T_a = \triangle A_1A_2A_3$ вписано трикутник $T_b = \triangle B_1B_2B_3$, а в трикутник T_b вписано трикутник $T_c = \triangle C_1C_2C_3$. Сторони трикутників T_a і T_b попарно паралельні. Знайдіть площу трикутника T_b, якщо площі трикутників T_a і T_c відомі.



Б

4. На сторонах трикутника ABC взято точки A_1, B_1 і C_1, при цьому $BA_1 : A_1C = p$, $CB_1 : B_1A = q$; $AC_1 : C_1B = t$. Точки перетину відрізків AA_1, BB_1 і CC_1 розміщено і позначено так, як показано на малюнку **Б**. Знайдіть відношення площ трикутників PQD і ABC.

5. Доведіть, що для довжин сторін a, b, c трикутника ABC, його площі S та радіусів r і R вписаного й описаного кіл трикутника виконується нерівність

$$\frac{9r}{2S} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqslant \frac{9R}{4S}.$$

§ 10. Метод координат як засіб розв'язування геометричних задач

Щоб проілюструвати ефективність застосування методу координат, розглянемо розв'язування трьох задач. У кожній із цих задач треба побудувати коло, що, з точки зору аналітичної геометрії, рівнозначне складанню рівняння шуканого кола або знаходженню його радіуса і координат центра.

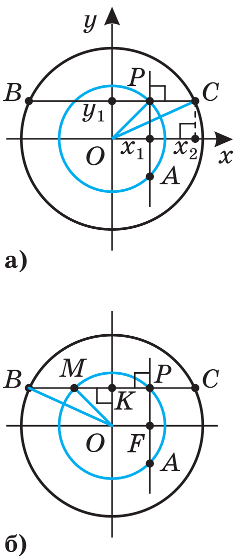
До кожної задачі наведемо розв'язання двома способами: перший – методом координат, другий – засобами елементарної геометрії.

Характерно, що розв'язування першим способом проводяться за загальним планом і схожі за ідеєю, а розв'язування другим способом мають мало спільних рис і ґрунтуються на застосуванні різних теорем.

Що саме ти не вивчав би, – ти навчаєшся для себе.

Гай Петроній

П р и к л а д 1. Через довільну точку P меншого з двох концентричних кіл, радіуси яких – R і r, провели пряму, яка перетинає більше коло в точках B і C. Перпендикуляр до (BC), проведений через точку P, перетинає менше коло в точці A. Знайдіть $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2$.



Мал. 1.59

Перший спосіб

Через центр O даних кіл проведемо осі $Ox \parallel BC$ і Oy (мал. 1.59-а). В обраній системі координат маємо: $P(x_1; y_1)$, $A(x_1; -y_1)$, $C(x_2; y_1)$, $B(-x_2; y_1)$.

Знайдемо шукану суму:

$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = (2y_1)^2 + (x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 = 2(x_1^2 + y_1^2) + 2(x_2^2 + y_1^2) = 2r^2 + 2R^2$.

Суть координатного методу – виразити залежності між елементами геометричної фігури за допомогою алгебраїчних співвідношень.

Другий спосіб

Проведемо через центр кіл прямі $FO \parallel BC$ і $OK \perp BC$ (мал. 1.59-б). Тоді маємо: $MK = KP$, $BK = KC$, $PF = FA$ і $PB = BK + KP$, $PC = BK - KP$, $OK^2 + KP^2 = r^2$, $OK^2 + BK^2 = R^2$.

Шукана сума дорівнює:

$$(BK + KP)^2 + (BK - KP)^2 + (2OK)^2 = 4OK^2 + 2BK^2 + 2KP^2 = 2(OK^2 + BK^2) + 2(OK^2 + KP^2) = 2r^2 + 2R^2.$$

П р и к л а д 2. Через точки $A(4; 1)$ і $B(11; 8)$ проведіть коло, яке дотикається до осі Ox.

Перший спосіб

Очевидно, що шукане коло лежить над віссю Ox. При цьому воно дотикається до осі Ox. Тоді ордината центра кола дорівнює його радіусу: $b = r$. Тому рівняння шуканого кола має вигляд:

$$(x - a)^2 + (y - r)^2 = r^2, \text{ або } (x - a)^2 + y^2 - 2ry = 0.$$

Підставляючи в це рівняння послідовно координати точок A і B, дістанемо рівності

$$(4 - a)^2 + 1 - 2r = 0, \quad (11 - a)^2 + 64 - 16r = 0.$$

Звідси: $a_1 = 7$; $a_2 = -1$; $b_1 = r_1 = 5$; $b_2 = r_2 = 13$.

Отже, існує два кола, що задовольняють умову задачі:

$$(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 25 \quad \text{і} \quad (x + 1)^2 + (y - 13)^2 = 169.$$

Розв'язування задач *координатним методом*:

1) будуємо прямокутну систему координат;

2) знаходимо координати точок;

3) визначаємо відстані між точками, складаємо рівняння прямих тощо;

4) аналізуємо отримані співвідношення.

Другий спосіб

Аналіз

Нехай пряма AB перетинає вісь Ox у точці C, а коло дотикається до цієї осі в точці D.

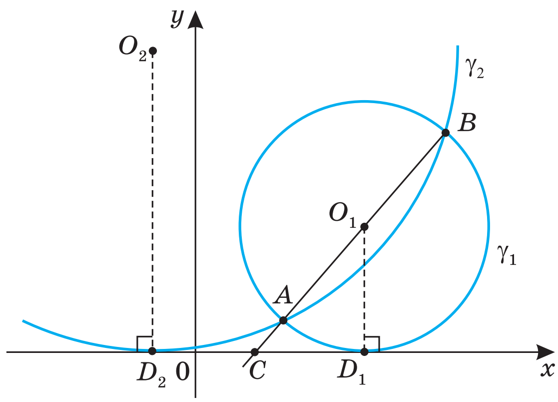
Довжина відрізка CD є середнім геометричним (пропорційним) відрізків січної CB та CA.

Шукане коло проходить через три точки: A, B і D.

План побудови

1. Проводимо пряму AB. Точку перетину її з віссю Ox позначимо через C (мал. 1.60).
2. Маємо відрізки CB і CA, будуємо відрізок $t = \sqrt{CB \cdot CA}$ (як середнє пропорційне).
3. Відкладаємо на осі Ox по різні боки від точки C відрізок t: маємо точки D_1 і D_2.
4. Будуємо два кола γ_1 і γ_2, кожне з яких проходить через три точки A, B, D_1 і B, A, D_2 відповідно.

Прямокутну систему координат можна вводити довільно – результат не залежить від вибору системи координат. Проте від вдалого її вибору залежить раціональність шляху розв'язування, швидкість і легкість одержання шуканого результату.



Мал. 1.60

Для допитливих

На прямій n дано три точки A, B і C, $B \in [AC]$. З одного боку від прямої n побудовано рівносторонні трикутники AMB і BNC. Доведіть, що середини відрізків MC і NA та точка B – вершини рівностороннього трикутника.

Порада. Оберіть точку B за початок координат, а пряму n – за вісь абсцис.

Доведення

Маємо за побудовою: $CD_1 = CD_2 = t = \sqrt{CB \cdot CA}$, кола γ_1 і γ_2 проходять через три точки A, B, D_1 і A, B, D_2 відповідно.

Довести: D_1 і D_2 – точки дотику кіл до осі Ox.

Завершити доведення пропонуємо самостійно.

Приклад 3. Дано дві взаємно перпендикулярні прямі та точка A, відстань від якої до однієї з цих прямих удвічі більша, ніж до іншої. Через точку A проведіть коло, яке дотикається до заданих прямих.

Перший спосіб

Спрямуємо осі Ox і Oy вздовж заданих прямих. Тоді: $A(2; 1)$; шукане коло лежить у першій чверті координатної площини; координати центра цього кола дорівнюють його радіусу: $a = b = r$. Тому рівняння шуканого кола має вигляд:

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2.$$

Підставивши в це рівняння координати точки A, дістанемо:

$$(2 - r)^2 + (1 - r)^2 = r^2, \text{ або } r^2 - 6r + 5 = 0.$$

Звідси: $r_1 = 1$; $r_2 = 5$. Отже, маємо два кола, які задовольняють умову задачі:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \quad \text{і} \quad (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

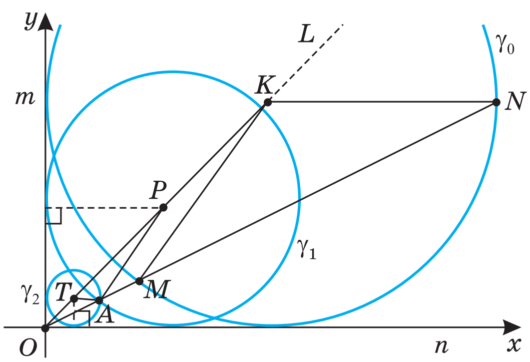
Другий спосіб

Аналіз

Якщо побудувати в першій чверті довільне коло, яке дотикається до осей Ox і Oy, то воно буде гомотетичним шуканому колу з центром гомотетії O.

План побудови

1. Будуємо довільне коло γ_0, дотичне до осей Ox і Oy (мал. 1.61) (його центр K лежить на бісектрисі OL координатного кута).



Мал. 1.61

Застосування координатного методу не потребує розгляду складних геометричних конфігурацій, виконання додаткових побудов і їх обґрунтування.

Координатний метод дозволяє алгоритмізувати розв'язування геометричних задач.

Кожна розв'язана мною задача ставала взірцем, який надалі слугував для розв'язування інших задач.

Рене Декарт, «Роздуми про метод»

2. Проводимо пряму OA – вона перетинає коло γ_0 в точках M і N.
3. Через точку A проводимо прямі паралельно прямим KN і KM – вони перетинають бісектрису OL у точках T і P відповідно.

Точки P і T – центри шуканих кіл γ_1 і γ_2, радіуси яких дорівнюють PA і TA відповідно.

Доведення

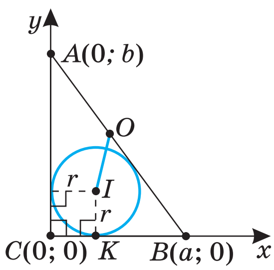
Маємо за побудовою: OL – бісектриса кута O; K – центр кола γ_0, яке дотикається до Ox і Oy; $AT \parallel KN$; $AP \parallel KM$; $r_1 = PA$; $r_2 = TA$.

Довести: кола γ_1 і γ_2 дотикаються до Ox і Oy.

Справедливість побудови випливає з теорем про подібність фігур. Пропонуємо доведення провести самостійно.

Опорна задача

Катети прямокутного трикутника дорівнюють *a* і *b*. Знайдіть відстань між центрами вписаного і описаного кіл цього трикутника.



Мал. 1.62

Як відомо, центром вписаного в трикутник кола є точка перетину його бісектрис I (інцентр), а центр описаного навколо прямокутного трикутника кола O збігається із серединою гіпотенузи. Тоді маємо таку задачу (мал. 1.62).

Дано: $\angle C = 90°$, $CB = a$, $AC = b$, $AO = OB$, I – інцентр.
Знайти: OI.

Розмістимо початок координат у точці C, а осі координат спрямуємо вздовж катетів трикутника. Тоді: $A(0; b)$, $B(a; 0)$, $C(0; 0)$, $I(r; r)$.

$O(x_O; y_O)$ – середина відрізка AB, тоді: $x_O = \dfrac{a}{2}$, $y_O = \dfrac{b}{2}$.

Враховуючи, що в прямокутному трикутнику $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ і $c = \sqrt{a^2 + b^2}$,

знайдемо відстань між точками $I(r; r)$ і $O(x_O; y_O)$:

$$OI^2 = (r - x_O)^2 + (r - y_O)^2 = 2r^2 - 2r(x_O + y_O) + x_O^2 + y_O^2 = 2r\,(r - x_O - y_O) + x_O^2 + y_O^2 =$$
$$= (a + b - c)\left(-\frac{c}{2}\right) + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = \frac{c^2}{2} + \frac{1}{4}(a^2 + b^2) - \frac{a+b}{2}c = \frac{3}{4}c^2 - \frac{a+b}{2}c.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{2}\sqrt{3(a^2 + b^2)^2 - 2(a+b)\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Для порівняння спробуйте розв'язати цю задачу без використання методу координат. (Якщо з точки I опустити перпендикуляр IK до CB, то він поділить катет на відрізки, довжини яких дорівнюють r і $a - r$. З прямо-

Для допитливих

Ви, безумовно, знаєте, що точка, яка рухається по площині і притому залишається рівновіддаленою від двох нерухомих точок A і B, описує пряму (серединний перпендикуляр до $[AB]$). А от яку криву опише точка, якщо відстань від неї до A буде в певне число разів перевищувати відстань до B? Виявляється, що це буде коло (*коло Аполлонія*). Спробуйте це довести. Якщо вам це не вдасться, скористайтеся додатком 1.

кутного трикутника IKB можна знайти IB та $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$. Тепер з $\triangle BOI$, за теоремою косинусів, можна отримати OI, якщо виразити $\cos\frac{B}{2}$ через $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$.)

Завдання 11

1. Доведіть методом координат, що середина гіпотенузи прямокутного трикутника рівновіддалена від усіх його вершин.

2*. Застосовуючи метод координат, доведіть теорему про середню лінію трикутника.

3*. Доведіть, що в трапеції: **а)** відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний основам і дорівнює піврізниці основ; **б)** сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів бічних сторін плюс подвоєний добуток основ.

4*. У ромб $ABCD$ з кутом 45° вписано коло, радіус якого дорівнює R. Доведіть, що для довільної точки кола M має місце рівність $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = \frac{5}{2}AB^2$.

5*. Площа прямокутника $ABCD$ дорівнює 48, а довжина його діагоналі – 10. На площині, в якій розміщено прямокутник, вибрано точку K так, що $KB = KD = 13$. Знайдіть відстань від точки K до найбільш віддаленої від неї вершини прямокутника.

6.** Доведіть, що в опуклому чотирикутнику: **а)** сума квадратів діагоналей дорівнює подвоєній сумі квадратів відрізків, що сполучають середини протилежних сторін; **б)** сума квадратів сторін дорівнює сумі квадратів його діагоналей плюс квадрат подвоєної відстані між серединами діагоналей.

7*. Доведіть, що суми квадратів відстаней від довільної точки площини до протилежних одна одній вершин прямокутника рівні між собою.

8°. Навколо кола одиничного радіуса описано квадрат $ABCD$. Доведіть, що відстані a, b, c і d від довільної точки кола до вершин квадрата пов'язані співвідношенням: **а)** $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12$; **б)** $a^2c^2 + b^2d^2 = 10$.

9.** У коло з центром O вписано чотирикутник $ABCD$ з перпендикулярними діагоналями, які перетинаються в точці P. Доведіть, що середини сторін AB і CD, точки O і P, є вершинами паралелограма.

10*. Знайдіть геометричне місце точок площини: **а)** сума відстаней від яких до двох заданих точок A і B є величиною сталою і дорівнює довжині відрізка AB; **б)** модуль різниці відстаней від яких до двох заданих точок A і B є величиною сталою і дорівнює довжині відрізка AB.

11*. Знайдіть (методом координат) геометричне місце точок, для кожної з яких відстані до двох заданих точок рівні.

12*. Знайдіть геометричне місце точок, сума квадратів відстаней від яких до двох даних точок є величиною сталою.

Для допитливих

У наступних задачах використано традиційні позначення елементів для трикутника ABC.

1. Доведіть, що серед усіх трикутників з фіксованими кутом A і площею S найменшу довжину сторони a має рівнобедрений трикутник з основою a.

2. Доведіть, що серед усіх трикутників з фіксованими кутом A і півпериметром p найбільшу площу має рівнобедрений трикутник з основою a.

Порада. Пригадайте опорні задачі зовнівписаного кола.

3. Розгляньте множину всіх гострокутних трикутників із заданими стороною a і кутом A. Знайдіть найбільше значення суми квадратів довжин сторін b і c.

4. Нехай O – центр кола, описаного навколо трикутника ABC, а точка M – його центроїд. Доведіть, що пряма OM перпендикулярна до медіани CK тоді і тільки тоді, коли $a^2 + b^2 = 2c^2$.

13.** Дано рівносторонній трикутник ABC. Знайдіть геометричне місце точок M, для яких $MC^2 = MA^2 + MB^2$.

14.** Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце всіх точок M, для кожної з яких: **а)** $MB^2 - MA^2 = 2AB^2$; **б)** $2AM^2 - BM^2 = 2AB^2$; **в)** $AM^2 + 2BM^2 = 6AB^2$.

15.** Дано квадрат зі стороною $2a$. Знайдіть геометричне місце точок, сума квадратів відстаней від яких до вершин цього квадрата є величиною сталою і дорівнює $12a^2$.

16*. Знайдіть геометричне місце точок, сума квадратів відстаней від яких до даних двох точок $A(2; -3)$ і $B(2; -1)$ є величиною сталою і дорівнює 6.

17.** Дано дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце таких точок M, для яких $AM : MB = k$, $k \neq 0$.

18.** Побудуйте геометричне місце точок площини, координати яких задовольняють співвідношення:

а) $\sqrt{(x-2)^2} = 2\sqrt{(y+1)^2}$;

б) $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 3$;

в) $\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = 3$;

г) $\left|\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} - \sqrt{(x-5)^2 + (y-5)^2}\right| = 5$;

д) $y = \sqrt{1-x^2}$;

е) $\sqrt{(y-1)^2} = -\sqrt{1-(x-1)^2}$.

Завдання для повторення розділу I

1°. Якій чверті належить точка $M(x; y)$, якщо: **а)** $x > 0$; $y > 0$; **б)** $x < 0$; $y > 0$; **в)** $x < 0$; $y < 0$?

2°. Запишіть формули для обчислення відстані між точками: **а)** $A(x_A; y_A)$ і $B(x_B; y_B)$; **б)** $A(x_A; y_A)$ і початком координат.

3°. Запишіть рівняння кола, радіус якого дорівнює r, з центром у: **а)** точці $Q(a; b)$; **б)** початку координат.

4°. Запишіть координати середини відрізка AB, якщо: **а)** $A(x_A; y_A)$ і $B(x_B; y_B)$; **б)** $A(x_A; y_A)$ і $B(0; 0)$.

5°. Запишіть загальне рівняння прямої.

6°. Запишіть умову паралельності прямих: **а)** $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$; **б)** $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$.

7°. Дайте означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кута від 0° до 180°.

8°. Запишіть основні співвідношення між тригонометричними функціями одного і того самого кута.

9°. Запишіть співвідношення між тригонометричними функціями кутів: **а)** $90° - \alpha$ і α; **б)** $180° - \alpha$ і α.

10°. Сформулюйте теорему: **а)** синусів; **б)** косинусів.

11. Доведіть теорему: **а)** синусів; **б)** косинусів.

12. Сформулюйте: **а)** розширену теорему синусів; **б)** наслідки з теореми косинусів.

13°. Запишіть формули для обчислення площі трикутника: **а)** Герона; **б)** за двома сторонами і кутом між ними; **в)** через радіус вписаного кола; **г)** через радіус описаного кола.

14*. Запишіть відношення площ двох трикутників, що мають: **а)** одну спільну сторону; **б)** одну спільну висоту; **в)** один спільний кут.

15. Запишіть відношення площ двох частин трикутника, на які його поділяє: **а)** медіана; **б*)** пряма, що проходить через вершину трикутника і ділить його сторону у відношенні $m : n$.

16°. Задано координати вершин трикутника: $A(-7; 1)$, $B(5; -4)$, $C(5; 1)$. Знайдіть: **а)** координати середини сторони AB; **б)** довжину сторони AB; **в)** рівняння кола, діаметром якого є сторона AB; **г)** перевірте, чи належить вершина C цьому колу.

17. Відомі рівняння двох кіл: $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 20$ і $x^2 + y^2 - 2x = 0$. **а)** Знайдіть координати центрів даних кіл; **б)** визначте радіуси цих кіл; **в)** запишіть рівняння кола, центром якого є середина відрізка, що сполучає центри двох даних кіл, а радіус – середнє арифметичне радіусів двох даних кіл; **г)** з’ясуйте, чи перетинаються дані кола.

18*. Як записати рівняння прямої, що проходить через дві точки, ні абсциси, ні ординати яких не збігаються?

19. Як записати рівняння прямої, яка проходить через дві точки, що мають рівні: **а)** ординати; **б)** абсциси?

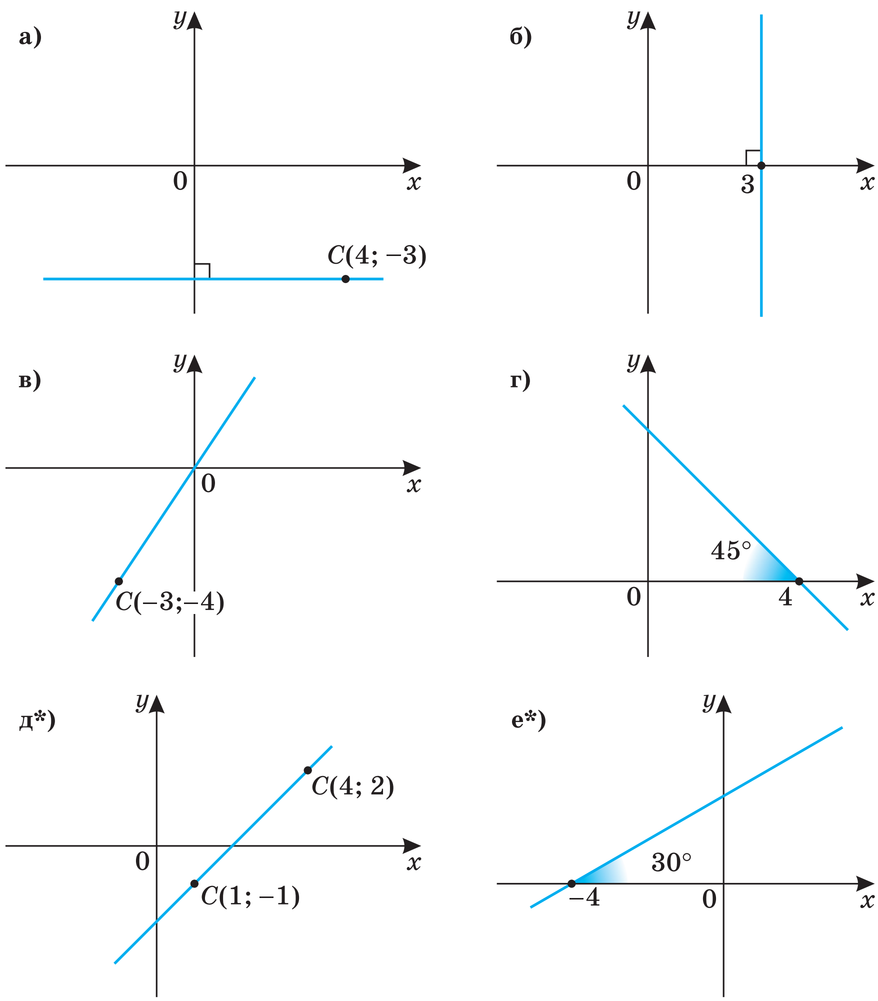
20°. Побудуйте на координатній площині пряму, задану рівнянням:
а) $y = 4$; **в)** $x + 3 = 0$; **д)** $3x + 2y = 0$; **є)** $3y - 2x = 1$;
б) $x = -1$; **г)** $y = 2x - 3$; **е)** $4y - 3x = 0$; **ж)** $x + y = 0$.

21*. Знайдіть координати точок перетину кола $x^2 + y^2 = 1$ і прямої $y = ax$.

22. При яких значеннях параметра a коло $x^2 + y^2 = 4$ дотикається до прямої:
а*) $y = 2a$; **б*)** $x = -4a$; **в**)** $y = ax + 2$; **г)** $ax + (a - 2)y + 4 = 0$?

23. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $B(2; 3)$ і:
а) паралельна осі ординат; **в)** через початок координат;
б) паралельна осі абсцис; **г*)** через точку $A(1; 4)$.

24. Складіть рівняння прямих, зображених на малюнку 1.63.



Мал. 1.63

25. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3; 5)$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут: **а)** 45°; **б)** 135°.

26. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-1; 5)$ і: **а)** паралельна осі абсцис; **б)** паралельна осі ординат; **в*)** паралельна бісектрисі першого і третього координатних кутів; **г*)** паралельна прямій $y = 2x$; **д*)** паралельна прямій $y = 1 - 3x$; **е**)** перпендикулярна до прямої $y = 2x$.

27. Побудуйте трикутник ABC за координатами його вершин: $A(5; 5)$, $B(-5; 6)$, $C(1; -4)$. Знайдіть: **а)** довжину сторони AC; **б)** рівняння прямої AC; **в*)** площу трикутника ABC; **г)** координати середини сторони AC; **д*)** рівняння медіани BM; **е**)** рівняння прямої, що містить висоту BH; **ж**)** координати точки H – основи висоти BH; **з**)** довжину висоти BH.

28. Знайдіть координати точок перетину кола $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ з віссю ординат.

29*. Не будуючи кіл, вкажіть, чи перетинаються кола: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ і $x^2 + (y - 2)^2 = 4$.

30.** При яких значеннях параметра a кола $(x - a)^2 + (y + 2)^2 = 4$ і $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ дотикатимуться одне до одного?

31. Сторони паралелограма дорівнюють $2\sqrt{3}$ см і 4 см. Один з його кутів дорівнює 30°. Знайдіть діагоналі паралелограма.

32. З'ясуйте, чи є трикутник зі сторонами 30 см, 26 см і 28 см тупокутним.

33.** Бісектриса трикутника перетинає протилежну сторону під кутом 60° і ділить її на відрізки 3 см і 4 см. Знайдіть цю бісектрису.

34*. Медіана трикутника, проведена до сторони, довжина якої 32 см, утворює з нею кут 120°. Сторона, що лежить проти вказаного кута, дорівнює $2\sqrt{97}$ см. Знайдіть третю сторону трикутника.

35*. Сторона трикутника дорівнює a, а прилеглі до неї кути – α і β. Знайдіть висоту трикутника, проведену до даної сторони.

36.** За даним периметром P знайдіть сторони трикутника, якщо його гострі кути дорівнюють α і β.

37. Знайдіть радіус описаного кола, невідомі сторони і невідомі кути трикутника ABC, якщо $AB = 3$ см, $\angle C = 45°$, $\angle B = 30°$.

38*. Доведіть, що медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини.

39*. Виведіть формулу для обчислення площі чотирикутника через довжини його діагоналей.

40.** Діагональ BD поділяє опуклий чотирикутник $ABCD$ на два трикутники, площі яких відносяться як 2 : 3. У якому відношенні ця діагональ поділяє відрізок AC?

41. Обчисліть площу трикутника, якщо:
а) дві його сторони дорівнюють 2 см і 6 см, а кут між ними – 150°;
б) сторони трикутника дорівнюють 15 см, 26 см і 37 см;
в*) дві сторони дорівнюють 25 см і 40 см, а висота, проведена до третьої – 24 см;
г) два кути трикутника дорівнюють α і β, а висота, проведена з вершини третього кута, – h;
д*) два кути трикутника дорівнюють α і β, а бісектриса третього кута – l;
е*) дві сторони трикутника дорівнюють 1 і $\sqrt{15}$, а медіана, проведена до третьої сторони, – 2.

42. Обчисліть площу прямокутного трикутника, якщо:
а) висота, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки завдовжки 4 см і 16 см;
б) катети відносяться як 3 : 4, а гіпотенуза дорівнює 25 см;
в) різниця катетів дорівнює 2 см, а гіпотенуза – 10 см;
г*) бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 15 см і 20 см;

д*) висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 12 см і ділить її на відрізки, різниця яких – 7 см;
е*) бісектриса гострого кута ділить катет на відрізки завдовжки 20 см і 16 см.

43. Обчисліть площу паралелограма, якщо:
а) діагоналі паралелограма дорівнюють 15 см і 20 см, а кут між ними – 30°;
б) сторони і діагональ дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см відповідно;
в*) дві висоти, проведені з вершини тупого кута, дорівнюють 12 дм і 15 дм, а кут між ними – 30°.

44*. Обчисліть площу ромба, якщо:
а) перпендикуляр, проведений з вершини тупого кута ромба на сторону, ділить її на відрізки 7 см і 18 см, починаючи від вершини гострого кута;
б) сума його діагоналей дорівнює 34 см, а сторона – 13 см;
в) різниця діагоналей дорівнює 14 см, а сторона – 13 см;
г) висота дорівнює 24 мм, а діагоналі відносяться як 3 : 4.

45. Обчисліть площу трапеції, якщо:
а) її основи дорівнюють 18 см і 13 см, а бічні сторони – 3 см і 4 см;
б) її основи дорівнюють 11 мм і 4 мм, а діагоналі – 9 мм і 12 мм.

46*. Обчисліть площу рівнобічної трапеції, якщо в неї:
а) основи дорівнюють 40 дм і 24 дм, а діагоналі – взаємно перпендикулярні;
б) основи дорівнюють 50 см і 14 см, а діагональ – 40 см;
в) основи дорівнюють 39 см і 15 см, а діагоналі – перпендикулярні до бічних сторін;
г) основи дорівнюють 50 см і 30 см, а бічна сторона – 26 см;
д) основи дорівнюють 11 см і 25 см, а діагоналі є бісектрисами тупих кутів.

47*. Обчисліть площу прямокутної трапеції, якщо:
а) різниця її основ дорівнює 7 см, більша бічна сторона – 25 см, а менша діагональ є бісектрисою прямого кута;
б) один з її кутів дорівнює 135°, а основи – 2 см і 4 см.

48*. У паралелограмі $ABCD$ кут BAD дорівнює 60°, а сторона AB – 3 см. Бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці E. Обчисліть площу трикутника ABE.

49.** Медіани AN і BM трикутника ABC, що дорівнюють 6 см і 9 см відповідно, перетинаються в точці K, причому кут AKB дорівнює 30°. Знайдіть площу трикутника ABC.

50.** У трикутник вписано коло, радіус якого дорівнює 4 дм. Одна із сторін трикутника точкою дотику ділиться на відрізки 6 дм і 8 дм. Знайдіть дві інші сторони.

Для допитливих

У наступних задачах використано традиційні позначення для елементів трикутника ABC.

1. Доведіть, що $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$.

2. На сторонах трикутника ABC ($S_{ABC} \triangleq S$) зовні побудовано квадрати з центрами A_1, B_1, C_1. Нехай a_1, b_1, c_1 – довжини сторін трикутника $A_1B_1C_1$, а S_1 – його площа.
Доведіть: **а)** $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 6S$; **б)** $S_1 - S = (a^2 + b^2 + c^2) : 8$.

3. Один із папуг A, B, C завжди каже правду, інший завжди бреше, а третій хитрує: інколи каже правду, а інколи – ні. На запитання: «Хто ви?» – вони відповіли:

A: – Я брехун!
B: – Я хитрун!
C: – Я чесний папуга!
Хто з папуг брехун, а хто хитрун?

51.** Вершини трикутника сполучено із центром вписаного кола. Проведені відрізки поділили трикутник на три частини, площі яких дорівнюють 28, 60 і 80 квадратних одиниць. Знайдіть сторони трикутника.

52.** Доведіть, що коли діагоналі опуклого чотирикутника рівні, то його площа дорівнює добутку довжин відрізків, що сполучають середини протилежних сторін.

53.** Доведіть, що коли відрізки, які сполучають середини протилежних сторін опуклого чотирикутника рівні, то його площа дорівнює половині добутку діагоналей.

Готуємося до тематичного оцінювання № 1

Варіант I

1. Знайдіть координати середини відрізка AB, якщо $A(-7; 2)$, $B(-3; 4)$.
2. Запишіть рівняння кола з центром у точці $A(-3; 4)$, радіус якого дорівнює 5 см.
3. Які з точок $A(3; 6)$, $B(2; 4)$, $C(0; 7)$, $D(2; 0)$, $K(-5; 5)$ належать прямій
$$5x + 3y - 22 = 0?$$
4. Знайдіть координати центра і радіус кола, що задане рівнянням
$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0.$$
5. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Обчисліть найбільшу висоту трикутника.

Варіант II

1. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $A(-7; 9)$, $B(-4; 5)$.
2. Точка $C(0; 1)$ – середина відрізка AB. Знайдіть координати точки B, якщо $A(-2; -1)$.
3. Які з точок $A(1; 2)$, $B(3; 4)$, $C(-4; 3)$, $D(0; 5)$, $K(5; -1)$ лежать на колі, що задане рівнянням $x^2 + y^2 = 25$?
4. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $K(-2; 5)$ і паралельна прямій $y = 4x - 2$.
5. Знайдіть найменшу висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 7 м, 8 м і 9 м.

Готуємося до тематичного оцінювання № 2

Варіант I

1. Побудуйте кут α, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -0{,}4$.
2. Сторони трикутника дорівнюють 16 см, 6 см і 14 см. Обчисліть кут між найбільшою і найменшою сторонами трикутника.
3. У трикутнику одна сторона дорівнює 32 см і утворює з другою кут 45°, а третя має довжину 28 см. Знайдіть невідому сторону трикутника.
4. Сторона трикутника дорівнює $9\sqrt{3}$ см, а протилежний до неї кут – 60°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

Варіант II

1. Обчисліть $\sin \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = -0{,}8$.
2. Чи існує трикутник ABC, в якого: $BC = 0{,}3$; $AC = 0{,}8$; $\sin A = 0{,}4$?
3. Визначте вид трикутника, якщо його сторони дорівнюють 8 см, 4 см і 5 см.
4. Діагоналі паралелограма дорівнюють 7 см і 11 см, а сторони відносяться як 6 : 7. Обчисліть периметр паралелограма.

Розділ II

ПРАВИЛЬНІ БАГАТОКУТНИКИ. ДОВЖИНА КОЛА. ПЛОЩА КРУГА

У цьому розділі повернемося до вже відомого вам багатокутника – будемо вивчати властивості правильних багатокутників, використовувати властивості багатокутників під час розв'язування геометричних задач. Крім того, ви дізнаєтеся про одну з найважливіших у науці і техніці сталих – число π (число «пі»), яке пов'язане з вимірюванням довжини кола і площі круга. Чудовим чином число π з'являється також у найрізноманітніших математичних і нематематичних дослідженнях, які на перший погляд дуже далекі від геометрії. Цей факт ще раз підкреслює цілісність і єдність наук, що вивчають навколишній світ.

§ 11. Основні властивості правильних багатокутників* та обчислення їх елементів

Нагадаємо: ***правильним називається опуклий багатокутник, в якого всі кути рівні і всі сторони рівні.*** Найпростішими прикладами правильних багатокутників є рівносторонній трикутник і квадрат.

$A_1 \ldots A_n$ – правильний

$\Uparrow$

$$\begin{cases} \angle A_1 = \angle A_2 = \ldots = \\ = \angle A_n \\ A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = \\ = A_nA_1 \end{cases}$$

* У перекладі з російської: «многоугольник» – «багатокутник» (Гейченко В. В. та ін. Російсько-український словник наукової термінології. – К.: Наук. думка, 1998. – 892 с.). У деяких підручниках вживається термін «многокутник», що є русизмом.

Однойменні багатокутники – число сторін однакове.

З наведеного означення випливає: **два однойменні правильні багатокутники з рівними сторонами – рівні, тобто їх можна сумістити накладанням.**

Багатокутник називається *вписаним* у коло, якщо всі його вершини лежать на колі.

Багатокутник називається *описаним* навколо кола, якщо всі його сторони дотикаються до кола.

$\begin{cases} A_1 \ldots A_n \text{ – правильний} \\ B_1 \ldots B_n \text{ – правильний} \\ a = b \end{cases}$

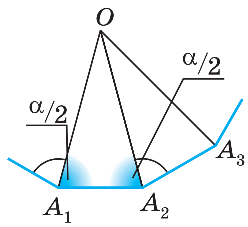
$\Downarrow$

$A_1 \ldots A_n = B_1 \ldots B_n$

Т е о р е м а. **Правильний багатокутник є вписаним у коло й описаним навколо кола.**

Д о в е д е н н я

Нехай градусна міра кута правильного багатокутника $A_1A_2 \ldots A_n$ – α. Розглянемо три послідовні вершини A_1, A_2 і A_3 цього багатокутника (мал. 2.1). Точку перетину бісектрис кутів A_1 і A_2 позначимо через O.



Мал. 2.1

Маємо:

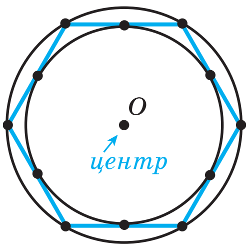
$$\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \alpha : 2.$$

Тоді трикутник A_1OA_2 рівнобедрений і $OA_2 = OA_1$.

У трикутників A_1OA_2 і A_2OA_3: сторона OA_2 – спільна, $\angle OA_2A_1 = \dfrac{\alpha}{2} = \angle OA_2A_3$, $A_1A_2 = A_2A_3$. Тоді ці трикутники рівні і

$$OA_3 = OA_2 = OA_1, \ \angle OA_3A_2 = \angle OA_1A_2 = \frac{\alpha}{2}.$$

Правильний багатокутник є вписаним у коло і описаним навколо кола.



Звідси:

– точка O рівновіддалена від вершин A_1, A_2, A_3;

– точка O є точкою перетину бісектрис кутів A_1, A_2 і A_3.

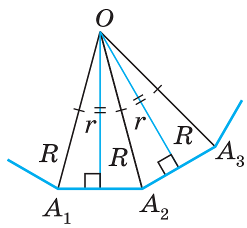
Якщо проведемо аналогічні міркування для трійки вершин A_2, A_3, A_4 цього багатокутника і т. д., то в результаті дістанемо, що точка O рівновіддалена від усіх вершин багатокутника і є точкою перетину бісектрис усіх його кутів (тобто рівновіддалена від усіх його сторін).

Тоді точка O – центр описаного і вписаного кіл правильного багатокутника.

Теорему доведено.

Для правильного багатокутника центри вписаного й описаного кіл збігаються.

З а у в а ж е н н я. ***Радіус описаного кола** – бічна сторона утворених рівнобедрених трикутників.* ***Радіус вписаного кола** – висота, проведена до основи цих трикутників* (мал. 2.2).



Мал. 2.2

Для допитливих

Квадратний аркуш паперу розрізали на 6 частин, кожна з яких має форму опуклого багатокутника. П'ять із цих частин загубилися, а та, що залишилася, має форму правильного восьмикутника. Чи можна за цією частиною встановити початкові розміри квадрата?

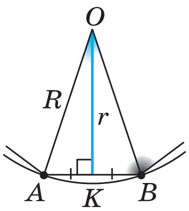
Н Наслідок 1. **Вписане й описане кола правильного багатокутника мають один і той самий центр.**

Його називають *центром правильного багатокутника*.

Відрізок, що сполучає центр правильного багатокутника та середину його сторони, ще називають *апофемою правильного багатокутника*. Вона дорівнює радіусу вписаного у цей багатокутник кола.

Н Наслідок 2. **Із центра правильного багатокутника всі його сторони видно під одним і тим самим кутом, градусна міра якого дорівнює $\frac{360°}{n}$, де n — число сторін (вершин) цього багатокутника.**

Кут, під яким видно сторону правильного багатокутника з його центра, називають *центральним кутом* цього багатокутника.



Мал. 2.3

Знайдемо радіус R описаного кола і радіус r вписаного кола для правильного n-кутника зі стороною a.

Нехай A і B – дві сусідні вершини правильного багатокутника (мал. 2.3).

Тоді $AB = a$, $\angle AOB = \frac{360°}{n}$, $OA \equiv R$ і $OB \equiv R$, а апофема $OK \equiv r$.

У рівнобедреному трикутнику AOB висота OK є його медіаною і бісектрисою, тому

$$AK = KB = \frac{a}{2},\ \angle AOK = \angle BOK = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{180°}{n}.$$

З прямокутного трикутника AKO ($\angle K = 90°$):

$$R = AK : \sin\angle AOK = a : \left(2\sin\frac{180°}{n}\right),$$

$$r = AK \cdot \mathrm{ctg}\angle AOK = \frac{a}{2}\mathrm{ctg}\frac{180°}{n}.$$

Знайдемо площу правильного n-кутника. Шукана площа $S = n \cdot S_{AOB}$.

Тоді:

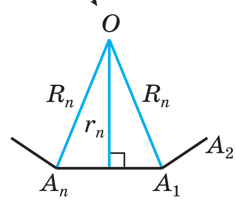
$$S_n = n\frac{ar_n}{2} = \frac{1}{2}P_n r_n;\ S_n = \frac{na^2}{4}\mathrm{ctg}\frac{180°}{n};\ S_n = \frac{n}{2}R_n^2\sin\frac{360°}{n}.$$

Тут P_n – периметр правильного багатокутника.

Зокрема, при $n = 3$, $n = 4$, $n = 6$ маємо таке.

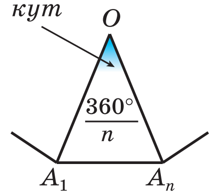
***$A_1A_2 \ldots A_n$* – ПРАВИЛЬНИЙ**

центр $A_1A_2 \ldots A_n$ – центр вписаного і описаного кіл



r_n – *апофема*

центральний кут



Нагадаємо:
$\equiv$ – «тотожна рівність».

$$R_n = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}$$

$$r_n = \frac{a}{2}\mathrm{ctg}\frac{180°}{n}$$

$$S_n = \frac{1}{2}P_n r_n$$

$$S_n = \frac{na^2}{4}\mathrm{ctg}\frac{180°}{n}$$

$$S_n = \frac{n}{2}R_n^2\sin\frac{360°}{n}$$

Для допитливих

$A_1 \ldots A_n$ – правильний багатокутник. Точка M – точка кола, описаного навколо нього. Доведіть, що $MA_1^2 + MA_2^2 + \ldots + MA_n^2$ не залежить від розміщення точки M на колі.

$A_1 \dots A_n$ – ПРАВИЛЬНИЙ

Для *правильного трикутника* $n = 3$:

$$R_3 = \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3};\quad r_3 = \frac{a}{2}\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6};\quad R_3 = 2r_3;$$

$$S_3 = \frac{1}{2}a\cdot a\sin 60^\circ = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Пам'ятаймо для спільного описаного кола радіуса R:

$$r_3 = \frac{R}{2}$$

$$r_4 = \frac{a_4}{2} = \frac{S_2}{2}R$$

$$R_6 = a_6 = 2r_3$$

Для *правильного чотирикутника* (квадрата) $n = 4$:

$$R_4 = \frac{a}{2\sin 45^\circ} = \frac{a\sqrt{2}}{2};\quad r_4 = \frac{a}{2}\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{a}{2};\quad R_4 = \sqrt{2}r_4;\quad S_4 = a^2.$$

Для *правильного шестикутника* $n = 6$:

$$R_6 = \frac{a}{2\sin 30^\circ} = a;\quad r_6 = \frac{a}{2}\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2};\quad R_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}r_6;$$

$$S_6 = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Зауваження. При розв'язуванні задач, зокрема на побудову, варто пам'ятати співвідношення:

$$r_3 = \frac{R_3}{2};\quad r_4 = \frac{a_4}{2};\quad 2R_4 = \sqrt{2}a_4;\quad R_6 = a_6 = 2r_3.$$

Правильні: $A_1 \dots A_n$ і $B_1 \dots B_n$:

$$\frac{a}{b} = \frac{r_A}{r_B} = \frac{R_A}{R_B} = \frac{P_A}{P_B}$$

Зазначимо ще таку властивість правильних багатокутників з однаковим числом сторін, яка випливає з подібності рівнобедрених трикутників, що за основи мають відповідні сторони багатокутників, а за вершини – їхні центри. Всі відповідні лінійні елементи подібних трикутників пропорційні (коефіцієнт пропорційності дорівнює коефіцієнту подібності). Тоді **для двох правильних однойменних багатокутників:**

- *відношення радіусів описаних кіл дорівнює відношенню радіусів вписаних кіл, відношенню сторін цих багатокутників і відношенню їхніх периметрів;*
- *відношення площ дорівнює квадрату відношення, про яке йшлося в попередньому пункті.*

Для *правильного п'ятикутника* $n = 5$:

$$R_5 = \frac{a}{2\sin 36^\circ};\quad r_5 = \frac{a}{2}\operatorname{ctg} 36^\circ;$$

$$R_5 = r_5\cdot\frac{1}{\sin 36^\circ \operatorname{ctg} 36^\circ} = \frac{r_5}{\cos 36^\circ}.$$

$n = 3$

$$r_3 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 2r_3$$

$$S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Знайдемо значення тригонометричних функцій кута міри 36°. Для цього скористаємося формулами

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \text{ (с. 71) та } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ (форзац).}$$

Маємо:

$$\sin 36^\circ = 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ;$$

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}};$$

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1-\sin^2 18^\circ} = \sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

$$\sin 36^\circ = 2\cdot\frac{1}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}};$$

$$\cos 36^\circ = \sqrt{1-\sin^2 36^\circ} = \sqrt{1-\frac{2(5-\sqrt{5})}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}} =$$

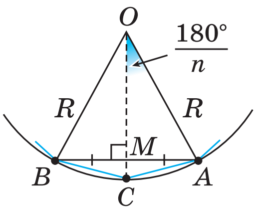
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(1+\sqrt{5})^2} = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5}).$$

Тоді для правильного п'ятикутника:

$$R_5 = \frac{a\cdot 4}{2\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}};\quad r_5 = \frac{R_5}{4}(\sqrt{5}+1).$$

ПТ **Теорема.** **Якщо a_n і a_{2n} – сторони правильних n-кутника і $2n$-кутника, вписаних у коло радіуса R, то виконується співвідношення**

$$a_{2n}^2 = 2R(R-r_n) = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}.$$



Мал. 2.4

Доведення

Нехай AB – сторона правильного n-кутника, а точка C ділить дугу AB навпіл (мал. 2.4). Сполучимо точки A і C, B і C. Відрізки AC і BC – сторони правильного $2n$-кутника,

$n = 4$

$r_4 = \frac{a}{2}$

$R_4 = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}r_4$

$S_4 = a^2$

$n = 6$

$r_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$R_6 = a = \frac{\sqrt{3}}{2}r_6$

$S_6 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$n = 5$

$r_5 = \frac{R_5}{4}(\sqrt{5}+1)$

$R_5 = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}$

Для допитливих

Теорема. **НЕРІВНІСТЬ ПТОЛЕМЕЯ. Для довільного опуклого чотирикутника $ABCD$ виконується нерівність $AC\cdot BD \leqslant AB\cdot CD + BC\cdot AD$.**

Доведення

Позначимо на променях AB, AC і AD відрізки AB', AC' і AD', довжини яких дорівнюють $l^2 : AB$, $l^2 : AC$ і $l^2 : AD$ відповідно.

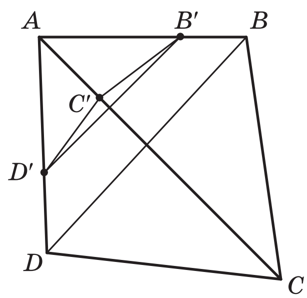
1) Маємо: $AB : AC = AC' : AB'$, $\angle CAB$ – спільний, тоді $\triangle ABC \sim \triangle AC'B'$.

2) Коефіцієнт подібності трикутників ABC і $AC'B'$ дорівнює $k = \frac{l^2}{AB\cdot AC}$. Тому $B'C' = \frac{l^2\cdot BC}{AB\cdot AC}$.

Аналогічно $C'D' = \frac{l^2\cdot CD}{AC\cdot AD}$ і $B'D' = \frac{l^2\cdot BD}{AB\cdot AD}$.

3) Для сторін трикутника $AD'B'$ маємо:
$$B'D' \leqslant B'C' + C'D'.$$

4) Помножимо останню нерівність на $AB\cdot AC\cdot AD$ і використаємо вирази, знайдені для $B'C'$, $C'D'$, $B'D'$ – отримаємо шукану нерівність.



вписаного в те саме коло, радіус якого дорівнює R. Маємо:

$$OA = OC = OB = R,\ AB = a_n,\ OM = r_n,\ AC = a_{2n}.$$

З трикутника AOC знайдемо за теоремою косинусів AC^2 і врахуємо, що $OM = OA\cos\frac{180^\circ}{n}$ та

$$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}:$$

$$a_{2n}^2 = AC^2 = 2R^2 - 2R \cdot R\cos\frac{180^\circ}{n} = 2R^2 - 2Rr_n =$$

$$= 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Теорему доведено.

Якщо R — спільний:

$a_{2n}^2 = 2R(R - r_n)$

$a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}$

Користуючись цією теоремою, наприклад, можна виразити через радіус описаного кола R довжини сторін правильних 8-кутника і 12-кутника.

$$a_4 = R\sqrt{2},\ r_4 = \frac{a_4}{2};\ a_6 = R,\ r_6 = \frac{a_6\sqrt{3}}{2}, \text{ тоді}$$

$$a_8^2 = 2R(R - r_4) = 2R\left(R - \frac{R\sqrt{2}}{2}\right) = R^2(2 - \sqrt{2});$$

$$a_{12}^2 = 2R(R - r_6) = 2R\left(R - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right) = 2R^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Для допитливих

БАГАТОКУТНИКИ З ВЕРШИНАМИ У ВУЗЛАХ ЦІЛОЧИСЛОВОЇ РЕШІТКИ

Розглянемо на координатній площині систему прямих, заданих рівняннями $x = m$ і $y = n$, де m і n – цілі числа. Ці прямі утворюють решітку квадратів або *цілочислову решітку*. Вершини цих квадратів – точки, координати яких є цілими числами, називають *вузлами цілочислової решітки*.

1. Чи існує правильний трикутник з вершинами у вузлах цілочислової решітки?

2. Доведіть, що при $n \neq 4$ правильний n-кутник не можна розмістити так, щоб усі його вершини були у вузлах цілочислової решітки.

3. Чи можна прямокутний трикутник, довжини сторін якого є цілими числами, розмістити так, щоб його вершини сумістилися з вузлами цілочислової решітки, але щоб жодна з його сторін не проходила по лініях решітки?

4. Доведіть теорему, яку називають *формулою Піка*.

Теорема. **Якщо вершини багатокутника (не обов'язково опуклого) розміщено у вузлах цілочислової решітки, причому всередині цього багатокутника міститься n вузлів решітки, а на його сторонах – m, то площа цього багатокутника дорівнює $n + 0{,}5m - 1$.**

5. Вершини трикутника містяться у вузлах цілочислової решітки, причому на сторонах трикутника інших вузлів немає, а всередині є лише один вузол – точка M. Доведіть, що M – центроїд заданого трикутника.

Порада. Скористайтеся формулою Піка.

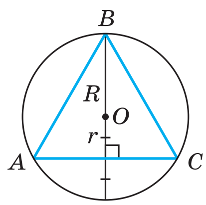
ПОБУДОВА ПРАВИЛЬНИХ БАГАТОКУТНИКІВ

Побудову будемо здійснювати за допомогою циркуля (можна креслити кола і відкладати рівні відрізки) і лінійки без позначок (можна проводити пряму через дві задані точки). Пригадайте, які опорні побудови за цих умов ви вже вивчали раніше (див. с. 277–278).

Побудова правильного трикутника

Виконується за опорною задачею побудови трикутника за трьома його сторонами – треба сполучити дві довільні точки площини і взяти утворений відрізок за сторону правильного трикутника.

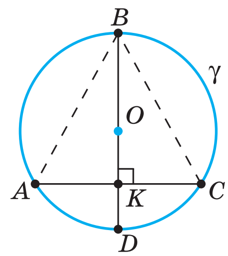
Зауваження. Правильний трикутник, вписаний у задане коло, можна побудувати, скориставшись співвідношенням $r_3 = \dfrac{R_3}{2}$ (мал. 2.5).



Мал. 2.5

Задано коло – будуємо вписані правильні:

ТРИКУТНИК



1) $OD \to OK = KD$;
2) $AC \perp OD$ у т. K;
3) $(OD) \cap \gamma = B$.

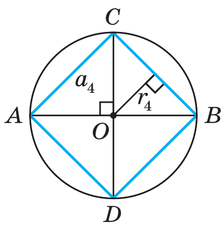
Побудова правильного чотирикутника – квадрата

Аналіз

Діагоналі квадрата є взаємно перпендикулярними діаметрами описаного навколо нього кола.

План побудови

1. Креслимо коло з центром O, проводимо діаметр AB (мал. 2.6).
2. Будуємо пряму, перпендикулярну до AB у точці O, – маємо діаметр CD. Чотирикутник $ACBD$ – шуканий.



Мал. 2.6

Доведення

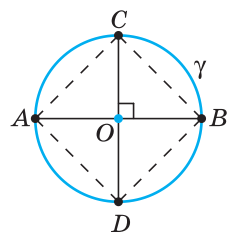
За побудовою маємо: AB і CD – діаметри, $AB \perp CD$.
Довести: $ACBD$ – квадрат.

1) Кути чотирикутника прямі, бо спираються на діаметри. Тоді $ACBD$ – прямокутник.
2) Градусні міри дуг AC і CB рівні (становлять по $90°$). Тоді хорди AC і CB рівні і $ACBD$ – квадрат. Щ. в. д.

А які ще способи побудови квадрата ви можете запропонувати?

Нагадаємо:
(OD) – пряма OD;
$\cap$ – перетинає.

КВАДРАТ



$AB \perp CD$ у т. O.

Побудова правильного шестикутника

Спосіб I

Аналіз

Врахуємо, що $a_6 = R$.

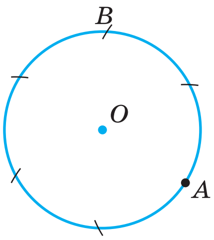
План побудови

1. Креслимо коло з центром O (мал. 2.7).

Задано коло – будуємо вписаний правильний

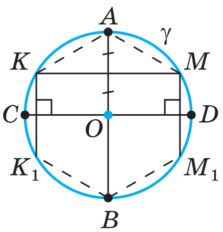
ШЕСТИКУТНИК

Спосіб I

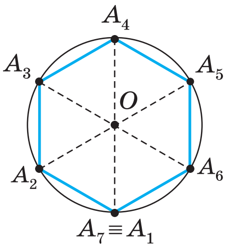


Від довільної точки кола A робимо засічки розхилом циркуля R.

Спосіб II



1) $R \to \gamma$;
2) $CD \perp AB$ через O;
3) KM – серед. пер. до AO;
4) $KK_1 \perp CD$, $MM_1 \perp CD$.



Мал. 2.7

2. З довільної точки кола A_1 робимо засічку на колі розхилом циркуля, що дорівнює радіусу кола, – маємо точку A_2.
3. Аналогічно будуємо точки A_3, A_4, A_5, A_6. Шестикутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – шуканий.

Доведення

За побудовою маємо:
$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = R$.

Довести: (1) $A_7 \equiv A_1$; (2) $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – правильний.

1) Трикутники OA_1A_2, OA_2A_3, ..., OA_5A_6 – рівносторонні за побудовою, їхні кути дорівнюють по 60°. Тобто $\smile A_1A_2 = \smile A_2A_3 = \ldots = \smile A_5A_6 = \smile A_6A_7 = 60°$. Тоді $\angle A_1OA_7 = 6 \cdot 60° = 360°$. Твердження (1) доведено.

2) Сторони утвореного шестикутника рівні за побудовою. Його кути рівні між собою, бо $\triangle OA_1A_2 = \ldots = \triangle OA_6A_1$. Тоді шестикутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – правильний. Твердження (2) доведено.

Спосіб II

План побудови

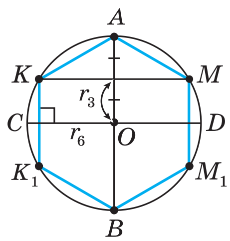
1. Креслимо коло радіуса R із центром O (мал. 2.8).
2. Проводимо діаметр AB і будуємо діаметр $CD \perp AB$ та серединний перпендикуляр KM до радіуса AO.
3. Будуємо точки K_1 і M_1, симетричні точкам K і M відносно CD.

AMM_1BK_1K – шуканий шестикутник.

Доведення проведіть самостійно (врахуйте, що $a_6 = R = 2r_3$, $AK = AM = R$).

Зауваження. Якщо побудовано правильний n-кутник, то легко побудувати правильний $2n$-кутник (наприклад, за допомогою серединних перпендикулярів до сторін n-кутника і описаного навколо нього кола – див. мал. 2.8).

Побудуйте правильний восьмикутник і правильний дванадцятикутник самостійно.



Мал. 2.8

Для допитливих

1. Доведіть, що в правильному п'ятикутнику: **а)** дві діагоналі, які не виходять з однієї вершини, діляться точкою перетину *в крайньому і середньому відношенні* (див. с. 224); **б)** один з відрізків, що утворилися при перетині діагоналей, дорівнює стороні п'ятикутника.

2. Доведіть, що $a_5^2 = a_{10}^2 + a_6^2$, де a_n – сторона правильного n-кутника, вписаного в коло радіуса R.

Побудова правильного десятикутника

Аналіз

1. Сторона правильного десятикутника, вписаного в коло, радіус якого R, дорівнює

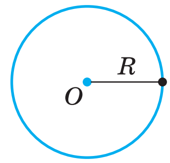
$$a_{10} = 2R\sin\frac{180^\circ}{10} = 2R\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R = \frac{\sqrt{5}}{2}R - \frac{1}{2}R.$$

2. Відрізок, довжина якого $l = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}R$, є гіпотенузою прямокутного трикутника з катетами R і $\frac{R}{2}$.

План побудови

1. Креслимо коло довільного радіуса R із центром O.
2. На довільній прямій відкладаємо відрізок, рівний R, і ділимо його навпіл – маємо відрізок $\frac{R}{2}$.
3. Будуємо прямокутний трикутник за катетами R і $\frac{R}{2}$ – маємо його гіпотенузу $t = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}R$.
4. Будуємо відрізок $a_{10} = t - \frac{1}{2}R$.
5. На колі від довільної його точки A_1 робимо засічки розхилом циркуля a_{10} – отримуємо точки $A_2, A_3, \ldots, A_{10}$ (точка A_{11} – збігається з точкою A_1).
   Багатокутник $A_1A_2 \ldots A_{10}$ – шуканий.
   Доведіть це самостійно (що $A_{11} \equiv A_1$).

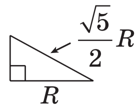
Дано коло –



будуємо вписаний правильний:

ДЕСЯТИКУТНИК

1) $R \to \frac{R}{2}$;

2) $\frac{R}{2}$ 

3) $a_{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}R - \frac{R}{2}$.

Побудова правильного п'ятикутника

Зрозуміло, якщо побудовано правильний десятикутник, то, послідовно сполучивши вершини цього багатокутника через одну, отримаємо правильний п'ятикутник.

Проте можна знайти побудову правильного п'ятикутника й іншим способом, виходячи з уже відомої вам формули:

$$a_5 = R\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}R^2 - \frac{\sqrt{5}}{2}R^2} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}R\left(\frac{\sqrt{5}}{2}R - R\right)}.$$

Справді, будувати відрізок $t = \frac{\sqrt{5}}{2}R = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2}$, якщо задано відрізок R, ми вже вміємо; залишилося пригадати, як будується середнє геометричне $\sqrt{n \cdot m}$ двох заданих відрізків (див. с. 278).

П'ЯТИКУТНИК

1) $R \to \frac{R}{2}$; $n = \frac{\sqrt{5}}{2}R$;

2) $m = \frac{\sqrt{5}}{2}R - R$;

3) $a_5 = \sqrt{n \cdot m}$.

Практична робота 5

1. Побудуйте коло. Проведіть хорду кола AB, що дорівнює його радіусу, хорду $BC = AB$, хорду $CD = AB$ і т. д. Скільки таких хорд ви змогли провести? Чи збігся кінець останньої хорди з точкою A? Виміряйте сторони і внутрішні кути утвореного багатокутника. Чи є він правильним?
2. Побудуйте коло і проведіть у ньому два взаємно перпендикулярні діаметри AC і BD. Поділіть кожну з дуг AB, BC, CD, AD навпіл. Середину кожної дуги сполучіть з її кінцями. Виміряйте кути і сторони утвореного багатокутника. Чи є він правильним?

Практична робота 6

1. За допомогою транспортира і лінійки виконайте побудову опуклого багатокутника з рівними сторонами і рівними внутрішніми кутами по $108°$. Позначте його вершини $A_1, A_2, A_3, \ldots$. Скільки вершин має цей багатокутник? Чи є він правильним?
2. Чи можна було визначити до побудови, скільки вершин матиме такий багатокутник? Зробіть відповідні обчислення.
3. Побудуйте серединні перпендикуляри до двох сторін багатокутника. Точку перетину цих перпендикулярів позначте через O.
4. Побудуйте коло з центром O, радіус якого дорівнює OA_1. Чи лежать вершини багатокутника на цьому колі?
5. Побудуйте бісектриси двох внутрішніх кутів багатокутника. Що можна сказати про точку їх перетину I?
6. Опустіть з точки O перпендикуляр OM на сторону AB. Побудуйте коло з центром у точці O, радіус якого дорівнює OM. Яким є багатокутник відносно побудованого кола?

Завдання 12

1°. Знайдіть кути при вершинах і центральні кути правильного: **а)** восьмикутника; **б)** дванадцятикутника; **в)** шістнадцятикутника.

2°. Скільки вершин має правильний багатокутник, у якого центральний кут дорівнює: **а)** $30°$; **б)** $12°$; **в)** $24°$?

3°. Скільки вершин має правильний багатокутник, у якого внутрішній кут дорівнює: **а)** $150°$; **б)** $135°$; **в)** $140°$?

4°. Скільки вершин має правильний багатокутник, у якого зовнішній кут дорівнює: **а)** $36°$; **б)** $24°$; **в)** $60°$?

5. Чи може правильний багатокутник мати внутрішні кути градусної міри: **а)** $20°$; **б)** $48°$?

6. Впишіть у коло правильний: **а)** шестикутник; **б)** восьмикутник; **в)** дванадцятикутник.

7. Опишіть навколо заданого кола правильний: **а)** трикутник; **б)** шестикутник; **в)** квадрат; **г)** восьмикутник.

Для допитливих

1. *Тріангуляцією* багатокутника називають його поділ на трикутники, що мають таку властивість. Ці трикутники або мають спільну сторону або спільну вершину, або не мають спільних точок (тобто вершина одного трикутника не може лежати на стороні іншого). Доведіть, що для довільного багатокутника трикутники тріангуляції можна пофарбувати у три кольори так, що трикутники, які мають спільну сторону, будуть різного кольору.
Порада. Використайте метод індукції (див. с. 246).

2. Багатокутник поділено його діагоналями, що не перетинаються, на трикутники. Доведіть, що вершини багатокутника можна пофарбувати у три кольори так, що всі вершини кожного з отриманих трикутників будуть різного кольору.

8. За даною стороною a побудуйте правильний: **а)** восьмикутник; **б)** дванадцятикутник; **в)** квадрат; **г)** восьмикутник.

У завданнях 9–14 позначено: $\boldsymbol{n}$ – число сторін правильного багатокутника (n-кутника); $\boldsymbol{a_n}$ – сторона вписаного правильного n-кутника; $\boldsymbol{b_n}$ – сторона описаного правильного n-кутника; $\boldsymbol{R}$ або $\boldsymbol{R_n}$ – радіус кола, описаного навколо правильного n-кутника; $\boldsymbol{r}$ або $\boldsymbol{r_n}$ – радіус кола, вписаного в правильний n-кутник (його апофема).

9. Знайдіть сторону правильного n-кутника, якщо:
а) $n = 3$; $R = 12$; **в)** $n = 6$; $R = 3$; **д)** $n = 4$; $R = 8$;
б) $n = 3$; $r = 2$; **г)** $n = 6$; $r = 2$; **е)** $n = 4$; $r = 2$.

10. За даною стороною $a_n = a$ знайдіть R для:
а) $n = 3$; **б)** $n = 4$; **в)** $n = 6$; **г)** $n = 8$; **д)** $n = 12$.

11. За даною стороною $a_n = a$ знайдіть b_n, якщо:
а) $n = 3$; **б)** $n = 4$; **в)** $n = 6$; **г)** $n = 8$; **д)** $n = 12$.

12. За даною стороною $a_n = a$ знайдіть апофему, якщо:
а) $n = 3$; **б)** $n = 4$; **в)** $n = 6$; **г)** $n = 8$; **д)** $n = 12$.

13*. Користуючись калькулятором або таблицями Брадіса, знайдіть:
а) a_7, якщо $R = 12$; **в)** R, якщо $a_{10} = 6$;
б) a_9, якщо $r = 3$; **г)** b_5, якщо $a_5 = 14$.

14*. Доведіть, якщо шестикутник і трикутник вписані в одне коло, то:
а) $r_6 = 0{,}5a_3$, **в)** $r_8 = 0{,}5R_8\sqrt{2+\sqrt{2}}$; **д)** $r_{12} = 0{,}5R_{12}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.
б) $a_8 = R_8\sqrt{2-\sqrt{2}}$; **г)** $a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

15*. Визначте довжини діагоналей правильного восьмикутника, якщо відомо: **а)** радіус R описаного кола; **б)** сторону a.

16*. Визначте довжини діагоналей правильного дванадцятикутника, якщо відомо: **а)** радіус R описаного кола; **б)** сторону a.

17*. У коло, радіус якого дорівнює R, вписано правильний n-кутник. Середини його сторін послідовно сполучені. Знайдіть сторону утвореного багатокутника для: **а)** $n = 6$; **б)** $n = 8$.

18*. У коло вписано правильний восьмикутник. Знайдіть його сторону, якщо сторона квадрата, вписаного у те саме коло, дорівнює 8 см.

19*. У коло вписано правильний восьмикутник зі стороною 4 см. Знайдіть сторону вписаного в це коло: **а)** квадрата; **б)** трикутника; **в)** шестикутника.

20*. У коло вписано правильний дванадцятикутник зі стороною a. Знайдіть сторону правильного трикутника, вписаного в це коло.

21.** У коло, радіус якого дорівнює 12 см, вписано правильний чотирикутник $ABCD$, в який вписано коло, а в нього – правильний трикутник KMN. Знайдіть периметр вписаного трикутника.

22*. Знайдіть відношення площ правильних трикутника, чотирикутника і шестикутника, якщо: **а)** вони описані навколо одного кола; **б)** вони вписані в одне коло; **в)** мають однакові сторони.

23*. У правильному дванадцятикутнику середини сторін через одну послідовно сполучили. Знайдіть сторону утвореного шестикутника, якщо сторона дванадцятикутника дорівнює a.

24*. У правильному восьмикутнику середини сторін через одну послідовно сполучили. Знайдіть сторону утвореного квадрата, якщо сторона восьмикутника дорівнює a.

Для допитливих

Доведіть, якщо A, B, C, D – чотири послідовні вершини правильного семикутника, то виконується співвідношення $\dfrac{1}{AB} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}$.

25*. Виразіть площу правильного шестикутника через: **а)** його сторону; **б)** велику діагональ; **в)** малу діагональ.

26.** Із квадратного аркуша паперу зробили восьмикутник. Спочатку побудували чверті кіл з центрами у вершинах даного квадрата і радіусом, рівним половині діагоналі квадрата. Потім точки їхнього перетину зі сторонами квадрата послідовно сполучили відрізками. По них відрізали кути квадрата. Знайдіть відношення площ квадратного аркуша паперу і восьмикутника.

27*. Правильний трикутник зі стороною a відрізанням трьох кутів перетворили на правильний шестикутник. Знайдіть сторону шестикутника.

28*. Сторона правильного трикутника дорівнює b. Знайдіть радіус кола, вписаного у даний трикутник, і сторону вписаного в це коло: **а)** трикутника; **б)** квадрата; **в)** шестикутника.

29*. Сторона правильного трикутника ABC дорівнює a. На кожній зі сторін AB, BC і CA від вершин A, B і C відповідно відкладені відрізки $AA_1 = \frac{a}{3}$; $BB_1 = \frac{a}{3}$; $CC_1 = \frac{a}{3}$. Знайдіть радіус вписаного в трикутник $A_1B_1C_1$ кола.

30.** Впишіть у задане коло правильний: **а)** п'ятикутник; **б)** десятикутник.

31.** N рівних кіл дотикаються одне до одного і до даного кола, радіус якого дорівнює R. Знайдіть радіус цих кіл, якщо:
а) $N = 3$; **б)** $N = 4$; **в)** $N = 6$.

32*. Правильний трикутник, квадрат і правильний шестикутник мають однакові периметри. Як відносяться їхні площі?

33*. Підлогу настилають паркетинами, які мають форму правильних багатокутників двох видів. Наведіть приклади такого паркету.

34.** Знайдіть найменше число ромбів, з яких можна скласти правильний шестикутник. Яку особливість мають ці ромби?

35.** Дано квадрат зі стороною a. На кожній стороні квадрата зовні нього побудовано трапеції так, що верхні основи трапецій разом з їхніми бічними сторонами утворюють правильний дванадцятикутник. Знайдіть площу цього дванадцятикутника.

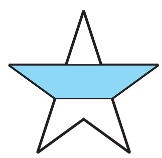
36.** Як вписати в правильний шестикутник правильний трикутник: **а)** найменшого периметра; **б)** найбільшого периметра?

37.** Впишіть у задане коло правильний п'ятнадцятикутник і виразіть його сторону через радіус даного кола.

Для допитливих

1. Відомо, що для деякого опуклого шестикутника $AB_1CA_1BC_1$ виконуються рівності: $AB_1 = B_1C$, $CA_1 = A_1B$, $BC_1 = C_1A$, $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1$. Доведіть, що площа трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює половині площі шестикутника.

2. Доведіть, що в правильної зірки, яку зображено на малюнку, зафарбовано рівно половину її площі.



3. Довжини кожної сторони опуклого шестикутника $ABCDEF$ менші за 1. Доведіть, що довжина однієї з діагоналей AD, BE і CF менша за 1.

Порада. Скористайтеся нерівністю Птолемея (див. с. 89).

4. Семикутник $A_1...A_7$ вписано в коло, причому центр цього кола міститься всередині семикутника. Доведіть, що сума кутів при вершинах A_1, A_3 і A_5 менша за 450°.

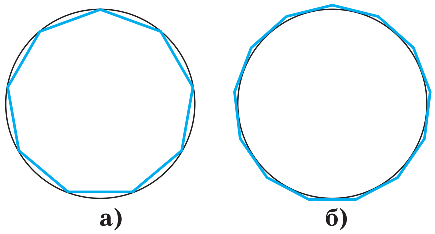
5. В олімпіаді з математики на першість району бере участь 100 школярів. Відомо, що серед довільних чотирьох учасників завжди є хоча б один, знайомий з іншими трьома. Доведіть, що існує учасник, знайомий з усіма 99 іншими школярами.

§ 12. Довжина кола і дуги кола. Радіанна міра кута

Уявіть нитку, яку склали у формі кола так, що її кінці збігаються (мал. 2.9). Візьмемо цю нитку за кінці і розгорнемо у відрізок. Довжина такого відрізка і буде *довжиною кола*.

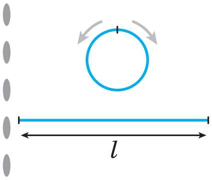
Якщо вписати в коло правильний багатокутник (мал. 2.10-а) або описати навколо цього кола правильний багатокутник (мал. 2.10-б), то довжини їхніх периметрів будуть наближатися до шуканого значення довжини кола тим ближче, чим більше число сторін мають ці багатокутники.

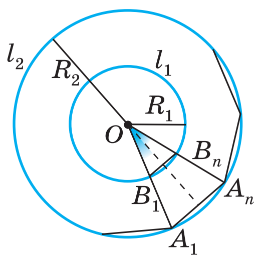
Мал. 2.9



Мал. 2.10

Довжина кола l





Мал. 2.11

Візьмемо два кола зі спільним центром та довільними радіусами. Впишемо в них багатокутники з однаковим числом сторін n так, як зображено на малюнку 2.11 (їхні сторони паралельні).

Центральний кут цих багатокутників дорівнює $\frac{360°}{n}$, а сторони дорівнюють відповідно

$$2R_1 \sin\frac{180°}{n} \text{ і } 2R_2 \sin\frac{180°}{n}.$$

Для допитливих

1. Дано два правильних трикутники. Розріжте їх на найменше можливе число частин так, щоб з них можна було б скласти шестикутник.

2. Дано чотири однакових правильних шестикутники. Розріжте їх на найменше можливе число частин так, щоб з них можна було б скласти правильний шестикутник.

3. Дано три правильних шестикутники. Як зробити якнайменше число розрізів цих фігур, щоб з утворених частин можна було скласти один правильний шестикутник?

4. Тришка відрізав від жупана квадратний шматок. Потім порізав його на 9 трикутних латок і склав у три купки по три латки. Чи може бути так, що довільні дві латки з деякої однієї купки рівні між собою, а з різних купок – не рівні?

Для однойменних правильних багатокутників:

$$\frac{P_1}{2R_1} = \frac{P_2}{2R_2} = \ldots = \underbrace{= n \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}}$$

↑ залежить тільки від n

Тоді периметри цих багатокутників:

$$P_1 = n \cdot 2R_1 \sin\frac{180^\circ}{n} \text{ і } P_2 = n \cdot 2R_2 \sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Звідси:

$$\frac{P_1}{2R_1} = \frac{P_2}{2R_2} = \ldots = n \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Якщо число n буде дуже великим, то довжини кіл l_1 і l_2 майже збігатимуться зі значеннями периметрів відповідних багатокутників. Маємо, що

$$\frac{l_1}{2R_1} = \frac{l_2}{2R_2} = \ldots = \text{const}.$$

Це і є одна з найважливіших сталих математики – *число* π («*пі*»).

Таким чином, маємо, що **довжина кола, радіус якого** $\boldsymbol{R}$**, дорівнює**

$$\boldsymbol{l = 2\pi R}.$$

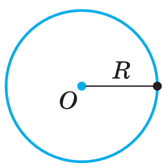
$$\frac{l_1}{2R_1} = \frac{l_2}{2R_2} = \ldots = \pi$$

«const» – *стала*

Якщо в цьому виразі покласти $R = 1$, то отримаємо, що **число π чисельно дорівнює довжині одиничного півкола. Його приблизне значення 3,14159...**

Зауваження. **1.** Наближене значення $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2$ знаходимо в єгиптян у папірусі Рінда (XX–XVII ст. до н. е.).

2. π – літера грецького алфавіту. Нею починається слово, яке в перекладі з грецької означає «край» або «обвід круглого тіла». Ця стала має велике значення для виробничої практики, і тому протягом тисячоліть математики багато попрацювали над її визначенням.



$\boldsymbol{l = 2\pi R}$

3. Значення цього числа обчислювали через периметри вписаних і описаних багатокутників ще в часи Стародавньої Греції. Так, Архімед, вписуючи в коло правильні багатокутники, обчислив перші три знаки числа π. Нідерландський математик Роумен (XVI ст.) знайшов 17(!) знаків цього числа. У XX ст., коли до обчислень залучили ЕОМ, було визначено кілька десятків тисяч знаків числа $\boldsymbol{\pi}$. Знати таку кількість знаків π навряд чи вам знадобиться, а от те, що

$$3{,}14 < \pi < 3{,}15,$$

слід запам'ятати.

Якщо $R = 1$

$\pi = \frac{l}{2} \leftarrow$ чисельно

$\mathbf{3{,}14} < \pi < \mathbf{3{,}15}$

Для допитливих

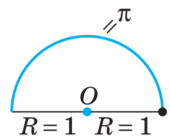
1. Гострокутний трикутник міститься всередині кола. Доведіть, що радіус цього кола не менший за радіус кола, описаного навколо заданого трикутника. Чи буде правильним це твердження для тупокутного трикутника? Чому?

2. Доведіть, що периметр гострокутного трикутника не менший за $4R$.

3. Доведіть, що замкнену ламану одиничної довжини можна вмістити в коло, радіус якого дорівнює 0,25.

4. У коло одиничного радіуса вписано багатокутник, довжини сторін якого знаходяться в межах від 1 до $\sqrt{2}$. Скільки сторін має цей багатокутник?

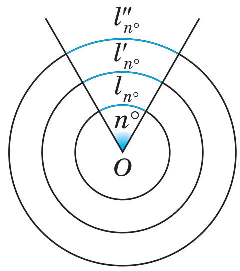
У колі центральному куту 1° відповідає дуга, довжина якої дорівнює $\frac{1}{360}$ довжини всього кола, тобто $\frac{\pi R}{180}$.



Звідси **довжина дуги градусної міри n° дорівнює**

$$l_{n^\circ} = \frac{\pi R}{180^\circ} n^\circ.$$

Розглянемо кілька кіл зі спільним центральним кутом градусної міри n° (мал. 2.12). Відношення довжини кожної з дуг утворених секторів до радіуса відповідного кола дорівнює $\frac{l_{n^\circ}}{R} = \frac{\pi}{180^\circ} n^\circ$ і залежить тільки від міри самого кута. Тоді це відношення можна обрати за міру кута і *вимірювати кут у радіанах*.



Мал. 2.12

1 радіан $= \frac{180^\circ}{\pi}$

$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$ радіан

1 радіан $\approx 57^\circ 18'$

$1^\circ \approx 0{,}017$ радіан

Повному куту градусної міри 360° відповідає 2π радіан.

Розгорнутий кут має π радіан:

$$\pi \text{ радіан} = 180^\circ \;\Rightarrow\; 1 \text{ радіан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 18';$$

$$180^\circ = \pi \text{ радіан} \;\Rightarrow\; 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радіан} \approx 0{,}017 \text{ радіан}.$$

Таким чином, *кут градусної міри n° має радіанну міру*

$$k = \frac{\pi}{180} \cdot n \text{ радіан},$$

а *перевести радіанну міру k кута в градусну* допоможе формула

$$n^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot k.$$

Наприклад:

$$30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \approx \frac{3{,}14}{6} \approx \frac{1}{2} \text{ рад};$$

π рад $= 180^\circ$

$\frac{\pi}{2}$ рад $= 90^\circ$

$\frac{\pi}{3}$ рад $= 60^\circ$

$\frac{\pi}{4}$ рад $= 45^\circ$

$\frac{\pi}{6}$ рад $= 30^\circ$

Для допитливих

Число π чисельно дорівнює довжині одиничного півкола. Якщо подвоювати число сторін вписаних і описаних багатокутників, можна отримати все більше і більше знаків числа π. Дивують досягнення стародавніх геометрів, зокрема Архімеда (287–212 рр. до н. е.). Адже використовуючи алгебру, хитромудро випрямляючи ламану зі сторін вписаного й описаного 96-кутників, він дійшов висновку, що π міститься у межах від $3\frac{10}{71}$ до $3\frac{1}{7}$. Така різниця правої і лівої меж $\left(3\frac{1}{7} - 3\frac{10}{71}\right)$ несуттєво відрізняється від 0,002. Це означає, що Архімед обчислив π з похибкою не більш як 0,001! Ми й досі користуємося досягненням Архімеда, беручи наближене значення $\pi \approx 3{,}14$.

$30° \approx 0{,}52$ рад

$45° \approx 0{,}79$ рад

$60° \approx 1{,}0$ рад

$90° \approx 1{,}6$ рад

$$\frac{\pi}{2}\text{ рад} = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 90°;$$

$$3\text{ рад} = 3 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 3 \cdot \frac{180°}{3{,}14} \approx 172°.$$

k (радіан)	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
$n°$	180°	90°	60°	45°	30°

Практична робота 7

1. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 8 см. Впишіть у коло правильний чотирикутник. Виміряйте його сторону і обчисліть периметр P_4.

2. Побудуйте правильні восьмикутник, шістнадцятикутник, вписані у таке саме коло. Виміряйте їхні сторони та знайдіть периметри P_8, P_{16}.

3. Обчисліть відношення периметра кожного багатокутника до діаметра кола. Отримані результати запишіть у таблицю.

	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
P_n			
$\frac{P_n}{d}$			

4*. Виконайте завдання попередніх пунктів для описаних правильних багатокутників.

5. Зробіть висновок.

Практична робота 8*

1. Накресліть коло одиничного радіуса і впишіть у нього правильний восьмикутник.

2. Опишіть навколо одиничного кола правильний восьмикутник.

3. Виміряйте довжини сторін побудованих восьмикутників, обчисліть їх периметри.

4. Оцініть значення числа π за допомогою значень периметрів цих багатокутників і запишіть у такому вигляді: $\ldots < \pi < \ldots$.

Завдання 13

1°. Обчисліть довжину кола, якщо його радіус дорівнює: **а)** 10 см; **б)** 0,5 м; **в)** 3,14 мм.

2°. Заповніть таблицю, використовуючи формулу для обчислення довжини кола ($\pi \approx 3{,}14$).

C			18π		9,42			320,28
R	5	7		0,7		34,5	1/3	

3°. Як зміниться довжина кола, якщо його радіус: **а)** збільшити вдвічі; **б)** зменшити утричі; **в)** зменшити в k разів; **г)** збільшити на 1 см?

Для допитливих

Як наближене значення π у давнину використовували такі числа: 3; $\sqrt{10}$; $\frac{22}{7}$; $\frac{355}{113}$. Оцініть похибку, якщо замінити π цими числами.

4. Як зміниться радіус кола, якщо довжину кола: **а)** збільшити в n разів; **б)** зменшити в n разів?

5. Знайдіть довжину кола, описаного навколо: **а)** правильного трикутника зі стороною a; **б)** прямокутного трикутника з катетами a і b; **в)** рівнобедреного трикутника з основою a і бічною стороною b; **г)** прямокутника зі стороною a і гострим кутом α між діагоналями; **д)** правильного шестикутника, площа якого дорівнює $24\sqrt{3}$ см^2.

6. Сторони прямокутника дорівнюють 5 см і 9 см. Знайдіть довжину кола, описаного навколо цього прямокутника.

7. Знайдіть довжину кола, вписаного в: **а)** квадрат зі стороною a; **б)** рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою c; **в)** прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α; **г)** рівнобедрений трикутник з кутом при основі α і висотою, проведеною до основи h.

8. Периметр правильного трикутника дорівнює $24\sqrt{3}$ см. Обчисліть радіус кола, вписаного в цей трикутник.

9*. Довжина кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, дорівнює 60π см. Обчисліть периметр цього трикутника, якщо його основа дорівнює 48 см.

10**. Центр кола, вписаного у прямокутний трикутник, віддалений від вершин його гострих кутів на $\sqrt{5}$ см і $\sqrt{10}$ см. Знайдіть довжину цього кола.

11. Знайдіть радіус кола, вписаного в правильний n-кутник зі стороною 6 см, якщо: **а)** $n = 3$; **б)** $n = 4$; **в)** $n = 6$.

12. Діаметр вала колодязя дорівнює 32 см, глибина колодязя (до рівня води) – 6,5 м. Скільки разів треба повернути ручку вала, щоб витягти відро води?

13. Барабан лебідки зробив 5 обертів. На скільки піднявся при цьому вантаж, якщо діаметр барабана дорівнює 0,5 м?

14*. Швидкість електровоза становить 72 км/год. Радіус його колеса – 1 м. Колесо котиться рейками без проковзування. Скільки обертів за 1 с робить колесо цього електровоза?

15*. П'ять однакових труб завдовжки 50 см кожна і діаметром 200 мм треба запакувати в ящик прямокутної форми. Обчисліть розміри ящика, на який знадобилося б найменше матеріалу.

16°. Знайдіть довжину дуги кола, радіус якого дорівнює 6 см, якщо її градусна міра становить: **а)** 30°; **б)** 45°; **в)** 60°; **г)** 90°.

17°. Скільки градусів містить центральний кут, якщо дуга, що йому відповідає, становить: **а)** $\frac{1}{3}$; **б)** $\frac{1}{4}$; **в)** $\frac{1}{5}$; **г)** $\frac{1}{6}$; **д)** $\frac{2}{3}$; **е)** $\frac{3}{4}$ частини кола?

18°. Радіус кола $R = 1$ м, знайдіть довжину дуги цього кола, якщо її градусна міра: **а)** 45°; **б)** 30°; **в)** 120°; **г)** 60°30′.

19. Дві точки ділять коло на дві дуги. Градусна міра однієї з них в 11 разів більша за другу. Яка градусна міра кожної з дуг?

20. Дві точки ділять коло на дві дуги, різниця градусних мір яких дорівнює 60°. Знайдіть градусну міру кожної з дуг.

21. Відстань між серединами зубців колеса, виміряна по дузі його кола, дорівнює 47 мм. Діаметр колеса 60 см. Скільки зубців має колесо?

Для допитливих

Те, що відношення довжини кола до його діаметра є величиною сталою, було видатним відкриттям. Ще в давнину люди широко використовували це число під час побудови пірамід і зрошувальних систем, нарахуванні податків тощо.

У Вавилоні за це відношення брали число 3. Така неточність призводила до похибок у будівництві. Вважається, що Вавилонська вежа впала тому, що люди розгнівили Всевишнього. А можливо, це відбулося через число π – розрахунки були неточними?

22*. При повороті дороги на 30° зроблено заокруглення радіусом 500 м. На скільки метрів скоротилася довжина шляху?

23*. Поїзд рухається зі швидкістю 50 км/год уздовж дуги, радіус якої дорівнює 2 км. На який кут він повернеться за 45 с?

24. Довжина хорди дорівнює a. Знайдіть довжину дуги, яку стягує хорда, якщо вона відповідає центральному куту: **а)** 60°; **б)** 90°; **в)** 120°.

25. За даною довжиною дуги l знайдіть хорду, що її стягує, якщо градусна міра дуги: **а)** 30°; **б)** 45°; **в)** 90°.

26°. Знайдіть радіанну міру кутів: **а)** 30°; **б)** 45°; **в)** 60°; **г)** 90°; **д)** 120°.

27*. Мотоцикл рухався 45 с по дузі кола, радіус якого дорівнює 2 км, а відповідний центральний кут – 0,18 рад. Яка швидкість мотоцикла?

28.** Сторона квадрата дорівнює a. Кожна вершина є центром кола, що має радіус a. Обчисліть периметр криволінійного чотирикутника, обмеженого дугами цих кіл (мал. 2.13).

29.** Через дві суміжні вершини квадрата проведено коло так, що дотична до нього, проведена з третьої вершини, дорівнює подвоєній стороні квадрата. Знайдіть довжину цього кола, якщо площа квадрата дорівнює 10 см^2.

30.** Сторона правильного шестикутника дорівнює a. Кожна його вершина є центром кола, радіус якого – a. Знайдіть довжину лінії, що відповідає розетці, утвореній дугами цих кіл (мал. 2.14).

31*. При перетині двох кіл дуги, що стягує їхня спільна хорда, дорівнюють 45° і 60° відповідно. Яке коло має більшу довжину? Відповідь обґрунтуйте.

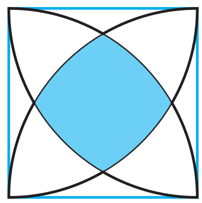
32*. Навколо двох рівновеликих прямокутників описані кола. Чи будуть ці кола рівновеликими? Відповідь обґрунтуйте.

33*. Діаметр кола поділено на n рівних частин, і на кожній із них як на діаметрі побудовано кола. Знайдіть залежність між довжиною даного кола і сумою довжин побудованих кіл.

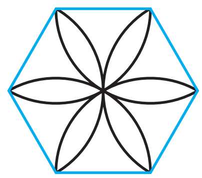
34.** Доведіть, що площа кільця дорівнює добутку ширини кільця і довжини кола, яке рівновіддалене від внутрішньої і зовнішньої меж кільця.

35.** Діаметр одного колеса вдвічі більший за діаметр другого. Перше колесо робить один оберт за 1 с, а друге – за 2 с. На зовнішньому колі першого колеса зафіксовано точку A, а на другому – точку B. Яка точка швидше пройде шлях 1 км (по колу), якщо колеса почали обертатись одночасно?

36.** До круга, радіус якого дорівнює r, дотикаються шість кругів таких самих радіусів, які попарно дотикаються й один до одного. Утворена фігура охоплена концентричним кільцем, рівновеликим сумі площ заданих семи кругів. Знайдіть ширину цього кільця.



Мал. 2.13



Мал. 2.14

Для допитливих

Незважаючи на популярність серед математиків, число, яке ми сьогодні знаємо як «число π», протягом багатьох століть не мало позначення певним символом. Першим позначив його грецькою літерою π англійський учитель *Вільям Джонс* лише в 1706 р. Проте роботи провінційного вчителя мало хто читав. І тільки *Леонард Ейлер* – «перша скрипка» в науці XVIII ст. – прийняв це зручне позначення і став використовувати його у своїх працях.

Рекорд докомп'ютерної ери обчислення числа π – 707 знаків – установив англійський математик *Вільям Шенкс*. У 1937 р. їх помістили на купол галереї паризького Палацу Відкриттів. Проте пізніше комп'ютерна перевірка показала, що в 518-му знаку Шенкс припустився помилки, і останні 180 знаків його обчислення неправильні!

§ 13. Площа круга, кругового сектора і сегмента

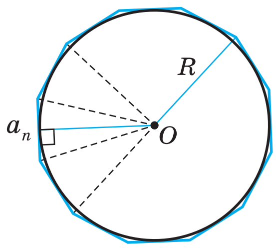
Нагадаємо, що *кругом* називається внутрішня частина площини, що обмежена колом (разом з точками кола). Це множина точок площини, віддалених від центра кола на відстань, не більшу за радіус кола.

Центр відповідного кола називають *центром круга*, а радіус цього кола – *радіусом круга*.

Розглянемо круг, радіус якого дорівнює R. Опишемо навколо нього правильний багатокутник (мал. 2.15). Нехай він має n сторін. Площа правильного n-кутника дорівнює

$$S_n = \frac{1}{2}P_n R,$$

де P_n – його периметр.



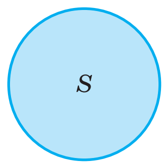
Мал. 2.15

$$\frac{S_1}{R_1^2} = \frac{S_2}{R_2^2} = \text{const}$$

Зі збільшенням числа сторін багатокутника його периметр дедалі більше наближатиметься до довжини кола $2\pi R$, а значення його площі – до площі круга. Тоді площа такого багатокутника зі збільшенням n наближатиметься до числа

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2.$$

Таке саме значення для площі круга ми отримаємо, якщо в задане коло будемо вписувати правильний багатокутник. Тільки якщо в першому випадку зі збільшенням n послідовність площ описаних багатокутників є спадною, то для вписаних багатокутників вона є зростаючою.



Маємо: площа описаного багатокутника більша за площу круга і при великих n наближається до значення πR^2; площа вписаного багатокутника менша за площу круга і при великих n наближається до значення πR^2. Тоді площа самого круга дорівнює πR^2.

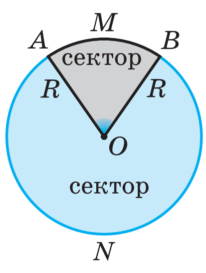
$\boldsymbol{S = \pi R^2}$

Площа круга обчислюється за формулою

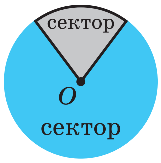
$$\boldsymbol{S = \pi R^2}.$$

Знайдемо тепер площу сектора і сегмента.

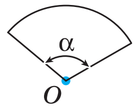
Нагадаємо, що *круговим сектором* називається частина центрального кута кола, яку обмежує відповідна дуга цього кола (мал. 2.16) – *дуга сектора*. На малюнку 2.16 зображено два сектори з дугами AMB і ANB.



Мал. 2.16



Розглянемо сектор круга радіуса R, який відповідає центральному куту α (мал. 2.17). Площа круга дорівнює πR^2, тоді площа сектора з центральним кутом $1°$ дорівнює $\frac{\pi R^2}{360}$.



Площа сектора з градусною мірою центрального кута $\alpha = n°$ обчислюється за формулою

$$S_{сек} = \frac{\pi R^2}{360} n.$$

Якщо відповідний центральний кут має радіанну міру $\alpha = k$ рад, то

$$S_{сек} = \frac{\pi R^2}{2\pi} k = \frac{1}{2} R^2 k.$$

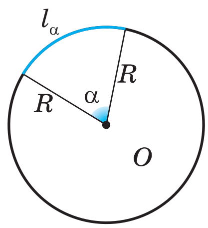
$\alpha = n°$

$S_{сек} = \frac{\pi R^2}{360} n$

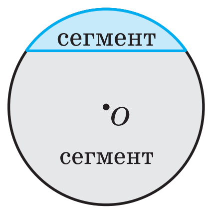
$\alpha = k$ рад

$S_{сек} = \frac{1}{2} R^2 k$

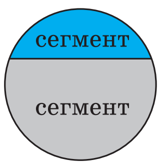
Сегментом називається частина круга, обмежена хордою і відповідною їй дугою (мал. 2.18). Відповідну хорду називають *основою сегмента*, а відрізок діаметра, перпендикулярного до неї і розміщеного всередині сегмента, – його *висотою* (мал. на полі).

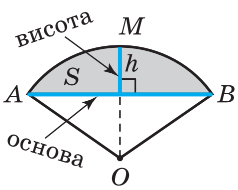


Мал. 2.17



Мал. 2.18

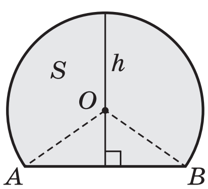




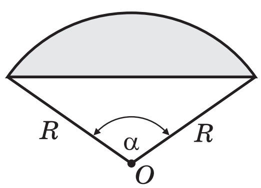
$S = S_{сек} - S_{\triangle AOB}$

Для *обчислення площі сегмента, градусна міра дуги якого менша за 180°* (менша за π радіан), його зручно розглядати як частину сектора. Площу такого сегмента можна подати у вигляді різниці площ сектора і рівнобедреного трикутника, основою якого є хорда, а бічними сторонами – радіуси кола (мал. 2.19).

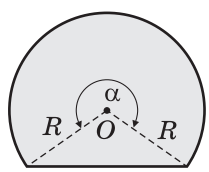
Якщо розглядати *сегмент, градусна міра дуги якого більша за 180°* (більша за π радіан), то його площа дорівнюватиме сумі площ сектора і рівнобедреного трикутника, основою якого є хорда, а бічними сторонами – радіуси кола (мал. 2.20).



$S = S_{сек} + S_{\triangle AOB}$



Мал. 2.19



Мал. 2.20

Практична робота 9

1. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 8 см. Обчисліть площу круга S, обмеженого колом, за відомою вам формулою, взявши $\pi \approx 3{,}1415$.
2. Побудуйте вписаний у коло правильний чотирикутник і визначте його площу S_4. Побудуйте вписані в це коло правильні восьмикутник і шістнадцятикутник. Проведіть у них апофему. Виміряйте апофеми і сторони восьмикутника та шістнадцятикутника, обчисліть їхні площі S_8, S_{16}.
3. Знайдіть різницю між площею кожного з побудованих багатокутників і площею круга $S - S_n$ і запишіть їх у таблицю.

	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$
S_n			
$\lvert S - S_n \rvert$			

4*. Виконайте завдання попередніх пунктів для правильних описаних багатокутників.

5. Зробіть висновок.

Завдання 14

1°. Обчисліть площу круга, радіус якого дорівнює: **а)** 2 см; **б)** 15 мм; **в)** $\sqrt{3}$.

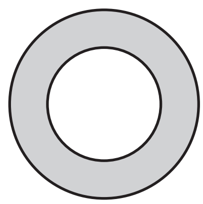
2°. Заповніть таблицю, використовуючи формулу для обчислення площі круга.

S			36		144π			3,14
R	3	5		2/7		18,5	$\sqrt{3}$	

3°. Як зміниться площа круга, якщо його радіус: **а)** збільшити вдвічі; **б)** зменшити у 5 разів?

4°. У скільки разів збільшиться площа круга, якщо його діаметр збільшити: **а)** вдвічі; **б)** у 4 рази; **в)** в m разів?

5°. Знайдіть площу кругового кільця (мал. 2.21), обмеженого двома концентричними колами, радіуси яких дорівнюють: **а)** 4 см і 6 см; **б)** 4,5 м і 6,5 м; **в)** a і b ($a > b$).



Мал. 2.21

6. Обчисліть площу круга, якщо довжина кола дорівнює 16π см.

7. Знайдіть площу круга, описаного навколо: **а)** прямокутника зі сторонами a і b; **б)** прямокутного трикутника з катетом a і протилежним кутом α; **в)** рівнобедреного трикутника з кутом при основі α і висотою h, проведеною до основи.

8. Знайдіть площу круга, вписаного в: **а)** рівносторонній трикутник зі стороною a; **б)** прямокутний трикутник з катетом a і прилеглим до нього гострим кутом α; **в)** рівнобедрений трикутник з бічною стороною a і кутом α, що лежить проти основи; **г)** рівнобедрену трапецію з більшою основою a і гострим кутом α.

9. Знайдіть відношення площі круга до площі вписаного в нього: **а)** квадрата; **б)** правильного трикутника; **в)** правильного шестикутника.

Для допитливих

Римський архітектор *Витривій* (I ст. до н. е.) використовував грубе наближення числа π, що призвело до прорахунків у будівництві відомого Римського театру.

І у наш час деякі ультрамодні конструкції не витримують випробувань на міцність через «витівки» числа π. Наприклад, московський «Аквапарк» зруйнувався, можливо, саме з цієї причини.

10. Знайдіть відношення площі круга до площі описаного навколо нього правильного: **а)** трикутника; **б)** чотирикутника; **в)** шестикутника.
11. Знайдіть відношення площ кругів, вписаного в правильний трикутник і описаного навколо правильного трикутника.
12. Знайдіть відношення площі круга, описаного навколо квадрата, до площі круга, вписаного в нього.
13. Що більше: площа круга, побудованого на відрізку a як на діаметрі, чи площа півкруга, побудованого на відрізку $2a$ як на діаметрі? Відповідь обґрунтуйте.
14*. Навколо правильного трикутника з площею S описано коло, а друге коло вписано в цей трикутник. Знайдіть площу кільця, утвореного колами.
15*. Навколо круга, площа якого дорівнює S, описано ромб з гострим кутом $30°$. Знайдіть площу ромба.
16*. Під час переобладнання водопровідної мережі дві водопровідні труби діаметрами 3 дм і 4 дм треба замінити однією трубою з тією самою пропускною спроможністю. Яким має бути діаметр цієї труби?
17. Довжина кола циркової арени дорівнює 41 м. Знайдіть діаметр і площу арени.
18*. Скільки кругів діаметром 50 см можна вирізати зі шматка жерсті прямокутної форми розміром 130×225 см? Яка частина матеріалу залишиться?
19*. Якої товщини шар треба зняти з круглого мідного дроту, що має площу перерізу 1156 мм^2, щоб дріт пройшов крізь отвір діаметром 38,5 мм?
20*. Токар має обточити вал, діаметр якого 24 см, так, щоб площа його поперечного перерізу стала вдвічі меншою. На скільки йому треба зменшити діаметр вала?
21*. Навколо круглої клумби, радіус якої дорівнює 3 м, є декоративне кільце завширшки 0,5 м. Скільки треба гальки, щоб посипати доріжку, якщо на 1 м^2 кільця потрібно 0,7 дм^2 гальки?
22°. Знайдіть площу сектора круга, радіус якого дорівнює R, якщо відповідний цьому сектору центральний кут дорівнює: **а)** $40°$; **б)** $90°$; **в)** $150°$; **г)** $240°$; **д)** $300°$; **е)** $330°$.
23°. Знайдіть площу сектора круга, радіус якого 6 см, якщо відповідний цьому сектору центральний кут дорівнює: **а)** $\frac{\pi}{10}$; **б)** $0{,}75\pi$; **в)** $1\frac{5}{6}\pi$.
24°. Чи може сектор круга бути його сегментом? Відповідь обґрунтуйте.
25. Із круга, радіус якого дорівнює 10 см, вирізано сектор з дугою $60°$. Знайдіть площу частини круга, що залишилася.
26. Площа сектора з центральним кутом $72°$ дорівнює S. Знайдіть радіус сектора.
27. Дано круг, радіус якого дорівнює R. Знайдіть площу сектора цього круга, що має дугу завдовжки: **а)** R; **б)** l.
28. Знайдіть площу кругового сегмента, що обмежений хордою, яка дорівнює 7 см, та дугою $90°$.
29*. Знайдіть площу кругового сегмента з основою $a\sqrt{3}$ і висотою $\frac{a}{2}$.
30*. Радіус круга дорівнює R. Знайдіть площу тієї частини круга, яка розміщена поза вписаним у нього: **а)** квадратом; **б)** правильним трикутником; **в)** правильним шестикутником.

Для допитливих

Чи знаєте ви, що третього місяця чотирнадцятого дня кожного року святкується Всесвітній день числа π – фанати легендарного числа збираються в Інтернеті?

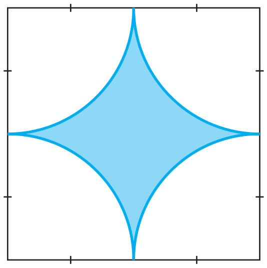
Будь-хто із землян може взяти участь у глобальному проекті «Pi-Hex». І це не просто розваги комп'ютерних гурманів, а серйозний науковий проект. Так, у 2000 р. наукова команда планети Земля обчислювала окремі знаки у двійковій системі запису числа π.

31*. Три кола, радіуси яких 6 см, попарно дотикаються одне до одного. Знайдіть площу: **а)** круга, дуга якого проходить через точки дотику цих кіл; **б)** площу криволінійного трикутника, обмеженого дугами цих кіл; **в)** круга, вписаного в криволінійний трикутник, обмеженого дугами цих кіл.

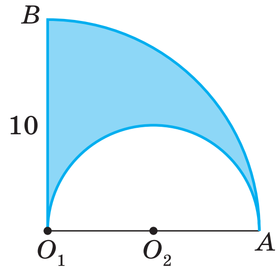
32*. Сторона квадрата на малюнку 2.22 дорівнює 8 см. Обчисліть площу зафарбованої фігури.

33*. На малюнку 2.23 зображено чверть кола і півколо. Знайдіть площу зафарбованої фігури.

34.** У прямокутний трикутник з довжинами катетів a і b вписано півкруг так, що його центр міститься на гіпотенузі трикутника. Знайдіть площу цього півкруга.



Мал. 2.22



Мал. 2.23

35.** З центром у вершинах квадрата побудовано круги, радіуси яких a. Знайдіть площу частини площини, спільну для всіх чотирьох побудованих кругів, якщо сторона квадрата дорівнює a.

36.** Одна хорда півкруга ділить другу його хорду навпіл. Яка з цих хорд відтинає від даного півкруга сегмент більшої площі? Відповідь обґрунтуйте.

37.** Два рівні півкруги, радіуси яких r, накладено так, що їхні діаметри паралельні, а середина дуги кожного з них збігається з центром другого. Знайдіть площу спільної частини цих півкругів.

38.** Висота правильного трикутника дорівнює m і є діаметром кола. Знайдіть довжину частини кола, яка міститься всередині цього трикутника.

39.** У круговий сектор із центральним кутом α вписано круг. Знайдіть відношення площі сектора до площі цього круга.

40.** До двох зовні дотичних кіл провели спільну дотичну. Знайдіть площу фігури, обмежену дугами кіл і дотичною, якщо радіуси цих кіл дорівнюють r і R.

41.** Сектор із центральним кутом $60°$ поділено прямою, перпендикулярною до його осі симетрії, на дві рівновеликі частини. Периметр якої частини менший?

Завдання для повторення розділу II

1. Дайте означення багатокутника.
2. Який багатокутник називається опуклим?
3. Який багатокутник називається правильним?
4. Сформулюйте властивості: **а)** опуклих багатокутників; **б)** правильних багатокутників.
5. Запишіть для правильного n-кутника формули обчислення площі та радіусів описаного і вписаного кіл через довжину його сторони.

Для допитливих

У 1949 р. американський математик Дон фон Нейман обчислив на одній з перших обчислювальних машин 2037 знаків числа π. Пізніше в 1958 р. було обчислено 10 000 знаків числа π, у 1961 р. – 100 000, у 1973 р. – 1 мільйон.

6. Запишіть формулу для знаходження площі правильного n-кутника через радіус описаного навколо нього кола.
7. Поясніть зміст числа π через довжину кола одиничного радіуса.
8. Запишіть градусну міру кута, що має: **а)** π радіан; **б)** 2 радіани; **в)** 1 радіан; **г)** m радіан.
9. Запишіть радіанну міру кута, що має: **а)** 180°; **б)** 360°; **в)** 1°; **г)** n°.
10. Запишіть формули для знаходження довжини кола і дуги кола, радіус якого R.
11. Запишіть формули для обчислення площі круга, радіус якого дорівнює R, площ кругового сектора і сегмента.
12. Знайдіть суму кутів опуклого: **а)** двадцятикутника; **б)** п'ятнадцятикутника.
13. Скільки вершин має опуклий багатокутник, сума кутів якого дорівнює: **а)** 1080°; **б)** 1980°?
14. Чи може кут α правильного багатокутника дорівнювати: **а)** 165°; **б)** 125°?
15. Навколо правильного n-кутника зі стороною 3 см описано коло. Знайдіть радіус цього кола, якщо: **а)** $n = 3$; **б)** $n = 4$; **в)** $n = 6$.
16. У правильний n-кутник вписано коло, радіус якого дорівнює 3 см. Знайдіть сторону n-кутника, якщо: **а)** $n = 3$; **б)** $n = 4$; **в)** $n = 6$.
17*. Скільки діагоналей має: **а)** десятикутник; **б)** п'ятнадцятикутник?
18. Скільки вершин має опуклий багатокутник, у якого: **а)** усі кути по 150°; **б*)** чотири кути по 125°, а інші по 152°?
19*. У коло, радіус якого R = 12 см, вписано правильний чотирикутник $ABCD$, у який вписано коло, а в нього – правильний трикутник KMN. Знайдіть периметр цього трикутника.
20*. У коло вписано правильний трикутник ABC, у який вписано коло, а в нього – правильний чотирикутник $KLMN$. Знайдіть радіус найбільшого кола, якщо периметр чотирикутника дорівнює 16 см.
21*. Коло дотикається до двох сторін трикутника, а його центр лежить на третій стороні. Знайдіть радіус кола, якщо: **а)** дві сторони трикутника, до яких дотикається коло, дорівнюють a і b, а кут між ними – α; **б)** трикутник рівносторонній і його висота дорівнює h.
22. Усередині квадрата зі стороною 4 см зроблено отвір у вигляді круга, площа якого дорівнює 4,5 см^2. Знайдіть площу утвореної фігури.
23*. У круг, радіус якого дорівнює 4 см, вписано n однакових кругів, що попарно дотикаються один до одного. Знайдіть площу криволінійного багатокутника, обмеженого n кругами, якщо: **а)** $n = 3$; **б)** $n = 4$; **в)** $n = 6$.
24*. Знайдіть гострий кут ромба, якщо його площа дорівнює 32 см^2, а довжина кола, вписаного в цей ромб, становить 4π см.
25. У коло вписано квадрат, а в квадрат – коло. Знайдіть площу кільця, утвореного колами, якщо сторона квадрата дорівнює 4 см.

Для допитливих

Для того щоб запам'ятати значення числа π, вигадували багато «правил». Ось одне з них: **«Три я взяв у кошик»**. У цій фразі номер слова є номером цифри числа, а кількість літер у слові відповідає цифрі, яка стоїть у відповідному розряді.

Наведемо ще одне «правило» (початок XX ст.): **«Кто и шутя и скоро пожелаетъ пи узнать, число уже знаетъ»**. Воно «працює» за принципом попереднього. Причому треба зберігати стару орфографію, враховувати і твердий знак наприкінці слова.

Спробуйте й ви вигадати своє «правило».

Рекорд запам'ятовування числа π встановив у 2004 р. український лікар зі Львова *Андрій Слюсарчук*. Він за 10 днів завчив 500 000 знаків числа π. До того «рекордсменом числа π» був японець, який завчив 42 000 знаків за 10 років.

26*. У коло вписано правильний шестикутник, а в нього – коло. Площа кільця, утвореного колами, дорівнює 9π см^2. Знайдіть сторону шестикутника.

27.** Знайдіть найменшу й найбільшу діагоналі правильного десятикутника, сторона якого дорівнює 1.

28.** Доведіть, що коли в опуклому $(2n + 1)$-кутнику, вписаному в коло, всі кути рівні, то цей $(2n + 1)$-кутник – правильний.

29.** Знайдіть відношення площі правильного п'ятикутника до площі трикутника, утвореного стороною цього п'ятикутника і його двома діагоналями, що виходять з кінців цієї сторони.

30.** Діагоналі A_1A_6 і A_2A_9 правильного двадцятикутника перетинаються в точці B. Доведіть, що трикутники A_1A_2B і A_6A_9B – правильні, а діагональ A_1A_6 дорівнює діаметру кола, вписаного у даний багатокутник.

Готуємося до тематичного оцінювання № 3

Варіант I

1. У правильному багатокутнику сума його внутрішніх кутів дорівнює $5580°$. Знайдіть число сторін і діагоналей багатокутника.
2. Скільки сторін має правильний багатокутник, кожний із внутрішніх кутів якого дорівнює $144°$?
3. Сторони двох правильних п'ятикутників відносяться як $5:7$. Площа більшого п'ятикутника дорівнює 98 см^2. Знайдіть площу меншого п'ятикутника.
4. Сторона правильного трикутника, вписаного в коло, дорівнює $\sqrt{6}$ см. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в це саме коло.

Варіант II

1. У правильному багатокутнику 14 діагоналей. Знайдіть число його сторін і суму внутрішніх кутів.
2. Обчисліть внутрішні і зовнішні кути правильного n-кутника, якщо $n = 15$.
3. Площі двох шестикутників відносяться як $4:9$. Знайдіть сторону більшого з них, якщо сторона меншого дорівнює 12 см.
4. У квадрат зі стороною 8 см вписано коло. Знайдіть сторону правильного трикутника, вписаного в це саме коло.

Готуємося до тематичного оцінювання № 4

Варіант I

1. Знайдіть довжину кола, діаметр якого дорівнює 10 см.
2. Радіус кола дорівнює 6 см. Знайдіть довжину дуги, що містить $120°$.
3. Знайдіть радіанну міру кута $75°$.
4. Знайдіть площу сектора круга, радіус якого дорівнює 5 см, якщо відповідний цьому сектору центральний кут становить $105°$.

Варіант II

1. Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює 4 см.
2. Довжина дуги кола дорівнює 15 см, а її градусна міра $18°$. Знайдіть радіус кола.
3. Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює $\pi : 12$.
4. Знайдіть площу сектора круга, якщо радіус круга дорівнює 10 см, а дуга сектора містить $210°$.

Для допитливих

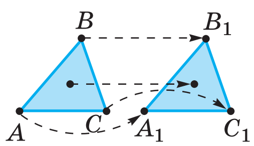
Стародавні єгиптяни за площу круга брали число, що дорівнює $(8d/9)^2$, де d – діаметр круга. Це означає, що число π в них дорівнювало $(16/9)^2$, що точніше, ніж у вавилонян (с. 101). Це було наслідком того, що єгиптяни наближено розглядали круг як квадрат, у якого від кожного кута відрізано прямокутний рівнобедрений трикутник і катети якого дорівнюють одній третій сторони квадрата. Оцініть похибку, якщо за π взяти $(16/9)^2$.

Розділ III
ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ НА ПЛОЩИНІ

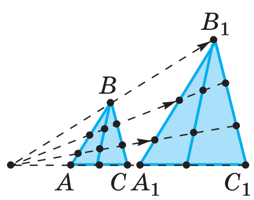
В цьому розділі ми розглянемо одну з найважливіших тем геометрії – перетворення фігур на площині (кажуть «перетворення площини»). Ідея перетворень однієї фігури в іншу є провідною ідеєю сучасної математики. Її використовують у різноманітних розділах математики для доведення дивовижних і складних теорем.

Ми тільки доторкнемося до цієї надзвичайно цікавої теми, оскільки вона виходить далеко за межі шкільного курсу математики.

§ 14. Геометричні перетворення на площині та їх властивості



У 7-му класі рівні відрізки, кути, трикутники ми означали як фігури, що можна сумістити. Тобто будь-якій точці однієї з рівних фігур можна поставити у відповідність певну точку другої з цих фігур. Зрозуміло, що при цьому відстань між двома точками одного з рівних трикутників дорівнює відстані між відповідними їм точками другого трикутника і кути між відповідними відрізками двох рівних трикутників однакові.



Якщо розглядати два подібні трикутники, то і в цьому випадку будь-якій точці одного з цих трикутників можна поставити у відповідність певну точку іншого. Саме це ми й робили, коли використовували властивості подібності у 8-му класі, наприклад, при збільшенні малюнка. Зрозуміло, що тепер відстань між двома точками одного трикутника не дорівнюватиме відстані між двома відповідними їм точками другого трикутника, а кути – зберігатимуться.

Геометри не могли обійти увагою такі цікаві властивості геометричних фігур. Їх вивчення й узагальнення привело до появи поняття *геометричного перетворення*.

Кажуть, що задано геометричне перетворення, якщо вказано спосіб, як кожній точці A однієї фігури поставити у відповідність єдину точку A_1 іншої. (Причому різним точкам A і B відповідають різні точки A_1 і B_1.)

Вихідну сукупність точок називають *прообразом*, а отриману – *образом*.

Зауваження. Якщо здійснюється друге таке перетворення, в якому прообраз і образ міняються місцями, то таке перетворення називають *оберненим* першому.

Геометричні перетворення, які зберігають відстань між довільними парами точок, називають рухом.

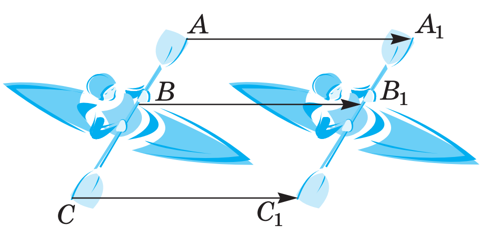
При таких перетвореннях не змінюються міри кутів; форма і розмір фігури (тобто фігури прообразу і образу рівні). Ми будемо вивчати *такі типи руху: паралельне перенесення, поворот і симетрія.*

ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ

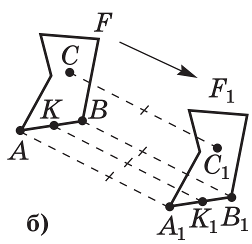
Паралельним перенесенням називається перетворення, при якому дві довільні точки A і B фігури-прообразу перетворюються на точки A_1 і B_1 фігури-образу так, що $AA_1 = BB_1$ і $AA_1 \parallel BB_1$ (або точки A, A_1 та B, B_1 лежать на одній прямій).

Маємо, що $AA_1 \parallel BB_1$ і $AA_1 = BB_1$, тоді чотирикутник AA_1B_1B – паралелограм.

Підкреслимо, що ми розглядали дві довільні точки A і B фігури-прообразу. Тобто, якщо взяти інші її точки, наприклад C, ... (образи C_1, ...) отримаємо паралелограми CC_1B_1B, CC_1A_1A, ..., сторони яких $CC_1 = AA_1 = BB_1 = \ldots$ (мал. 3.1).



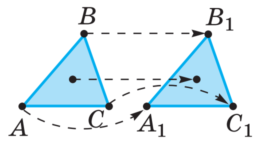
а)



б)

Мал. 3.1

$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

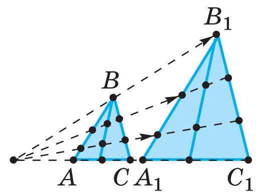


Перетворення:

$\triangle ABC \to \triangle A_1B_1C_1$

прообраз $\to$ *образ*

$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$



Обернене перетворення:

$\triangle ABC \leftarrow \triangle A_1B_1C_1$

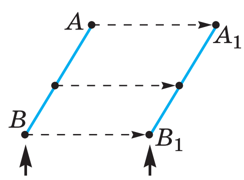
образ $\leftarrow$ *прообраз*

$AB \xrightarrow[\text{перенесення}]{\text{паралельне}} A_1B_1$

$AA_1 \parallel BB_1$

$AA_1 = BB_1$

....



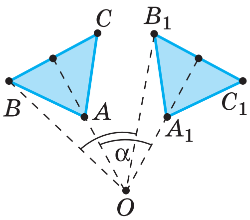
прообраз *образ*

ПОВОРОТ

Поворотом з центром у точці O на кут α називається перетворення, яке переводить довільну точку A фігури-прообразу в точку A_1 фігури-образу так, що A і A_1 розташовані на одній відстані від точки O і $\angle AOA_1 = \alpha$.

$\triangle ABC \xrightarrow[\text{поворот}]{} \triangle A_1B_1C_1$

α – кут повороту



O – центр повороту

Тобто точка-прообраз A і точка-образ A_1 містяться на колі з центром у точці O, а центральний кут AOA_1 цього кола дорівнює α (мал. 3.2).

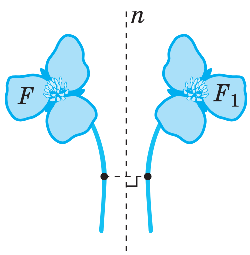
Підкреслимо, що ми розглядали довільну точку A фігури-прообразу. Якщо взяти іншу точку B вихідної фігури, то вона матиме за образ точку B_1 таку, що B і B_1 лежать на одному колі, центром якого є O, а кут BOB_1 також дорівнює α (мал. на полі).

ОСЬОВА СИМЕТРІЯ

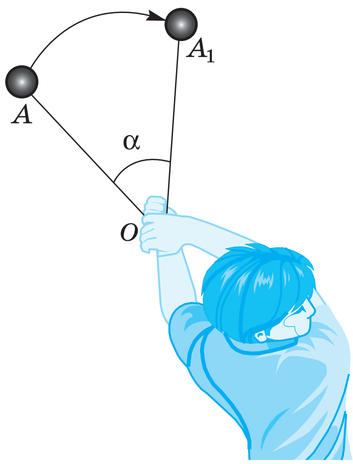
Осьовою симетрією відносно прямої – осі симетрії – називається перетворення, яке переводить довільну точку A фігури-прообразу в точку A_1 фігури-образу так, що вісь симетрії є серединним перпендикуляром до відрізка AA_1.

З осьовою симетрією ви знайомі ще з 7-го класу, і приклад, наведений на малюнку 3.3, вам зрозумілий.

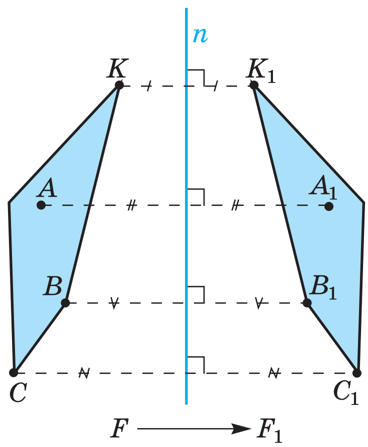
$F \xrightarrow[\text{симетрія}]{\text{осьова}} F_1$



n – вісь симетрії



Мал. 3.2

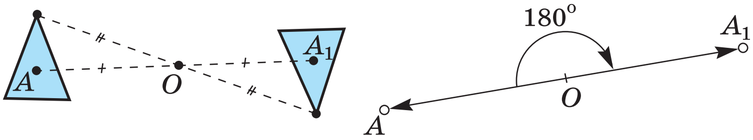


Мал. 3.3

ЦЕНТРАЛЬНА СИМЕТРІЯ

Центральною симетрією відносно точки O називається таке геометричне перетворення, яке переводить довільну точку A фігури-прообразу в точку A_1 фігури-образу так, що точки A, O і A_1 лежать на одній прямій і $A_1O = AO$ (мал. 3.4).

Зауважимо, що такий тип симетрії є випадком повороту на 180°.

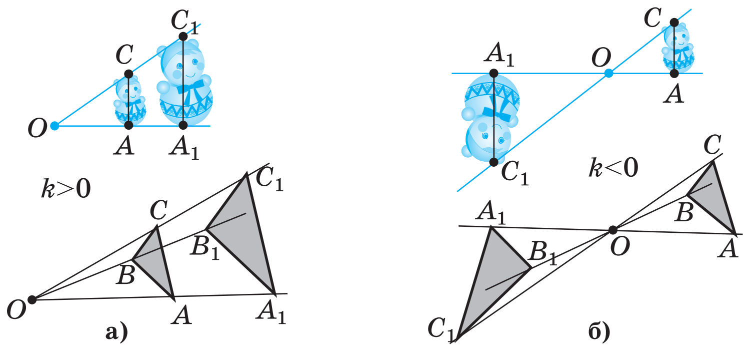


Мал. 3.4

ГОМОТЕТІЯ

Гомотетією з центром у точці O і коефіцієнтом k називається таке геометричне перетворення, яке переводить довільну точку A фігури-прообразу в точку A_1 фігури-образу так, що точки A, O, A_1 лежать на одній прямій і $A_1O = |k| \cdot AO$ (мал. 3.5).

Гомотетія зберігає форму фігури, але не її розміри. Коефіцієнт гомотетії може бути як додатним (мал. 3.5-а), так і від'ємним числом (мал. 3.5-б).



Мал. 3.5

При k > 0 точки A і A_1 містяться на прямій OA по один бік від точки O, а при k < 0 – по різні боки.

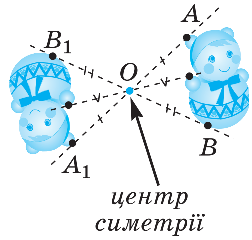
Нехай фігура F переходить у фігуру F_1 перетворенням гомотетії з центром O і коефіцієнтом k. Розглянемо дві довільні точки A і B фігури F. Їм відповідають точки A_1 і B_1 фігури F_1. Маємо: $OA_1 : OA = |k| = OB_1 : OB$; $\angle A_1OB_1 = \angle AOB$, бо ці кути або збігаються (при $k > 0$), або є вертикальними (при $k < 0$). Тоді $\triangle A_1OB_1 \sim \triangle AOB$ з коефіцієнтом подібності $|k|$, і $A_1B_1 : AB = |k|$. Аналогічно отримаємо: $B_1C_1 : BC = |k|$, $A_1C_1 : AC = |k|$. Звідси трикутник-прообраз і трикутник-образ, утворений гомотетією, – подібні за пропорційністю трьох сторін.

Ми довели таку властивість гомотетії.

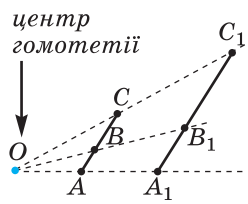
Відповідні лінійні елементи гомотетичних фігур пропорційні з коефіцієнтом $|k|$, а кути при гомотетії не змінюються.

Гомотетія з коефіцієнтом $k = -1$ є центральною симетрією. Справді, при гомотетії з центром O і коефіцієнтом $k = -1$ будь-яка точка A фігури-прообразу має за образ точку A_1 таку, що точка O буде серединою відрізка AA_1 (див. мал. 3.4).

$F \xrightarrow{\text{центральна симетрія}} F_1$



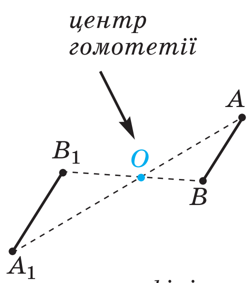
$F \xrightarrow{\text{гомотетія}} F_1$



коефіцієнт гомотетії

$$\frac{OA_1}{OA} = k > 0$$

центр гомотетії



коефіцієнт гомотетії

$$\frac{OA_1}{OA} = |k| < 0$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ

Перетворенням подібності з коефіцієнтом k називається перетворення, при якому відношення відстані між довільними двома точками фігури-образу до відстані між відповідними точками фігури-прообразу дорівнює k (мал. 3.6).

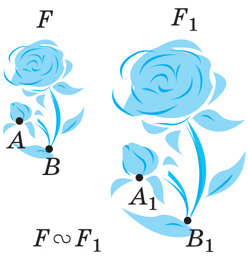
Якщо при такому перетворенні точка A має за образ точку A_1, а B – B_1, то $A_1B_1 : AB = k$. Зрозуміло, що коефіцієнт подібності не може бути від'ємним.

$F \xrightarrow[\text{з коефіцієнтом } k]{\text{подібність}} F_1$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = k > 0$$

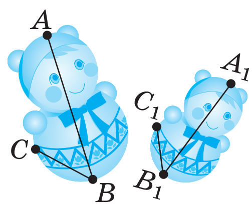
Перетворення подібності можна уявити як перетворення, яке отримуємо *послідовним виконанням перетворень* гомотетії (з коефіцієнтом, модуль якого дорівнює k) і руху.

Наприклад, на малюнку 3.7 ми використали гомотетію з коефіцієнтом 2, а потім поворот на 30°, обидва з центром у точці O. А на малюнку 3.6 трикутник $A_1B_1C_1$, подібний до трикутника ABC з $k = 0{,}8$, можна отримати, якщо виконати: гомотетію з центром у точці B і коефіцієнтом 0,8, перетворення поворот відносно точки B, паралельне перенесення.

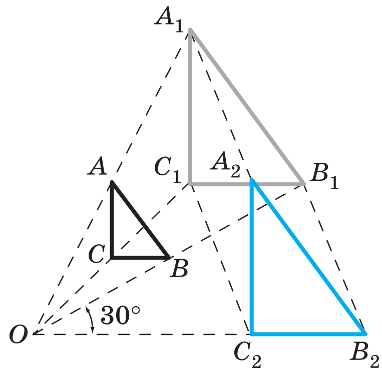


$F \sim F_1$

подібні з k



Мал. 3.6



Мал. 3.7

Якщо застосувати перетворення подібності до трикутника, то отримаємо трикутник, подібний до трикутника-прообразу, бо сторони цих трикутників пропорційні (мал. 3.7).

Тоді можна сформулювати означення подібності двох трикутників і так.

Два трикутники подібні, якщо вони переводяться один в одний перетворенням подібності.

Аналогічно формулюють означення подібності двох плоских геометричних фігур.

Дві фігури називаються подібними, якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності. Якщо фігура F подібна до фігури F_1, то записують $F \sim F_1$, або $F \underset{k=3}{\sim} F_1$ (коли треба вказати коефіцієнт подібності).

У подібних фігурах усі лінійні елементи пропорційні з коефіцієнтом подібності k, а кути між відповідними лінійними елементами зберігаються.

Тепер ми маємо можливість сформулювати означення рівності двох фігур математичною мовою.

Дві фігури називаються рівними, якщо вони перетворюються одна в одну рухом.

Зрозуміло, що рівність фігур (відрізків, кутів, трикутників), як ми їх розуміли досі, і наведене означення виражають одне й те саме.

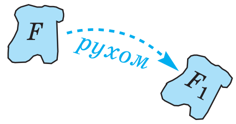
Усі розглянуті нами перетворення мають такі ВЛАСТИВОСТІ:

- пряма перетворюється на пряму, промінь – на промінь, відрізок – на відрізок;
- кути між прямими зберігаються;
- якщо точка B належить відрізку AC, то її образ B_1 належить відрізку A_1C_1 (образу відрізка AC);
- відношення довжин відрізків однієї прямої зберігається.

Наведені властивості випливають з рівності або подібності відповідних трикутників фігур образу і прообразу.

Зауваження. **Відношення довжин відрізків різних прямих, власне кажучи, не зберігається.**

ВЛАСТИВОСТІ розглянутих перетворень:



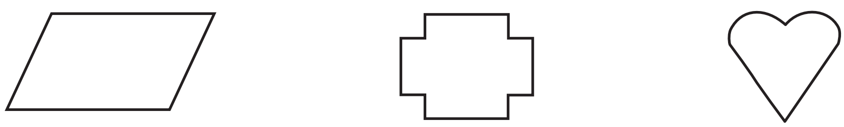
$F = F_1$

$F \xrightarrow[\text{рухом}]{\text{якщо}} F_1$

1. $(AB) \to (A_1B_1)$
   $[AB) \to [A_1B_1)$
   $[AB] \to [A_1B_1]$.
2. $\angle A \to \angle A_1 = \angle A$.
3. $C \in [AB] \to C_1 \in [A_1B_1]$.
4. $AC : CB = A_1C_1 : C_1B_1$.

Практична робота 10

1. Позначте дві точки A і C та сполучіть їх відрізком.
2. Через точки A і C проведіть паралельні прямі та відкладіть від цих точок (в одному напрямі) відрізки AA_1 і CC_1 однакової довжини. Сполучіть точки A_1 і C_1.
3. Порівняйте довжини відрізків: AC і A_1C_1; AA_1 і CC_1. Як називають спосіб, яким ви отримали відрізок A_1C_1 з відрізка AC? Зробіть висновок.
4. Виріжте з паперу по дві фігури, зображені на малюнку 3.8.



а) б) в)

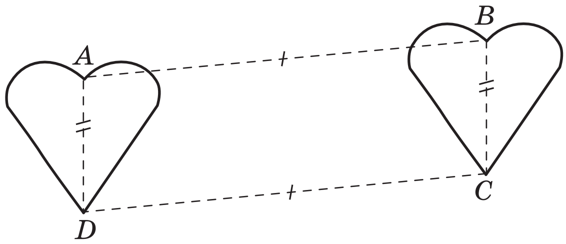
Мал. 3.8

5. Наклеюючи вирізані фігури на аркуш паперу, здійсніть паралельне перенесення кожної з них (підказка на малюнку 3.9). Поясніть свої дії.

Для допитливих

З міркувань подібності двох довільних кіл можна легко отримати сталу π. Справді, відношення двох лінійних елементів подібних фігур дорівнює їх коефіцієнту подібності: $l_1 : l_2 = k = R_1 : R_2$. Тоді:

$$\frac{l_1}{R_1} = \frac{l_2}{R_2} \quad \text{і} \quad \frac{l_1}{2R_1} = \frac{l_2}{2R_2} = \ldots = \frac{l}{2R} = \pi = \text{const}.$$



Мал. 3.9

Завдання 15

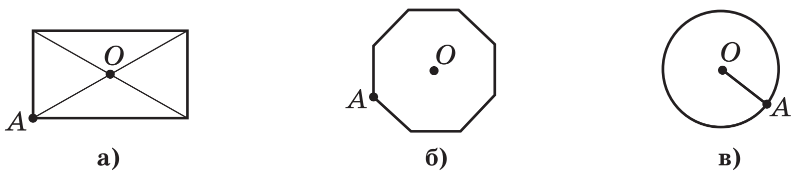
1°. У яку фігуру переходить пряма при паралельному перенесенні?
2°. Чи може пряма при паралельному перенесенні перейти сама в себе?
3°. Чи існує паралельне перенесення, при якому одна сторона прямокутника переходить в іншу його сторону?
4. Чи існує паралельне перенесення, при якому одна сторона трикутника переходить в іншу сторону цього самого трикутника?
5. Накресліть трикутник ABC. Побудуйте трикутник $A_1B_1C_1$, який утворений з трикутника ABC паралельним перенесенням так, щоб утворилася трапеція ABB_1C_1.
6*. У рівнобічній трапеції гострий кут дорівнює 60°. Доведіть, використовуючи паралельне перенесення, що менша основа трапеції дорівнює різниці більшої основи і бічної сторони.

Практична робота 11

1. Накресліть відрізок AB. Позначте точку O, що не належить відрізку AB.
2. Проведіть промінь OA і побудуйте промінь OM (у правій півплощині відносно OA) так, щоб $\angle AOM = 50°$. На промені OM відкладіть відрізок OA_1, що дорівнює OA.
3. Проведіть промінь OB і побудуйте промінь ON (у правій півплощині відносно OB) так, щоб $\angle BON = 50°$. На промені ON відкладіть відрізок OB_1, що дорівнює OB.
4. Сполучіть точки A_1 і B_1. Порівняйте довжини відрізків AB і A_1B_1.
5. Як називають спосіб, яким ви отримали відрізок A_1B_1 з відрізка AB? Зробіть висновок.

Практична робота 12

1. Виріжте з паперу по одній фігурі, зображеній на малюнку 3.10.



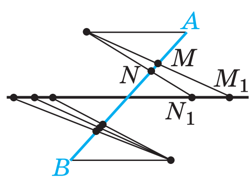
Мал. 3.10

Для допитливих

Приклад Георга Кантора (1845–1918).
Множині точок довільного відрізка можна поставити у відповідність множину точок усієї прямої.

Кантор пропонував це зробити так, як показано на малюнку.

Чи можна поставити у відповідність множині точок променя множину точок відрізка?



2. За допомогою голки (циркуля) обводячи контури фігур, здійсніть поворот кожної з них навколо:
   1) точки A проти годинникової стрілки на кут: **а)** 130°; **б)** 180°;
   2) точки O за годинниковою стрілкою на кут: **а)** 75°; **б)** 360°;
   3*) будь-якої точки, що не належить фігурі, на кут: **а)** 60°; **б)** 360°.

Завдання 16

1°. Побудуйте відрізок A_1B_1, який утворюється з даного відрізка AB поворотом навколо даної точки O на:
а) 100° за годинниковою стрілкою; **б)** 45° проти годинникової стрілки.
2. Побудуйте трикутник, який утворюється з даного трикутника ABC поворотом навколо вершини A на кут 150° за годинниковою стрілкою.
3. Побудуйте коло, яке утворюється з даного кола з центром O поворотом навколо точки A на кут 60° за годинниковою стрілкою, якщо: **а)** точки A і O не збігаються; **б)** точки A і O збігаються.
4*. Доведіть, що внаслідок повороту квадрата навколо точки перетину його діагоналей на кут 90° квадрат відображається на себе.
5*. Точка B – точка перетину бісектрис рівностороннього трикуника FGH. Доведіть, що внаслідок повороту навколо точки B на кут 120° трикутник FGH відображається сам на себе.
6*. Назвіть фігури, які можна відобразити на себе поворотом навколо деякої точки на кут: **а)** 45°; **б)** 60°; **в)** 120°. Де ви бачили такі фігури в природі і техніці?

Практична робота 13

1. Накресліть відрізок AB. Проведіть пряму n так, щоб вона не перетинала відрізок AB.
2. З точок A і B опустіть перпендикуляри AH і BK на пряму n.
3. На продовженнях відрізків AH і BK за точки H і K відкладіть відрізки $HA_1 = AH$ і $KB_1 = BK$ відповідно.
4. Сполучіть точки A_1 і B_1 відрізком.
5. Порівняйте довжини відрізків AB і A_1B_1. Зробіть висновок.
6. Які точки відрізків AB і A_1B_1 є симетричними відносно прямої n?
7. Побудуйте довільні трикутник і чотирикутник та пряму n, що не перетинає їх. Побудуйте фігури, симетричні до зображених відносно прямої n.

Завдання 17

1. Виконайте перетворення осьової симетрії: **а)** чотирикутника відносно однієї з його сторін; **б)** паралелограма відносно однієї з його діагоналей; **в)** трикутника відносно його середньої лінії.
2. Скільки осей симетрії мають дві дані точки? Зробіть малюнок.
3°. Дано точки A, B і M, які не належать одній прямій. Побудуйте точку, симетричну точці M відносно прямої AB.
4*. Скільки осей симетрії можуть мати дві прямі? Розгляньте можливі взаємні розміщення цих прямих на площині.

Для допитливих

Доведіть такі властивості *ортоцентричного трикутника* (трикутника, утвореного відрізками, що сполучають основи висот даного трикутника).
1. Трикутник, утворений відрізками, які сполучають точки перетину продовження висот гострокутного трикутника з описаним навколо нього колом, гомотетичний ортоцентричному трикутнику. (Знайдіть центр гомотетії і коефіцієнт гомотетії відповідного перетворення.)
2. Радіус кола, описаного навколо трикутника, вдвічі більший за радіус кола, описаного навколо його ортоцентричного трикутника.

Практична робота 14

1. Проведіть відрізок AB. Позначте точку O, що не належить відрізку AB.
2. На продовженнях відрізків AO і BO за точку O відкладіть відрізки: $OA_1 = OA$ і $OB_1 = OB$.
3. Сполучіть точки A_1 і B_1 відрізком.
4. Порівняйте довжини відрізків AB і A_1B_1. Зробіть висновок.
5. Які точки відрізків AB і A_1B_1 є симетричними відносно точки O?
6. Накресліть довільні трикутник і чотирикутник та позначте точку O поза ними. Побудуйте фігури, симетричні до зображених відносно точки O.

Завдання 18

1. Виконайте перетворення центральної симетрії трикутника відносно: **а)** точки, що не належить трикутнику; **б)** однієї з його вершин; **в)** середини однієї з його сторін; **г)** точки перетину його медіан.
2. Виконайте перетворення центральної симетрії: **а)** чотирикутника відносно точки перетину його діагоналей; **б)** трапеції відносно середини однієї з її основ.
3. Скільки центрів симетрії мають дві точки?

4*. Скільки центрів симетрії мають дві прямі? Розгляньте різні взаємні розміщення цих прямих.

5.** За яких умов мають тільки один центр симетрії: **а)** дві прямі; **б)** три прямі; **в)** n прямих?

6.** За яких умов три прямі мають нескінченну множину центрів симетрії?

Практична робота 15

1. Проведіть відрізок AB. Позначте точку O, що не належить відрізку AB.
2. Проведіть промінь OA (з початком у точці O) і відкладіть на ньому відрізок OA_1, що дорівнює $2OA$.
3. Проведіть промінь OB (з початком у точці B) і відкладіть на ньому відрізок OB_1, що дорівнює $2OB$.
4. Сполучіть точки A_1 і B_1 відрізком. Порівняйте довжини відрізків AB і A_1B_1. Зробіть висновок.
5. Як називається геометричне перетворення відрізка AB у відрізок A_1B_1?
6. Продовжіть промені OA і OB у протилежний бік (за точку O) і відкладіть на цих продовженнях відрізки OA_2 і OB_2, що дорівнюють $1{,}5OA$ і $1{,}5OB$ відповідно.
7. Сполучіть точки A_2 і B_2 відрізком. Порівняйте довжини відрізків AB і A_2B_2. Зробіть висновок.
8. З яким коефіцієнтом гомотетичні відрізки: **а)** AB і A_1B_1; **б)** AB і A_2B_2? Чи будуть гомотетичними відрізки A_1B_1 і A_2B_2?

Завдання 19

1. Виконайте гомотетію квадрата $ABCD$ з центром гомотетії в одній з вершин цього квадрата і коефіцієнтом $k = 1{,}2$.
2. Побудуйте фігуру, гомотетичну даному чотирикутнику з коефіцієнтом $k = -2$, взявши за центр гомотетії точку перетину його діагоналей.

3°. Як розміщені гомотетичні точки відносно центра гомотетії, якщо коефіцієнт гомотетії – від'ємне число?

Для допитливих

1. На полі розмітили ділянку $ABCD$ квадратної форми. Дощі розмили межі ділянки, залишилися лише кілочок у центрі ділянки та по одному кілочку на сторонах AB і CD. Чи можна за цими даними відновити межі ділянки?

2. Чи можна розв'язати попередню задачу, якщо третій кілочок буде не на стороні CD, а на стороні BC?

4*. Виконайте гомотетію даного трикутника з центром гомотетії в одній із його вершин і коефіцієнтом гомотетії: **а)** $k = \frac{2}{3}$; **б)** $k = \frac{4}{3}$.

5*. Яка фігура утвориться в результаті перетворення гомотетії двох прямих, що перетинаються, якщо центр гомотетії міститься в точці їх перетину?

6*. Побудуйте фігуру, гомотетичну куту, якщо за центр гомотетії взято його вершину.

7.** Відрізки AB і A_1B_1 паралельні, $AB \neq A_1B_1$. Чи є вони гомотетичними? Якщо так, то як знайти центр гомотетії і скільки центрів гомотетії мають ці відрізки?

8.** Трикутник $A_1B_1C_1$ гомотетичний трикутнику ABC з центром гомотетії у вершині B. Доведіть, що точки A, C, A_1, C_1 – вершини трапеції. За якої умови ACA_1C_1 буде паралелограмом?

9.** Скільки центрів гомотетії мають два кола з різними радіусами, центри яких не збігаються і які: **а)** не перетинаються; **б)** перетинаються; **в)** дотикаються одне до одного зовнішньо; **г)** дотикаються одне до одного внутрішньо? Як знайти ці центри?

10.** Скільки центрів гомотетії мають два кола рівних радіусів, центри яких не збігаються і які: **а)** не перетинаються; **б)** перетинаються; **в)** дотикаються одне до одного зовнішньо? Як знайти ці центри?

11.** Скільки центрів гомотетії мають два концентричні кола?

Практична робота 16

1. Побудуйте довільний чотирикутник $ABCD$. На продовженні відрізка AD за точку D відкладіть відрізок $AA_1 = 1{,}5AD$, на продовженні відрізка DC за точку C відкладіть відрізок $CC_1 = 1{,}5DC$, а на продовженні відрізка DB за точку B відкладіть відрізок $BB_1 = 1{,}5DB$.

2. Сполучіть послідовно точки A_1, B_1 і C_1. Порівняйте відношення сторін чотирикутників $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$: AD і A_1D, DC і DC_1, AB і A_1B_1, BC і B_1C_1. Що можна сказати про ці чотирикутники? Зробіть висновок.

Завдання 20

1°. Що являє собою фігура, подібна до: **а)** трикутника; **б)** чотирикутника; **в)** трапеції?

2. Доведіть, що фігура, подібна до кола, є коло.

3. Накресліть план ділянки землі прямокутної форми завдовжки 10 м і завширшки 4,5 м у масштабі 1 : 100.

4. Визначте площу садиби, план якої зображено на малюнку 3.11 у масштабі 1 : 1000.

Мал. 3.11

5*. Чи подібні прямокутники, якщо: **а)** діагональ одного прямокутника ділить його кут у відношенні 2 : 1, а в другому прямокутнику сторони відносяться як 2 : 1; **б)** сторона одного прямокутника дорівнює половині діагоналі, а в другому прямокутнику діагональ утворює з однією зі сторін кут, удвічі менший, ніж з другою стороною?

6*. Чи подібні ромби, якщо: **а)** тупий кут одного ромба вдвічі більший за його гострий кут, а різниця кутів другого ромба дорівнює 60°; **б)** діагональ одного ромба дорівнює його стороні, а сторона другого ромба утворює з однією із його діагоналей кут 30°?

Практична робота 17

1. Побудуйте довільний трикутник ABC.
2. Здійсніть поворот трикутника ABC на $100°$ відносно вершини A за годинниковою стрілкою.
3. Побудуйте трикутник, симетричний трикутнику, утвореному в результаті виконання п. 2, відносно точки A.
4. Здійсніть поворот трикутника, утвореного в результаті виконання п. 3, на $80°$ за годинниковою стрілкою.
5. Якого положення набув трикутник, утворений у результаті виконання п. 4?

Практична робота 18

1. Побудуйте довільний трикутник KLM. Позначте точку O, що не належить трикутнику KLM.
2. Побудуйте трикутник, гомотетичний трикутнику KLM відносно точки O з коефіцієнтом 2.
3. Здійсніть поворот трикутника, утвореного в результаті виконання п. 2, на $45°$ відносно точки O за годинниковою стрілкою.
4. Побудуйте трикутник, симетричний утвореному трикутнику в результаті виконання п. 3, відносно однієї з його сторін.
5. Чи подібні трикутник, отриманий в результаті виконання п. 4, і трикутник KLM? Відповідь поясніть. Зробіть висновок.

Завдання 21

1. Яким ще перетворенням є гомотетія з коефіцієнтом $k = -1$?

2*. Доведіть, що гомотетію з коефіцієнтом k можна замінити на гомотетію з коефіцієнтом $-k$ і поворотом навколо центра гомотетії на розгорнутий кут.

3*. Чи можуть два подібні трикутники бути негомотетичними? Чи можуть два гомотетичні трикутники не бути подібними?

4*. Дано два трикутники. Дві сторони одного з них паралельні двом сторонам другого. Чи будуть ці трикутники гомотетичні? Чи будуть вони подібними?

5.** Гомотетія з центром O_1 і коефіцієнтом k_1 відрізок AB перетворює на відрізок A_1B_1. Гомотетія з центром O_2 і коефіцієнтом k_2 відрізок A_1B_1 перетворює на відрізок A_2B_2, який дорівнює відрізку AB. Доведіть, що відрізок A_2B_2 можна отримати з відрізка AB паралельним перенесенням або центральною симетрією і що $|k_1k_2| = 1$.

6.** Відрізок AB послідовно перетворено на відрізок A_1B_1 центральною симетрією і гомотетією з центром у тій самій точці O, що не належить даному відрізку, і коефіцієнтом гомотетії k. Доведіть, що точки A, B, A_1, B_1 є вершинами трапеції. У якому відношенні діляться діагоналі трапеції точкою їх перетину?

7.** Точку P повернули навколо точки O на $60°$, а потім у результаті гомотетії з центром у точці O і коефіцієнтом $k = 2$ з отриманої точки P_1 утворили точку P_2. Доведіть, що точки P_2, O і P є вершинами прямокутного трикутника.

8.** Поясніть взаємозв'язок між:
а) поворотом і центральною симетрією;
б) паралельним перенесенням і осьовою симетрією;
в) поворотом навколо деякої точки і осьовою симетрією;
г) центральною симетрією і гомотетією.

Для допитливих

Дано опуклий чотирикутник. Треба поділити його на 4 частини і скласти з них рівновеликий даному чотирикутник, два основних елементи якого (дві сторони, або два кути, або кут і сторона) задано.
Порада. Використайте перетворення, яке є рухом.

§ 15. Подібні багатокутники

Нагадаємо, що дві фігури називаються *подібними*, якщо вони переходять одна в одну перетворенням подібності: $F_1 \underset{k}{\sim} F_2$ (с. 114).

Теорема-ознака. **Якщо два однойменні багатокутники мають відповідно пропорційні сторони і відповідно рівні кути, то ці багатокутники подібні.**

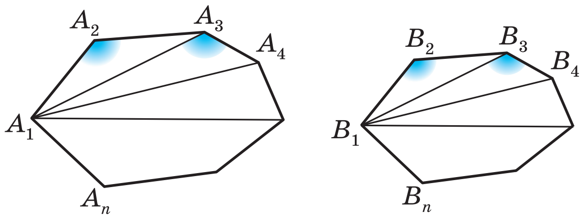
Нехай маємо багатокутники $A_1A_2 \ldots A_n$ і $B_1B_2 \ldots B_n$ (мал. 3.12), в яких: $\angle A_1 = \angle B_1$, $\angle A_2 = \angle B_2$, …, $\angle A_n = \angle B_n$; $B_2B_1 : A_2A_1 = k$, $B_3B_2 : A_3A_2 = k$, …, $B_nB_{n-1} : A_nA_{n-1} = k$.

Треба довести, що $A_1A_2 \ldots A_n \sim B_1B_2 \ldots B_n$.

$A_1 \ldots A_n \sim B_1 \ldots B_n$

$\Uparrow$

$$\begin{cases} \angle A_1 = \angle B_1, \ \ldots, \\ \angle A_n = \angle B_n, \\ \dfrac{A_1A_2}{B_1B_2} = \dfrac{A_2A_3}{B_2B_3} = \ldots = \\ = \dfrac{A_nA_1}{B_nB_1}. \end{cases}$$



Мал. 3.12

Доведення

1) За умовою $B_2B_1 : A_2A_1 = k = B_3B_2 : A_3A_2$ і $\angle A_2 = \angle B_2$. Тоді $\triangle A_1A_2A_3 \underset{k}{\sim} \triangle B_1B_2B_3$. Звідси $B_3B_1 : A_3A_1 = k$, $\angle A_1A_3A_4 = \angle A_3 - \angle A_1A_3A_2 = \angle B_3 - \angle B_1B_3B_2 = \angle B_1B_3B_4$.

2) $B_3B_1 : A_3A_1 = k = B_3B_4 : A_3A_4$ і $\angle A_1A_3A_4 = \angle B_1B_3B_4$. Тоді $\triangle A_1A_3A_4 \underset{k}{\sim} \triangle B_1B_3B_4$ і $A_1A_2A_3A_4 \underset{k}{\sim} B_1B_2B_3B_4 \ldots$.

Для допитливих

ЗАДАЧА ЕЙНШТЕЙНА. Альберт Ейнштейн вважав, що (у його часи) цю головоломку могли розв'язати лише 2 % населення. Зауважимо, що зараз цей відсоток дещо вищий. Цікаво, чи належите Ви до нього?

Дано**:** **1)** є п'ять будинків – кожний різного кольору; **2)** у кожному будинку живе одна людина, що відрізняється від сусіда національністю: німець, англієць, швед, датчанин і норвежець; **3)** кожен з них п'є лише один певний напій, курить певну марку цигарок, утримує певну тварину; **4)** ніхто з цих мешканців не п'є однаковий з іншими напій, не курить цигарок однакової марки, не утримує однакових тварин.

Визначити**:** хто утримує рибку.

Підказки**:** **1)** англієць живе в червоному будинку; **2)** швед утримує собаку; **3)** датчанин п'є чай; **4)** зелений будинок розміщений поряд з білим – ліворуч; **5)** мешканець зеленого будинку п'є каву; **6)** людина, що курить «Pall Mall», утримує птицю; **7)** мешканець середнього будинку п'є молоко; **8)** мешканець жовтого будинку курить «Dunhill»; **9)** норвежець живе у першому будинку; **10)** той, хто курить «Marlboro», живе біля того, хто утримує кішку; **11)** людина, що утримує коня, живе біля того, хто курить «Dunhill»; **12)** той, хто курить «Winfield», п'є пиво; **13)** норвежець живе біля блакитного будинку; **14)** німець курить «Rothmans»; **15)** той, хто курить «Marlboro», живе поряд з людиною, що п'є воду.

Повторюючи аналогічні міркування, отримаємо, що

$$A_1A_2 \dots A_n \underset{k}{\sim} B_1B_2 \dots B_n.$$

Теорему доведено.

ВЛАСТИВОСТІ ПОДІБНИХ БАГАТОКУТНИКІВ

$A_1 \dots A_n \sim B_1 \dots B_n$

$\Downarrow$

$\angle A_1 = \angle B_1, \dots,$

$\angle A_n = \angle B_n;$

$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \dots =$

$= \frac{A_nA_1}{B_nB_1} = k;$

$P_{A_1 \dots A_n} = kP_{B_1 \dots B_n};$

$S_{A_1 \dots A_n} = k^2 S_{B_1 \dots B_n}.$

У подібних фігурах усі відповідні лінійні елементи пропорційні з коефіцієнтом, що дорівнює коефіцієнту подібності, а кути між ними зберігаються. Звідси:

- **подібні багатокутники мають відповідно пропорційні сторони і відповідно рівні кути;**
- **відношення периметрів двох подібних багатокутників дорівнює коефіцієнту їх подібності;**
- **відношення площ двох подібних багатокутників дорівнює квадрату коефіцієнта їх подібності.**

Останнє твердження випливає з відношення площ трикутників, на які діляться багатокутники діагоналями, проведеними з відповідних вершин (мал. 3.12).

Практична робота 19

1. Накресліть довільний багатокутник. Виміряйте довжини його сторін і градусні міри кутів.
2. Побудуйте подібний йому багатокутник із коефіцієнтом подібності 2.
3. Порівняйте відношення довжин відповідних діагоналей цих багатокутників із відношенням їх периметрів та з коефіцієнтом подібності.
4. Обчисліть площі цих багатокутників і порівняйте їх відношення із коефіцієнтом подібності.

Завдання 22

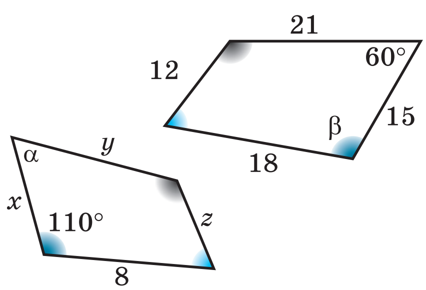
1°. Два багатокутники подібні. Сторона одного з них відноситься до відповідної сторони другого як 2 : 3. Знайдіть коефіцієнт подібності і відношення мір відповідних кутів.

2°. Два шестикутники подібні з коефіцієнтом подібності 3. Знайдіть відношення їхніх: **а)** периметрів; **б)** площ.

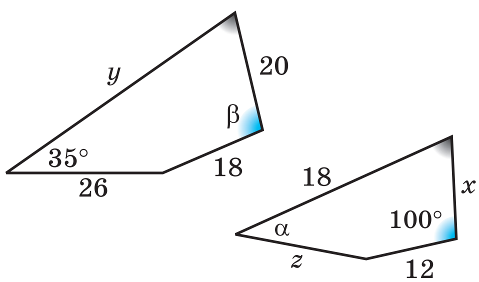
3°. Відношення площ двох подібних дванадцятикутників дорівнює 2. Знайдіть відношення їх периметрів.

4°. Сторони багатокутника відносяться як 3 : 4 : 5 : 6 : 2. Знайдіть сторони подібного йому багатокутника, якщо його периметр дорівнює: **а)** 80 см; **б)** 60 см.

5. На малюнку 3.13 зображено два подібні багатокутники. Знайдіть x, y, z, α і β.



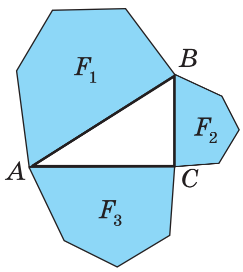
а)



б)

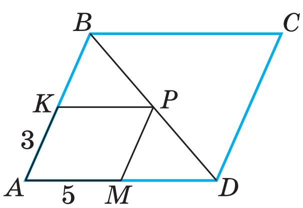
Мал. 3.13

6. Дано квадрат $ABCD$, площа якого дорівнює 16 см^2. Знайдіть сторону квадрата, площа якого: **а)** у 4 рази менша за площу даного квадрата; **б)** у 9 разів менша за площу даного квадрата; **в)** у 3 рази більша за площу даного квадрата.
7. Сторони прямокутника дорівнюють 8 см і 6 см. Обчисліть периметр подібного йому прямокутника, діагональ якого дорівнює 50 см.
8. Одна із сторін і діагональ прямокутника дорівнюють 8 см і 10 см відповідно. Обчисліть площу подібного йому прямокутника, менша сторона якого – 24 см.
9. Сторона і висота ромба дорівнюють 25 см і 24 см відповідно. Обчисліть периметр подібного йому ромба, більша діагональ якого дорівнює 90 см.
10. Діагоналі ромба дорівнюють 6 см і 8 см. Обчисліть площу подібного йому ромба, висота якого дорівнює 48 см.
11*. Два ромби мають рівні гострі кути. Більша діагональ першого дорівнює 40 см. Знайдіть сторону цього ромба, якщо: **а)** діагоналі другого ромба відносяться як 3 : 4; **б)** менша діагональ і сторона другого ромба відносяться як 6 : 5.
12*. Діагональ ромба дорівнює його стороні. Сторона іншого ромба утворює з його діагоналлю кут 30°. Чи подібні ці ромби? Відповідь обґрунтуйте.
13*. Сторона одного прямокутника дорівнює половині його діагоналі, а в іншому прямокутнику діагональ ділить кут на два кути, один з яких дорівнює половині другого. Чи подібні ці прямокутники? Відповідь обґрунтуйте.
14*. На сторонах прямокутного трикутника побудовано попарно подібні п’ятикутники так, що сторони трикутника є їхніми відповідними сторонами (мал. 3.14). Доведіть, що площа п’ятикутника, побудованого на гіпотенузі, дорівнює сумі площ п’ятикутників, побудованих на катетах.



Мал. 3.14

15*. У трикутник, утворений сторонами AB, AD і діагоналлю BD паралелограма $ABCD$, вписано паралелограм $AKPM$ так, як зображено на малюнку 3.15. Знайдіть сторони паралелограма $ABCD$, якщо $AK = 3$ дм, $AM = 5$ дм і $AK : KB = 2 : 3$.
16*. Доведіть, що ромби подібні, якщо: **а)** відношення відповідних діагоналей цих ромбів рівні; **б)** відношення радіусів вписаних кіл цих ромбів дорівнює відношенню їхніх сторін.
17*. Доведіть, що паралелограми подібні, якщо: **а)** рівні їхні гострі кути і відношення відповідних сторін; **б)** їхні діагоналі ділять гострі кути на відповідно рівні кути.



Мал. 3.15

18*. Доведіть подібність двох рівнобічних трапецій, якщо: **а)** їхні гострі кути рівні, а діагоналі є бісектрисами цих кутів; **б)** їхні тупі кути рівні, а діагоналі є бісектрисами цих кутів.
19**. Дано чотирикутник $ABCD$. Побудуйте чотирикутник, площа якого: **а)** у 2 рази менша за площу даного; **б)** у 3 рази більша за площу даного.
20*. Доведіть, що в подібних багатокутниках: **а)** відповідні діагоналі пропорційні відповідним сторонам; **б)** діагоналі, проведені з відповідних вершин, поділять багатокутники на однакове число подібних і однаково розташованих трикутників.
21*. Доведіть, що коли два багатокутники поділяються відповідними діагоналями на однакове число подібних і однаково розташованих трикутників, то такі багатокутники подібні.

Для допитливих

«Хрестики-нулики-3» – гра у «хрестики-нулики», в якій виграє той, хто першим поставить 3 свої позначки на одній прямій.

На папері в клітинку намалюйте багатокутник із найменшим числом клітинок, такий, щоб, граючи на ньому в хрестики-нулики-3, той, хто розпочинає гру, завжди вигравав. Запишіть його виграшну стратегію.

§ 16. Групи симетрії фігур

Фігуру називають центрально-симетричною, а точку O – її центром симетрії, якщо перетворенням симетрії відносно точки O фігура переходить сама в себе. Наприклад, коло – центрально-симетричне, а центром його симетрії є центр цього кола.

Фігуру називають симетричною відносно її осі симетрії n, якщо перетворенням симетрії відносно прямої n фігура переходить сама в себе. Так, ви знаєте з курсу 7-го класу, що бісектриса кута є його віссю симетрії, рівнобедрений трикутник є симетричним відносно висоти, яку проведено до його основи.

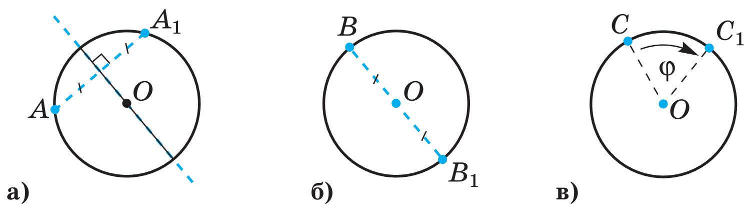
Перетворення, які переводять дану фігуру саму в себе, будемо називати групою симетрії цієї фігури.

Наприклад, для *кола групою симетрії* буде:

– осьова симетрія відносно довільного діаметра цього кола (мал. 3.16-а);
– центральна симетрія відносно центра кола (мал. 3.16-б);
– поворот із центром у центрі кола на довільний кут (мал. 3.16-в).

КОЛО

переходить саме в себе перетвореннями:
– осьова симетрія відносно довільного діаметра цього кола;
– центральна симетрія відносно центра кола;
– поворот із центром у центрі кола на довільний кут.



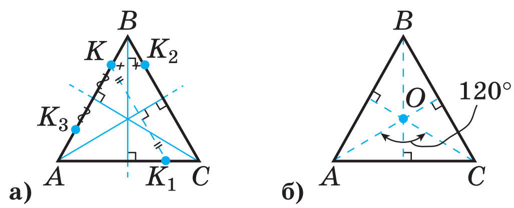
Мал. 3.16

Розуміння того, які саме перетворення є групою симетрії даної фігури, може допомогти під час пошуку розв'язування задачі і значно полегшити цей процес.

Група симетрії рівностороннього трикутника:
– осьова симетрія відносно кожної з висот трикутника (мал. 3.17-а);
– поворот відносно центра трикутника на 120° і 240° (мал. 3.17-б).

РІВНОСТОРОННІЙ ТРИКУТНИК

переходить сам у себе перетвореннями:
– осьова симетрія відносно кожної з висот трикутника;
– поворот відносно центра трикутника на 120° і 240°.



Мал. 3.17

Група симетрії рівнобедреного трикутника:

– осьова симетрія відносно висоти, проведеної до основи (мал. 3.18).

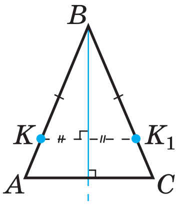
Група симетрії паралелограма:

– центральна симетрія відносно точки перетину діагоналей (мал. 3.19).

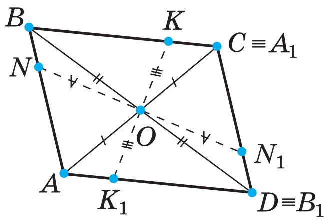
Група симетрії ромба:

– осьова симетрія відносно діагоналей (мал. 3.20);

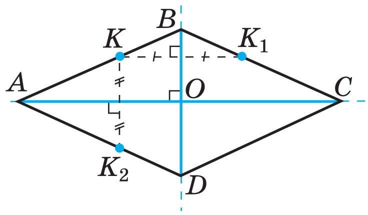
– центральна симетрія відносно точки перетину діагоналей (як паралелограм).



Мал. 3.18



Мал. 3.19

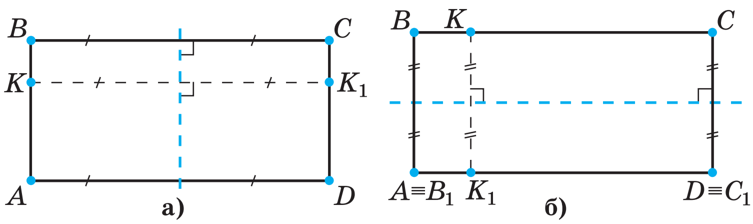


Мал. 3.20

Група симетрії прямокутника:

– осьова симетрія відносно прямих, що проходять через середини протилежних сторін (мал. 3.21);

– центральна симетрія відносно точки перетину діагоналей (як паралелограм).



Мал. 3.21

Група симетрії квадрата:

– осьова симетрія відносно діагоналей (як ромб);

– осьова симетрія відносно прямих, що проходять через середини протилежних сторін (як прямокутник);

– центральна симетрія відносно точки перетину діагоналей (як паралелограм).

Переходять самі в себе перетвореннями:

РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК

– осьова симетрія відносно висоти, проведеної до основи.

ПАРАЛЕЛОГРАМ

– центральна симетрія відносно точки перетину діагоналей.

РОМБ

– осьова симетрія відносно діагоналей;

– центральна симетрія відносно точки перетину діагоналей.

КВАДРАТ

– осьова симетрія відносно діагоналей;

– осьова симетрія відносно прямих, що проходять через середини протилежних сторін;

– центральна симетрія відносно точки перетину діагоналей.

Для допитливих

Якось відомого американського математика професора **Реймонда М. Смалліана**, знаного своїми логічними задачами і софізмами, запросили виступити на засіданні студентського математичного клубу. Професора представляв зібранню логік Мелвін Фіттінг, який колись навчався в Смалліана. Промова Фіттінга була справді промовою учня Смалліана. Він сказав: «Я маю за честь відрекомендувати вам професора Смалліана, який доведе вам, що або він не існує, або ви не існуєте, але хто саме не існує, вам невідомо».

Практична робота 20

1. Виріжте з паперу: круг, квадрат, прямокутник, ромб, паралелограм, рівнобічну трапецію, рівносторонній трикутник, рівнобедрений трикутник.
2. Серед отриманих фігур знайдіть ті, навколо яких можна описати коло, і позначте центри цих кіл.
3. У чотирикутниках позначте точки перетину діагоналей, а в крузі – центр. Обведіть кожну з фігур на аркуші паперу.
4. Сумістіть кожну з фігур із її зображенням на папері. Поставте голку (циркуля) у позначену точку. Повертаючи фігуру навколо цієї точки, визначте, чи належить поворот до групи симетрії фігури. Зробіть висновок і запишіть його.
5. Згинанням фігури з'ясуйте, чи належить осьова симетрія до групи симетрії кожної з фігур. Зробіть висновок і запишіть, скільки осей симетрії має кожна з ваших фігур.

Завдання 23

1°. Які з даних літер мають вісь симетрії: Ф, В, П, О, Т, Ш, Е, З?
2. Чи мають вісь (осі) симетрії: **а)** відрізок; **б)** промінь; **в)** дві прямі, що перетинаються. Скільки?
3. Доведіть, що пряма, яка містить бісектрису кута, є його віссю симетрії.
4°. Які з відомих вам чотирикутників мають осі симетрії?
5. Скільки осей симетрії має: **а)** круг; **б)** півплощина; **в)** півкруг; **г)** частина площини між двома паралельними прямими?
6. Доведіть, що різносторонній трикутник не має осі симетрії.
7. Чи мають центр симетрії: **а)** відрізок; **б)** промінь; **в)** дві прямі, що перетинаються?
8°. Які з даних літер мають центр симетрії: О, М, Ч, Ж, Х, Ф?
9*. Скільки центрів симетрії мають дві паралельні прямі?
10. Чи може трикутник мати центр симетрії?
11*. Чи може фігура мати більше ніж один центр симетрії?
12*. Доведіть: якщо чотирикутник має центр симетрії, то він є паралелограмом.
13*. Придумайте фігуру, яка має кілька осей симетрії, але не має жодного центра симетрії.
14.** Доведіть: якщо фігура має дві перпендикулярні осі симетрії, то вона має і центр симетрії.
15*. Назвіть фігури, які відображаються на себе поворотом навколо деякої точки на кут: **а)** 90°; **б)** 120°; **в)** 52°.
16*. Назвіть рух, при якому кожна пряма площини переходить у паралельну їй пряму або сама в себе.
17.** Доведіть, що при центральній симетрії кожний промінь площини переходить у протилежний йому промінь.
18.** Знайдіть групу симетрії опуклого чотирикутника з перпендикулярними діагоналями, в якого дві суміжні сторони рівні і який не є ромбом.

Для допитливих

1. На колі з діаметром AB взято довільну точку X (яка не збігається з A і B). Із центром у точці X проведено коло, дотичне до AB у точці H, яке перетинає дане коло у точках K і P; M – точка перетину XH та KP. Доведіть, що $XM = MH$.

2. На хорді AB кола з центром O взято довільну точку X (яка не збігається з A і B). Через точки X, A і O провели друге коло, що перетинає перше у точці P. Доведіть, що $PX = XB$.

3. До двох кіл, що дотикаються одне до одного зовнішньо, провели дві спільні дотичні і послідовно сполучили точки їх дотику до кіл. Доведіть, що в утворений чотирикутник можна вписати коло.

4. Дано два концентричні кола. Доведіть, що сума квадратів відстаней від точки одного кола до кінців діаметра другого не залежить від розташування точки на колі і не залежить від того, на якому колі цю точку розміщено.

§ 17. Розв’язування задач з використанням властивостей геометричних перетворень

Розглянемо приклади використання геометричних перетворень. При цьому ми спиратимемося на їхні властивості: образом прямої є пряма; образом півпрямої є півпряма; образом кута є кут, йому рівний; образ точки, що міститься на відрізку, належить образу відрізка; відношення відрізків прямої зберігається. Зауважимо, що відношення довжин відрізків різних прямих, власне кажучи, не зберігається.

Приклад 1. Двоє друзів по черзі кладуть на квадратний стіл п’ятикопійчані монети (одну за один хід). Монету можна класти лише на вільне місце. Програє той, хто не має змоги зробити хід. Доведіть, що той, хто ходить першим, завжди може виграти.

Розв’язання

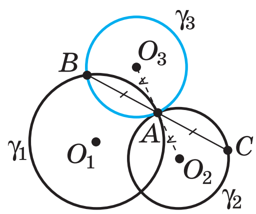
Перший гравець першим ходом кладе монету в центр стола, а потім – симетрично ходу другого гравця (відносно центра стола). Зрозуміло, що за такою стратегією перший гравець завжди може зробити наступний хід після ходу приятеля.

Приклад 2. Через спільну точку A двох кіл γ_1 і γ_2 проведіть пряму так, щоб ці кола відтинали на ній рівні хорди.

План побудови

Будуємо коло γ_3, симетричне колу γ_2 відносно точки A (мал. 3.22): на прямій O_2A відкладемо відрізок $AO_3 = AO_2$; з центром у точці O_3 радіусом, рівним радіусу кола γ_2, проведемо коло γ_3.

Позначимо $\gamma_3 \cap \gamma_1 = B$. Пряма AB – шукана.

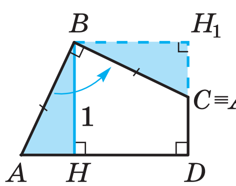


Мал. 3.22

Доведення

Позначимо $(AB) \cap \gamma_2 = C$ і доведемо, що $[AB] = [AC]$. Точки B і C – симетричні відносно центра симетрії A, тоді відрізки AB і AC рівні. Щ. в. д.

Приклад 3. У чотирикутнику $ABCD$ кути при вершинах B і D – прямі, $AB = BC$, а висота $BH = 1$. Знайдіть площу чотирикутника $ABCD$.



Мал. 3.23

Розв’язання

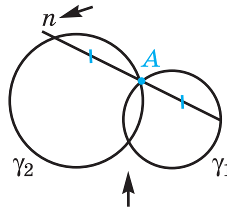
Якщо повернути трикутник ABH навколо точки B на 90° (мал. 3.23), то утвориться чотирикутник HBH_1D, який буде квадра-

Симетрія, незалежно від того, широко чи вузько розуміти це поняття, є тією ідеєю, за допомогою якої людина протягом сторіч намагалася збагнути і створити порядок, красу і досконалість.

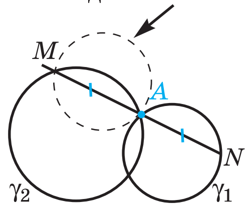
Г. Вейль

Шукайте симетрію!

БУДУЄМО:



симетрично до γ_1 відносно т. A

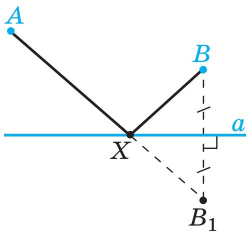


MN – шукана

Нагадаємо:
(AB) – пряма AB;
$[AB]$ – відрізок AB;
$\cap$ – знак перетину.

том зі стороною 1. Його площа дорівнює 1. Тоді і площа чотирикутника $ABCD$ також дорівнює 1.

Приклад 4. Дано пряму a і дві точки A і B по один бік від неї. Знайдіть на прямій a таку точку M, щоб сума довжин відрізків AM і MB була найменшою.

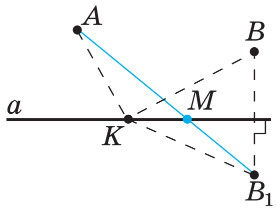


$AX + XB$ – найменша для $X \in a$

Розв'язання

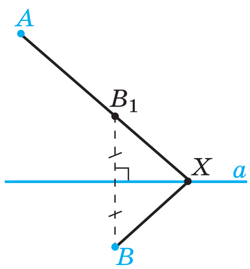
Розглянемо точку B_1, симетричну точці B відносно заданої прямої a (мал. 3.24). Тоді для довільної точки $K \in a$: $KB = KB_1$, і $AK + KB = AK + KB_1 \geqslant AB_1$.

Звідси шуканою точкою M є точка перетину AB_1 і a.



Мал. 3.24

Приклад 5. Дано пряму a і дві точки A і B по різні боки від неї. Знайдіть на прямій a таку точку M, щоб значення виразу $|AM - MB|$ було найбільшим.

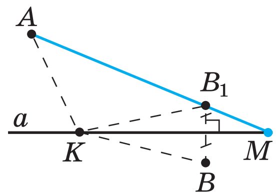


$|AX - XB|$ – найбільша для $X \in a$

Розв'язання

Розглянемо точку B_1, симетричну точці B відносно заданої прямої a (мал. 3.25). Тоді для довільної точки $K \in a$ маємо: $KB = KB_1$ і

$|AK - KB| = |AK - KB_1| \leqslant AB_1 = |AM - MB_1|$.



Мал. 3.25

Звідси шуканою точкою M є точка перетину AB_1 і a.

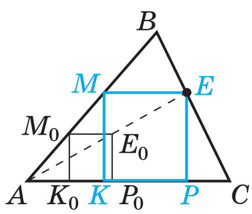
Приклад 6. Дано трикутник ABC. Побудуйте квадрат, дві вершини якого лежать на стороні AC заданого трикутника і по одній – на сторонах AB і BC.

План побудови

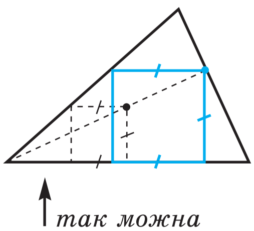
З довільної точки M_0 сторони AB проведемо $M_0K_0 \perp AC$ і побудуємо квадрат $K_0M_0E_0P_0$ (мал. 3.26).

Проведемо пряму AE_0 до перетину зі стороною BC у точці E.

Будуємо прямокутник $MEPK$ – шуканий.



Мал. 3.26



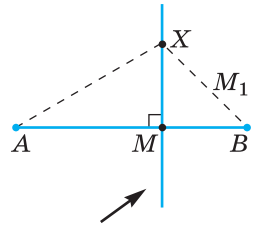
так можна вписати квадрат

Доведення

Квадрат $K_0M_0E_0P_0$ переходить у прямокутник $KMEP$ перетворенням гомотетії відносно точки A з коефіцієнтом $\dfrac{AE}{AE_0}$. Тоді $KMEP$ – квадрат.

Приклад 7. **Опорна задача.** Дано відрізок AB. Доведіть, що геометричним місцем точок M, для яких

$AM^2 - BM^2 = k^2$ ($k^2 \leqslant AB^2$), є пряма, перпендикулярна до AB.



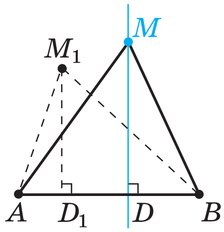
ГМТ, для яких

$AX^2 - XB^2 = \text{const}$

Доведення

1) Знайдемо точку D відрізка AB, для якої $AD^2 - BD^2 = k^2$ (мал. 3.27). Враховуючи, що $AD + DB = AB$, маємо:

$$(AD - DB)(AD + DB) = k^2,$$
$$2AD = k^2 : AB + AB.$$



Мал. 3.27

2) Доведемо, що для довільної точки M прямої, яка проходить через D перпендикулярно до AB, також виконується це співвідношення.

З прямокутних трикутників AMD і BMD маємо:

$AM^2 - AD^2 = MD^2 = MB^2 - DB^2$,

звідси: $AM^2 - BM^2 = AD^2 - DB^2 = k^2$.

3) Доведемо (від супротивного), що не існує інших точок площини із заданою властивістю.

Нехай існує точка M_1, для якої виконується $AM_1^{\,2} - BM_1^{\,2} = k^2$ і $M_1 \notin MD$. Проведемо $M_1D_1 \perp AB$, $D_1 \not\equiv D$.

Тоді $AD_1^{\,2} - D_1B^2 = AM_1^{\,2} - BM_1^{\,2} = k^2 = AD^2 - BD^2$.

Звідси:

$(AD_1 + BD_1)(AD_1 - BD_1) = k^2 = (AD + BD)(AD - BD)$.

Врахуємо, що $(AD + BD) = AB = (AD_1 + BD_1)$:

$AB\,(2AD_1 - AB) = k^2 = AB\,(2AD - AB)$, тому $AD_1 = AD$.

Тобто $D_1 \equiv D$, що суперечить припущенню.

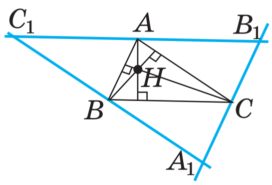
Щ. в. д.

Нагадаємо позначення:

$\notin$ – «не належить»;

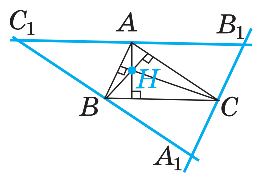
$\not\equiv$ – «не збігається».

Приклад 8. **Опорна задача.** Доведіть, що ортоцентр трикутника є центром кола, описаного навколо трикутника, утвореного прямими, що проходять через вершини трикутника паралельно його сторонам.



Мал. 3.28

Ми вже доводили цей факт раніше і встановили, що саме тому три висоти трикутника перетинаються в одній точці. Повернемося до цієї задачі, збагачені знаннями про геометричні перетворення.



$B_1C_1 \parallel BC$

$A_1B_1 \parallel AB$

$C_1A_1 \parallel AC$

H – центр описаного кола навколо $\triangle A_1B_1C_1$

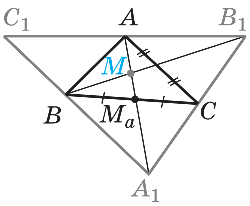
Доведення

Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ (мал. 3.28), причому: $A_1C_1 \parallel CA$, $B_1C_1 \parallel BC$ і $A_1B_1 \parallel AB$. Тоді $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$ ($\angle A_1 = \angle A$; $\angle B_1 = \angle B$; $\angle C_1 = \angle C$).

Для допитливих

У центрі квадратного пирога міститься родзинка. Від пирога можна відрізати трикутний шматок по прямій, що перетинає дві його сусідні сторони в точках, які не є вершинами фігури. Від залишку пирога можна відрізати таким самим чином наступний шматок і т. д. Чи можна відрізати шматок пирога з родзинкою?

Знайдемо коефіцієнт подібності цих трикутників. ABA_1C – паралелограм, тоді $BA_1 = AC$. Аналогічно: $C_1B = AC$. Тому $C_1A_1 = 2AC$, і шуканий коефіцієнт подібності $k = 2$. Точка B – середина C_1A_1, тоді BH – серединний перпендикуляр до сторони C_1A_1 трикутника $A_1B_1C_1$. Аналогічно: CH і AH – серединні перпендикуляри до A_1B_1 і C_1B_1. Тобто H – центр кола, описаного навколо трикутника $A_1B_1C_1$, і **висоти трикутника ABC перетинаються в одній точці.**



$\triangle ABC \to \triangle A_1B_1C_1$

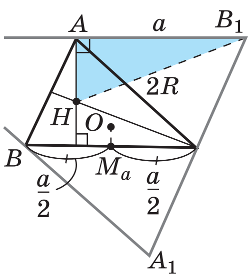
гомотетією з $k = -2$ і центром у центроїді M трикутника ABC:

$A \to A_1$
$M_a \to A$
$O \to H$
$R \to HB_1 = 2R$

Перетворенням подібності з $k = 2$ $\triangle ABC \to \triangle A_1B_1C_1$, причому: $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$, $O \to H$ і т. д.

Наприклад, середина відрізка BC (точка M_a) перейде в точку A (середину відрізка C_1B_1). Точка M, яка міститься на AM_a вдвічі ближче до M_a, ніж до A, перейде сама в себе (мал. на полі). Ця точка M – центроїд трикутника ABC (точка перетину його медіан).

Отримали: **перетворення $\triangle ABC \to \triangle A_1B_1C_1$ є гомотетією відносно точки M з коефіцієнтом $k = -2$.** Звідси маємо такі опорні факти.



$AH = 2OM_a$

$AH^2 = 4R^2 - a^2$

1. $O \to H$, $M_a \to A$ з $k = -2$ відносно точки M, тоді $HA = 2OM_a$; аналогічно $HB = 2OM_b$, $HC = 2OM_c$ (M_b і M_c – середини сторін b і c трикутника ABC). Маємо:
$$\boldsymbol{HA = 2OM_a,\ HB = 2OM_b,\ HC = 2OM_c.}$$
2. $O \to H$, $A \to A_1$, тоді радіус описаного кола $R \to |HA_1|$ і $HA_1 = 2R$; аналогічно $HB_1 = HC_1 = 2R$. Маємо:
$$\boldsymbol{HA_1 = HB_1 = HC_1 = 2R.}$$
3. З $\triangle HB_1A$ (мал. на полі): $HB_1^2 - AB_1^2 = AH^2 = 4R^2 - a^2$. Маємо:
$$\boldsymbol{AH^2 = 4R^2 - a^2,\ BH^2 = 4R^2 - b^2,\ CH^2 = 4R^2 - c^2.}$$
4. Площа S_1 трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює $k^2 \cdot S = 4S$, де S – площа трикутника ABC. Маємо:
$$\boldsymbol{S_1 = 4S.}$$

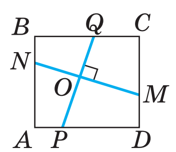
Завдання 24

1. Дано кут і точку M всередині цього кута. Побудуйте відрізок з кінцями на сторонах заданого кута так, щоб точка M ділила цей відрізок у відношенні 1 : 2.
2. Населені пункти A і B розташовані на різних берегах річки. Береги річки паралельні. Пряма AB не перпендикулярна до берегів. Де треба побудувати міст, щоб шлях від A до B був найменшим?
3. Побудуйте відрізок заданої довжини a паралельно заданій прямій l з кінцями на: **а)** двох даних прямих; **б)** двох даних колах.
4. Побудуйте трапецію за: **а)** основами і діагоналями; **б)** бічною стороною, діагоналями і кутом між ними.
5. Побудуйте рівносторонній трикутник, у якого центром є задана точка O, а кінці однієї сторони лежать на двох даних прямих.
6. Побудуйте рівнобедрений трикутник за даним кутом α між рівними сторонами, знаючи, що вершина цього кута – дана точка A, а інші дві вершини лежать на: **а)** двох даних прямих; **б)** двох даних колах.

7. Побудуйте рівносторонній трикутник за положенням його центра і відстанями двох вершин від даної точки M.
8. Чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло, центр якого міститься всередині цього чотирикутника. Сума кутів AOB і COD дорівнює $180°$. Доведіть, що сума відстаней від центра кола до сторін цього чотирикутника дорівнює його півпериметру.
9. Всередині рівностороннього трикутника ABC позначили точку M. Доведіть, що з відрізків MA, MB і MC завжди можна побудувати трикутник. Знайдіть кути цього трикутника, якщо $\angle AMB = \varphi_1$, $\angle BMC = \varphi_2$, $\angle AMC = \varphi_3$.
10. Побудуйте квадрат, у якого одна діагональ належить даній прямій, а кінці другої діагоналі містяться на другій даній прямій і даному колі.
11. Точки K і N належать сторонам AB і AC гострокутного трикутника ABC. На стороні BC трикутника ABC знайдіть таку точку P, щоб периметр трикутника KPN був найменший.
12. Побудуйте трикутник за вершиною A і прямими, на яких лежать бісектриси кутів B і C.
13. Дано три прямі a, b і c, які попарно перетинаються. Побудуйте відрізок, перпендикулярний до прямої b, середина якого лежить на прямій b, а кінці – на прямих a і c. Чи завжди задача має розв'язок?
14. На річці є два острови. Туристам на човні треба з одного острова потрапити на інший і побувати (по черзі) на обох берегах річки. Прокладіть маршрут для туристів так, щоб сумарний їх шлях був найкоротшим. Береги річки можна вважати паралельними прямими.
15. На сторонах AB, BC, CD, DA паралелограма $ABCD$ позначили відповідно точки K, M, N і E так, що $KMNE$ – паралелограм. Доведіть, що точки перетину діагоналей цих двох паралелограмів збігаються.
16. Побудуйте відрізок із серединою в заданій точці і кінцями на: **а)** двох заданих колах; **б)** двох заданих прямих.
17. Побудуйте квадрат із центром у заданій точці O так, щоб дві його паралельні сторони або їх продовження проходили через дві дані точки M і N.
18. Побудуйте трапецію $ABCD$ за даними непаралельними прямими AC і BD, серединою бічної сторони і точкою на прямій BC.
19. Побудуйте трикутник ABC за положенням вершини C і двома прямими, які містять медіани, проведені з вершин A і B.
20. Побудуйте ромб за гострим кутом і сумою діагоналей.
21. Впишіть у даний кут коло, що проходить через задану точку всередині цього кута.
22. Впишіть у заданий рівнобедрений трикутник: **а)** квадрат зі стороною на основі трикутника і двома вершинами на його бічних сторонах; **б)** прямокутник зі стороною на основі трикутника, двома вершинами на його бічних сторонах і діагоналями, паралельними бічним сторонам.
23. Знайдіть геометричне місце точок, що ділять навпіл хорди даного кола, проведені через спільну точку A, якщо: **а)** A належить колу; **б)** A не належить колу.
24. Знайдіть геометричне місце точок, що поділяють у відношенні $1 : 3$ січні даного кола, проведені з точки A.
25. Побудуйте коло, яке проходить через дві задані точки і дотикається до заданої прямої.
26. Побудуйте квадрат, три вершини якого належать трьом заданим паралельним прямим.

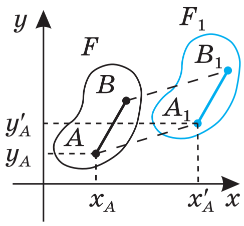
Для допитливих

У квадраті $ABCD$ провели два взаємно перпендикулярні відрізки MN і PQ (див. мал.). Покажіть, що сума периметрів чотирикутників $APON$ і $CQOM$ дорівнює сумі периметрів чотирикутників $BNOQ$ і $DMOP$.



§ 18. Паралельне перенесення на координатній площині

Нагадаємо, що ***при паралельному перенесенні всі точки фігури переміщуються в одному й тому самому напрямі на одну й ту саму відстань***. Тобто дві **довільні точки A і B фігури-прообразу перетворюються на точки A_1 і B_1 фігури-образу так, що точки A, B, B_1, A_1 або утворюють паралелограм**, або належать одній прямій.



$F \longrightarrow F_1$ паралельним перенесенням

ABB_1A_1 – паралелограм.

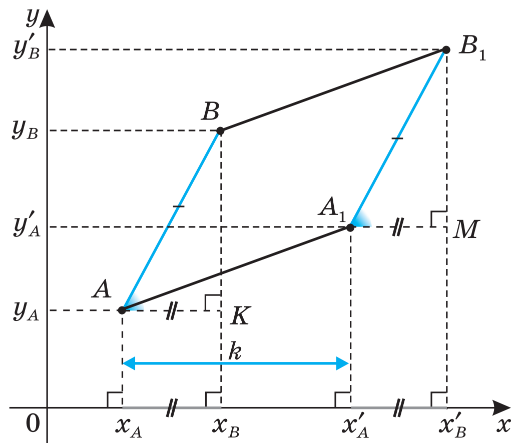
$x'_A - x_A = x'_B - x_B = a$
$y'_A - y_A = y'_B - y_B = b$

Паралельне перенесення:

$(x; y) \to (x + k; y + m)$

Позначимо координати точок A, A_1, B, B_1 як $A(x_A; y_A)$, $A_1(x'_A; y'_A)$, $B(x_B; y_B)$, $B_1(x'_B; y'_B)$. Маємо (мал. 3.29):

1) $AB \parallel A_1B_1$ і $AK \parallel Ox \parallel A_1M$, тоді $\angle BAK = \angle B_1A_1M$;
2) $AB = A_1B_1$ і $\angle BAK = \angle B_1A_1M$, тоді $\triangle ABK = \triangle A_1B_1M$;
3) $x_B - x_A = AK = A_1M = x'_B - x'_A$.



Мал. 3.29

Ми розглянули випадок $x_B > x_A$.

Якщо $x_A > x_B$, відповідно до попереднього маємо $x_A - x_B = x'_A - x'_B$ і співвідношення $x_B - x_A = x'_B - x'_A$ виконується.

Якщо $x_B = x_A$, то $AB || Oy$ і $A_1B_1 || AB || Oy$, тобто маємо: $x_B - x_A = 0 = x'_B - x'_A$.

У випадку, якщо точки A, B, B_1, A_1 належать прямій, очевидно, що співвідношення $x_B - x_A = x'_B - x'_A$ теж виконується.

Таким чином ми довели, що при паралельному перенесенні для двох довільних точок A і B фігури-прообразу, які переходять у точки A_1 і B_1 фігури-образу, виконується співвідношення: $x_B - x_A = x'_B - x'_A$.

Тоді для цього перетворення $x'_B - x_B = x'_A - x_A$ – величина стала, позначимо її через k. Якщо відомо значення k, можна визначити абсцису точки-образу за абсцисою точки-прообразу:

$$x'_A = x_A + k,\ x'_B = x_B + k,\ \ldots .$$

Аналогічно отримаємо: $y'_A = y_A + m$, $y'_B = y_B + m$, ...

Тому перетворенню паралельне перенесення можна дати і таке означення.

Паралельним перенесенням називається перетворення, при якому довільна точка (x; y) фігури-прообразу переходить у точку (x + k; y + m) фігури-образу.

Порівняємо довжини відрізків AB і A_1B_1:

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = ((x_B + k) - (x_A + k))^2 + ((y_B + m) - (y_A + m))^2 = A_1B_1^2.$$

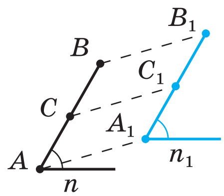
Звідси: $AB = A_1B_1$, відстані зберігаються, і *паралельне перенесення* є *рух*, як ми і казали раніше.

Зауваження. Користуючись координатним методом, доведіть ВЛАСТИВОСТІ *паралельного перенесення*.

1. **При паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну їй пряму (або сама в себе).**
2. **Якщо при паралельному перенесенні точки A, B, C переходять у точки A_1, B_1, C_1 і при цьому точка C належить відрізку AB, то точка C_1 лежатиме на відрізку A_1B_1.**
3. **Кути між прямими зберігаються.**
4. **Композиція (тобто послідовне виконання) двох паралельних перенесень є паралельним перенесенням.**

Порада. Скористайтеся методом від супротивного.

ВЛАСТИВОСТІ
паралельного
перенесення:



1. $(AB) \to (A_1B_1) \parallel (AB)$

2. $C \in [AB]$ $\downarrow$ $C_1 \in [A_1B_1]$

3. $(AB)\hat{}n = (A_1B_1)\hat{}n_1$

4. $F \to F_1 \to F_2$ паралельним перенесенням $\Downarrow$ $F \to F_2$ паралельним перенесенням

Практична робота 21

1. Накресліть декартову систему координат і довільний трикутник у ній. Позначте його вершини як A, B, C і запишіть їх координати.
2. Запишіть координати точок A_1, B_1 і C_1, абсциси яких більші на 3 одиниці за абсциси точок A, B і C, а ординати менші на 2 одиниці за ординати точок A, B і C відповідно.
3. У тій самій координатній площині (див. п. 1) накресліть трикутник з вершинами у точках A_1, B_1, C_1 і перевірте: **а)** чи рівні відрізки CC_1, BB_1, AA_1; **б)** чи паралельні відрізки CC_1, BB_1, AA_1; **в)** чи рівні відповідні сторони трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Поясніть чому. Чи є трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівними?
4. Що можна сказати про кути трикутників ABC і $A_1B_1C_1$? Зробіть висновок.
5. Знайдіть різницю між відповідними координатами середин сторін AB і A_1B_1. Зробіть висновок.
6. Перевірте, чи паралельні медіани, проведені до сторін AB і A_1B_1 трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Зробіть висновок.

Для допитливих

1. Доведіть, що при паралельному перенесенні коло переходить у коло.

2. Дано трикутник ABC. Точка M лежить усередині цього трикутника і рухається паралельно стороні BC до перетину зі стороною CA, далі – паралельно AB до перетину з BC, потім – паралельно AC до перетину з AB і т. д. Доведіть, що через деяке число кроків траєкторія руху точки замкнеться.

Завдання 25

1°. Виконайте паралельне перенесення точок $A(2; 5)$, $B(0; -7)$, $C(3; 0)$ на 3 одиниці паралельно осі абсцис у додатному напрямі. Запишіть координати побудованих точок.

2°. Виконайте паралельне перенесення точок $A(0; 2)$, $C(-3; 4)$, $O(0; 0)$ на 5 одиниць паралельно осі ординат у від'ємному напрямі. Запишіть координати побудованих точок.

3. При паралельному перенесенні, яке задається формулами $x_1 = x - 3$, $y_1 = y + 2$, точка A відображається в точку A_1. Знайдіть координати точки A_1, якщо: **а)** $A(-2; 4)$; **б)** $A(11; 8)$; **в)** $A(-3; 0)$.

4. Чи існує паралельне перенесення, при якому: **а)** точка $A(2; 1)$ переходить у точку $A_1(4; 3)$, а точка $B(1; 0)$ – у точку $B_1(0; -1)$; **б)** точка $C(-2; 1)$ переходить у точку $C_1(-1; 0)$, а точка $P(1; -3)$ – у точку $P_1(0; -4)$?

5. При паралельному перенесенні, яке задається формулами $x_1 = x + 8$, $y_1 = y - 1$, точка B переходить у точку B_1. Знайдіть координати точки B, якщо: **а)** $B_1(0; 4)$; **б)** $B_1(-12; 9)$; **в)** $B_1(-5; -4)$.

6. Запишіть формули паралельного перенесення, яке: **а)** точку $C(-4; 7)$ відображає у точку $C_1(8; -3)$; **б)** точку $D(0; 5)$ відображає у точку $D_1(7; 8)$.

7. При паралельному перенесенні точка $A(3; -7)$ відображається в точку $A_1(-5; 1)$. В яку точку відображається точка: **а)** $B(-8; 6)$; **б)** $F(3; 17)$?

8. При паралельному перенесенні точка $O(0; 0)$ переходить у точку $B(3; 0)$. Знайдіть координати прообразу точки: **а)** $A_1(-5; 4)$; **б)** $B_1(-12; 9)$.

9*. При паралельному перенесенні вершина $A(1; 3)$ трикутника ABC переходить у вершину $K(5; -3)$ трикутника KLM. Знайдіть координати двох інших вершин утвореного трикутника KLM, якщо $B(6; 1)$, $C(-1; -1)$.

10. Вершини трикутника ABC мають координати: $A(1; 1)$, $B(-1; 2)$, $C(0; 9)$. Знайдіть координати вершин образу цього трикутника, отриманого паралельним перенесенням: $x_1 = x + 3$; $y_1 = y - 2$.

11*. При паралельному перенесенні центр кола $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ потрапив у точку $(-10; 6)$. Запишіть відповідні формули цього перетворення.

12*. Дано координати кінців відрізка $M(4; -6)$ і $N(-6; 8)$. Знайдіть паралельне перенесення, при якому середина відрізка потрапить у початок координат. Знайдіть координати кінців відрізка-образу при такому перетворенні.

13*. Вкажіть координати центра кола-образу і знайдіть його рівняння для паралельного перенесення $x_1 = x - 1$; $y_1 = y + 2$, якщо рівняння відповідного прообразу має вигляд: **а)** $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$; **б)** $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 1 = 0$.

14*. Пряма $3x - 2y = 1$ після паралельного перенесення проходить через точку: **а)** $(0; 3)$; **б)** початок координат; **в)** $(-1; 7)$. Знайдіть рівняння прямої після перенесення.

15.** Побудуйте відрізок, кінці якого належать двом даним прямим, а серединою є задана точка.

16.** Побудуйте геометричну множину точок, різниця віддалей від яких до двох заданих прямих є величиною сталою.

Для допитливих

Паралельне перенесення допоможе вам розв'язати наступні задачі.

1. Дано кут ABC і пряму l. Побудуйте пряму, паралельну l, на якій сторони кута ABC відтинають відрізок заданої довжини a.

2. Дано два кола і пряма l. Побудуйте пряму l_1, паралельну l, так, щоб:

а) відстань між точками перетину l_1 з даними колами мала задане значення a;

б) обидва заданих кола відтинали на прямій l_1 рівні хорди;

в) задані кола відтинали на прямій l_1 хорди, сума (або різниця) яких дорівнює заданому відрізку a.

§ 19. Перетворення симетрії на координатній площині

ОСЬОВА СИМЕТРІЯ

При перетворенні осьової симетрії зручно спрямувати одну з координатних осей уздовж осі симетрії. Тоді легко знайти координати точок образу.

Якщо вісь симетрії збігається з віссю *Oy* (мал. 3.30-а), **то ординати відповідних точок образу і прообразу рівні, а їхні абсциси протилежні:**

$$y'_A = y_A;\ x'_A = -x_A.$$

Якщо вісь симетрії збігається з віссю *Ox* (мал. 3.30-б), **то абсциси відповідних точок образу і прообразу рівні, а ординати – протилежні:**

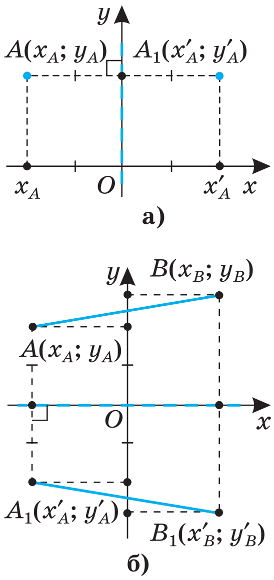
$$x'_A = x_A;\ y'_A = -y_A.$$

Переконаємося, що відстань між точками при перетворенні осьової симетрії не змінюється.

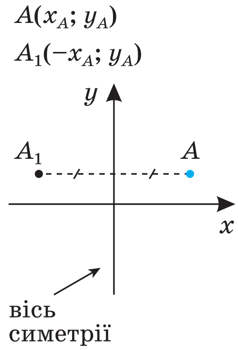
Оберемо вісь симетрії за вісь абсцис (мал. 3.30-б). Маємо:

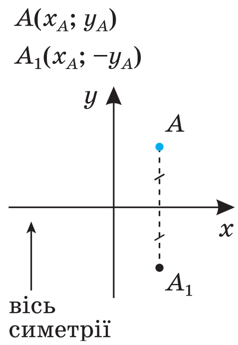
$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 =$$
$$= (x_B - x_A)^2 + ((-y_B) - (-y_A))^2 = A_1B_1^{\,2}.$$

Звідси: $AB = A_1B_1$, відстані справді зберігаються, і *перетворення симетрії відносно прямої є рухом*.



Мал. 3.30





Для допитливих

Перетворення осьової симетрії легко записати, якщо сумістити одну з координатних осей з віссю симетрії. А як знайти координати точки, симетричної даній відносно прямої, що не збігається з віссю *Oy* (або *Ox*).

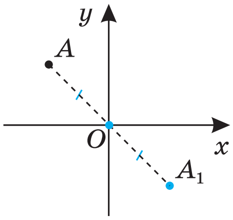
Якщо це пряма $x = a$ (або $y = b$), яка паралельна одній з осей координат, треба паралельним перенесенням $x' = x - a$ ($y' = y - b$) вісь *Oy* (або *Ox*) сумістити з віссю симетрії. Після чого виконати перетворення симетрії і обернене паралельне перенесення. Тоді **точка, симетрична точці $A(x_A; y_A)$ відносно прямої $x = a$ (або $y = b$), має координати $A_1(-x_A + 2a; y_A)$ (або $A_1(x_A; -y_A + 2b)$).**

А якщо вісь симетрії (n) – пряма $y = kx + l$, не паралельна осям координат? Є дві можливості.

Можна: послідовно здійснивши паралельне перенесення і поворот, сумістити одну з осей координат із віссю симетрії; після осьової симетрії здійснити обернені перетворення паралельного перенесення і повороту.

Можна: записати рівняння прямої, перпендикулярної до (n), що проходить через точку A; обчислити координати P – точки перетину цього перпендикуляра з (n); записати умову того, що точка P є серединою відрізка AA_1, і знайти координати точки A_1.

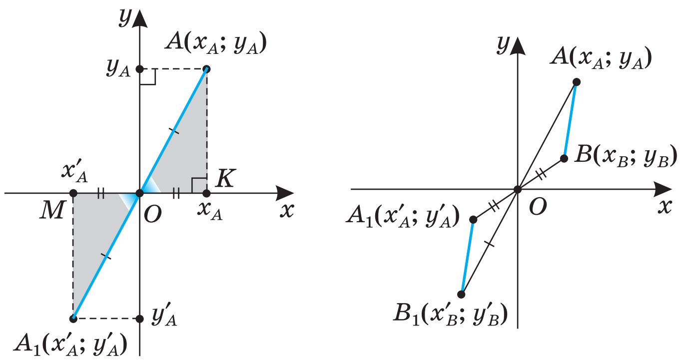
$A(x_A; y_A)$
$\downarrow$
$A_1(-x_A; -y_A)$



ЦЕНТРАЛЬНА СИМЕТРІЯ

При перетворенні центральної симетрії зручно обирати за початок координат центр симетрії.

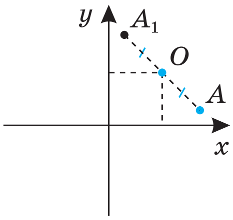
Тоді, **якщо точка $A(x_A; y_A)$ перетворенням симетрії відносно точки $O(0; 0)$ переходить у точку $A_1(x'_A; y'_A)$, то і абсциса, і ордината точки змінюють знаки на протилежні** $x'_A = -x_A$ і $y'_A = -y_A$ (мал. 3.31-а). То це випливає з рівності двох прямокутних трикутників (AOK і A_1OM) за гіпотенузою і гострим кутом (мал. 3.31-б).



а) б)

Мал. 3.31

$O(x_O; y_O)$ – центр симетрії
$A(x_A; y_A)$
$\downarrow$
$A_1(-x_A+2x_O; -y_A+2y_O)$



Переконаємося, що відстань між точками при центральній симетрії не змінюється.

Маємо (мал. 3.31-б):

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = ((-x_B) - (-x_A))^2 + ((-y_B) - (-y_A))^2 = A_1B_1^{\,2}.$$

Звідси: $AB = A_1B_1$, відстані дійсно зберігаються, і *перетворення симетрії відносно точки є рухом*.

ВЛАСТИВОСТІ
перетворень
симетрії:

1. $(AB) \to (A_1B_1)$
2. $[AB) \to [A_1B_1)$
3. $[AB] \to [A_1B_1]$
4. $C \in [AB]$
$\downarrow$
$C_1 \in [A_1B_1]$
5. $n\hat{\ }m = n_1\hat{\ }m_1$

Користуючись координатним методом, доведіть такі ВЛАСТИВОСТІ *перетворень симетрії*.

1. **Пряма переходить у пряму.**
2. **Напівпряма переходить у напівпряму.**
3. **Відрізок переходить у відрізок.**
4. **Якщо образами точок A, B і C є точки A_1, B_1 і C_1 і при цьому точка C належить відрізку AB, то точка C_1 лежатиме на відрізку A_1B_1.**
5. **Кути між прямими зберігаються.**

Зауваження. Якщо центр симетрії $O(x_O; y_O)$ не збігається з початком координат, то координати точки A_1, симетричної точці $A(x_A; y_A)$, отримуємо з умови, що точка O є серединою відрізка AA_1:

$$x_O = \frac{x_A + x_1}{2};\ x_1 = -x_A + 2x_O;\ y_O = \frac{y_A + y_1}{2};\ y_1 = -y_A + 2y_O.$$

Практична робота 22

1. Накресліть декартову систему координат і позначте в ній точки $A(2; 3)$, $B(5; 0)$, $C(0; -7)$.
2. Побудуйте точки, симетричні точкам A, B, C відносно: **а)** осі Ox; **б)** осі Oy. Запишіть координати побудованих точок.

Практична робота 23

1. Накресліть декартову систему координат і в ній трикутник, вершини якого мають координати $A(-5; 5)$, $B(-1; 3)$, $C(-5; 1)$.
2. Побудуйте трикутники $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$, утворені перетворенням симетрії трикутника ABC відносно осей Ox і Oy відповідно.
3. Знайдіть координати вершин трикутників $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ та порівняйте їх з координатами вершин трикутника ABC. Зробіть висновок.

Завдання 26

1°. Точка $A(x; y)$ відображається осьовою симетрією відносно осі Ox у точку $A_1(2; -5)$. Визначте координати точки A.

2. Задано дві точки, симетричні відносно осі Ox. Відновіть пропущені координати: **а)** $A(5; \ldots)$ і $A_1(\ldots; -2)$; **б)** $D(\ldots; 4)$ і $D_1(12; \ldots)$; **в)** $M(2; \ldots)$ і $M_1(2; \ldots)$.

3. Задано дві точки, симетричні відносно осі Oy. Відновіть пропущені координати: **а)** $A(\ldots; 7)$ і $A_1(3; \ldots)$; **б)** $F(4; \ldots)$ і $F_1(\ldots; -2)$; **в)** $K(\ldots; 3)$ і $K_1(\ldots; 3)$.

4°. Відносно якої з координатних осей симетричними є точки: **а)** $A(7; 2)$ і $A_1(-7; 2)$; **б)** $B(-3; -2)$ і $B_1(-3; 2)$?

5. Серед точок $A(1; 5)$, $B(3; -2)$, $C(-1; 5)$, $D(0; -7)$, $E(5; -1)$, $F(0; 7)$, $G(-2; 3)$, $H(4; 0)$, $K(0; 4)$, $L(2; 1)$, $M(1; -10)$ виберіть пари точок:
а) симетричні відносно осі Ox; **б)** симетричні відносно осі Oy.

6*. Осями симетрії квадрата є осі координат. Точка $K(4; -4)$ – середина однієї зі сторін. Знайдіть координати вершин квадрата.

7*. $ABCD$ – прямокутник, осі симетрії якого $x = -2$, $y = 3$. Причому $C(-7; -1)$. Знайдіть координати інших вершин прямокутника.

8.** Дано точку $A(3; 4)$. Знайдіть координати точки: **а)** A_1, яка симетрична точці A відносно прямої $y = x$; **б)** A_2, яка симетрична точці A відносно прямої $y = -x$.

9.** Дано точки $A(-2; 3)$ і $B(4; -3)$. Запишіть рівняння прямої, відносно якої точка A симетрична точці B.

10.** Точки $A(2; 7)$ і $A_1(4; -1)$ симетричні відносно деякої осі. Складіть рівняння осі симетрії. Якій точці буде симетрична точка $B(-2; 6)$ відносно цієї осі?

Для допитливих

Про улюблений метод доведення «будь-чого» Реймонда М. Смалліана.
Цей метод має лише один недолік – скористатися ним може той, хто хоча б трішки вміє показувати фокуси з картами.

Продемонструємо цей метод на прикладі. Нехай вам треба комусь довести, що ви – граф Дракула. Тоді ви говорите своєму опонентові: «З усієї логіки вам необхідно знати лише одне – якщо задано два твердження p і q, причому p – правильне, то хоча б одне з тверджень $\{p, q\}$ – правильне». Це навряд хто-небудь буде заперечувати. «Чудово, – кажете ви і виймаєте з кишені колоду карт: – Ви бачите, ця карта червоної масті». І з цими словами ви кладете карту червоної масті малюнком донизу на ліву руку своєї «жертви» і просите накрити цю карту зверху правою рукою. «Нехай p – твердження про те, що ви тримаєте карту червоної масті, а q – про те, що я є графом Дракулою, – продовжуєте ви. – Чи згодні ви, що або p, або q правильне?» Ваша «жертва» погоджується. «А тепер відкрийте карту!» – наказуєте ви. «Жертва» слухняно відкриває карту і бачить, що вона чорної масті! «Тоді, – завершуєте ви своє «доведення», – твердження q – правильне, і я – граф Дракула!»

11.** Дано точки $A(-1; 5)$ і $B(4; -6)$. Знайдіть координати точок, симетричних точкам A і B: **а)** відносно прямої $2x - 3y = 0$; **б)** відносно прямої $x + 2y = 4$.

12.** Складіть рівняння кола, симетричного колу $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$ відносно прямої: **а)** $y = x$; **б)** $y = x + 2$; **в)** $y = 2x - 1$.

13.** Вершини ромба лежать на прямих $y = x$, $y = -x$. Середина однієї зі сторін має координати $(1; 2)$. Знайдіть координати середин усіх інших сторін.

14.** Точки M і N лежать по різні боки від прямої l. Знайдіть координати точки X прямої l, для якої бісектриса кута MXN належить прямій l.

15.** Точки A і B лежать по різні боки від прямої l. Знайдіть координати точки на прямій l, для якої різниця відстаней до точок A і B була б найбільшою.

16.** Точки A і B лежать по один бік від прямої l. Знайдіть координати точки на прямій l, сума відстаней від якої до точок A і B була б найменшою.

17.** Побудуйте трикутник за вершиною і прямими, на яких лежать бісектриси двох інших кутів.

18.** Побудуйте ромб за гострим кутом і сумою діагоналей.

19.** Побудуйте трикутник за точками, які симетричні центру описаного навколо нього кола відносно його сторін.

Практична робота 24

1. Накресліть декартову систему координат і в ній трикутник з вершинами в точках $A(1; 1)$, $B(2;4)$, $C(7; 0)$.
2. Виконайте перетворення симетрії точок A, B, C відносно початку координат. Позначте відповідні точки як A_1, B_1, C_1.
3. Знайдіть координати вершин трикутника $A_1B_1C_1$ і порівняйте їх з координатами вершин трикутника ABC. Зробіть висновок.

Практична робота 25

1. Накресліть декартову систему координат і в ній довільний трикутник KMN.
2. Побудуйте трикутник $K_1M_1N_1$, симетричний трикутнику KMN відносно осі Ox.
3. Побудуйте трикутник $K_2M_2N_2$, симетричний трикутнику KMN відносно осі Oy.
4. Побудуйте трикутник $K_3M_3N_3$, симетричний трикутнику KMN відносно початку координат.
5. Які з трикутників сумістилися? Зробіть висновок.

Завдання 27

1°. Побудуйте точки, симетричні точкам $A(3; -2)$, $B(0; 5)$ і $C(-2; -4)$ відносно початку координат. Запишіть їх координати.

2°. Точка A відображена симетрією відносно початку координат в точку $A_1(-3; 4)$. Які координати точки A?

3°. Точки $B(3; \ldots)$ і $B_1(\ldots; -1)$ симетричні відносно початку координат. Відновіть пропущені координати точок.

4°. Точка A має координати $(a; b)$. Які координати має точка, симетрична точці A відносно початку координат?

Для допитливих

1. Визначте координати точки N, симетричної точці $M(2; 3)$, відносно прямої, яка проходить через точки A і B, якщо: **а)** $A(2; 1)$, $B(0; 1)$; **б)** $A(3; 1)$, $B(1; -1)$.

2. Знайдіть рівняння прямої, в яку переходить пряма $y = 2$ при повороті навколо: **а)** точки $(0; 2)$ на $30°$; **б)** початку координат на $45°$.

3. Сторона квадрата дорівнює 2. Запишіть його одним рівнянням, якщо сторони цього квадрата паралельні осям координат, а його центр має координати: **а)** $(0; 0)$; **б)** $(2; 0)$; **в)** $(0; -3)$; **г)** $(-1; 4)$.

5. Серед точок $A(-1;\ 5)$, $B(3;\ -2)$, $C(0;\ 0)$, $D(5;\ 1)$, $F(1;\ -5)$, $G(7;\ 0)$, $H(-3;\ 2)$ виберіть ті, які попарно симетричні відносно початку координат.

6. Точка $A(-3;\ 4)$ відображається осьовою симетрією відносно осі Oy у точку A_1. Точка A_1 відображається осьовою симетрією відносно осі Ox у точку A_2. Точка A_2 відображається центральною симетрією відносно початку координат у точку A_3. Запишіть координати точок A_1, A_2, A_3.

7. Дано точку $A(3;\ 7)$. Які координати має точка, симетрична A відносно: **а°)** початку координат; **б*)** точки $B(3;\ 2)$; **в*)** точки $C(-1;\ -6)$?

8*. Дано точки $A(-3;\ 8)$, $B(12;\ -4)$. Знайдіть центр симетрії точок A і B.

9. Вершини трикутника містяться в точках $A(3;\ 4)$, $B(-1;\ 0)$, $C(2;\ -3)$. Знайдіть координати вершин трикутника, який симетричний даному відносно: **а)** початку координат; **б*)** вершини A; **в*)** точки $M(1;\ 1)$.

10*. Три вершини паралелограма $ABCD$ мають координати $A(2;\ 7)$, $B(-1;\ 4)$, $C(-3;\ -5)$. Знайдіть координати центра симетрії паралелограма і координати точки D.

11*. Напишіть рівняння кола, яке симетричне колу $(x-3)^2+(y+2)^2=7$ відносно точки $K(5;\ 4)$.

12. Складіть рівняння прямої, симетричної прямій $2x-3y=6$ відносно: **а*)** початку координат; **б**)** точки $M(1;\ 3)$.

13.** Доведіть, що центри симетрії середин протилежних сторін чотирикутника збігаються.

14.** Побудуйте відрізок із серединою в даній точці і кінцями на: **а)** двох даних прямих; **б)** даній прямій і даному колі; **в)** двох даних колах.

15.** Побудуйте паралелограм з центром симетрії у даній точці O і вершинами на: **а)** трьох даних прямих; **б)** двох прямих і колі; **в)** трьох колах.

16.** Спробуйте розв'язати задачі 7 і 9, застосовуючи паралельне перенесення.

17.** Діагоналі ромба лежать на прямих $y=x$ і $y=-x$. Серединою однієї зі сторін є точка $(1;\ 2)$. Знайдіть координати вершин ромба.

18.** Знайдіть координати кінців відрізка, якщо координати його середини $(3;\ 4)$, а кінці лежать на прямих:

а) $y=2x+5$ і $y=\frac{1}{2}x-1$; **б)** $y=2x+5$ і $y=-3x-2$.

Для допитливих

Доведіть **опорні факти**.

1. Перетворення симетрії відносно початку координат є композицією осьових симетрій відносно Ox і Oy.

2. Перетворення симетрії відносно точки $(x_O;\ y_O)$ є композицією осьових симетрій відносно прямих $x=x_O$ і $y=y_O$.

Осьові симетрії є «цеглинками», з яких можна «побудувати» всі інші рухи на площині. Упевніться в цьому самі, розв'язуючи такі **опорні задачі**.

3. Доведіть, що композиція двох центральних симетрій є паралельним перенесенням.

4. Доведіть, що композиція паралельного перенесення і центральної симетрії є центральною симетрією.

5. Доведіть, що композиція двох осьових симетрій є паралельним перенесенням, якщо їх осі паралельні, і поворотом навколо точки O, якщо їх осі перетинаються у точці O.

6. Доведіть, що композиція повороту навколо точки O і осьової симетрії відносно прямої, яка проходить через точку O, є осьовою симетрією.

7. Доведіть, що будь-який рух є композицією повороту, паралельного перенесення й осьової симетрії.

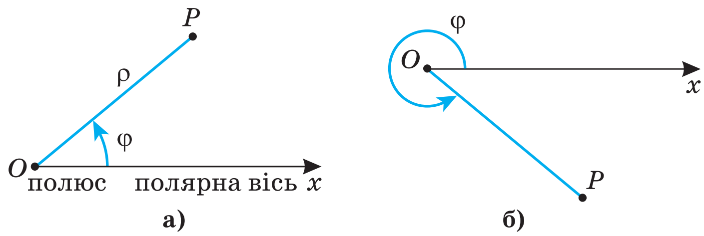
8. Доведіть, що будь-який рух на площині є композицією не більш як трьох симетрій відносно прямих.

§ 20. Полярна система координат і перетворення поворот на координатній площині

В аналітичній геометрії застосовуються не лише прямокутні системи координат, а й багато інших систем. З них найпоширеніша *система полярних координат*, яка є дуже простою і зручною, наприклад для опису перетворення поворот.

Розглянемо визначення *полярних координат точки*.

Нехай у площині дано точку O (*полюс*) і півпряму Ox (*полярну вісь*), що виходить із точки O. Візьмемо на цій площині довільну точку P, побудуємо відрізок OP і позначимо довжину цього відрізка через ρ, а кут POx – через φ (мал. 3.32-а).



Мал. 3.32

Полярними координатами точки P називають ρ і φ: ρ – *полярним радіусом* цієї точки, а φ – її *полярним кутом*.

Зауважимо, що градусна міра полярного кута φ може мати значення більші за 180°, наприклад, якщо точка розміщена відносно полярної осі так, як показано на малюнку 3.32-б.

Хто займався у туристичних секціях, той легко зрозуміє, що рух за азимутом ґрунтується на тому самому принципі, що й полярні координати.

За допомогою полярних координат можна задавати на площині різні множини точок.

Наприклад, дуже простим буде **рівняння кола з центром у полюсі**. Якщо радіус кола дорівнює R, то і полярний радіус довільної точки кола (і тільки точок кола, що розглядається) дорівнює R. Тоді рівняння цього кола має вигляд $\rho = R$.

Розглянемо ще приклади спіралей. Зауважимо, що при описуванні спіралей міра кута φ може перевищувати повний кут. Після того, як полярна вісь пройде перший повний оберт, мірою полярного кута φ буде сума радіанної міри кута POX (мал. 3.32-а) і повного кута, тобто 2π; після другого оберту до міри кута POX додають $2 \cdot 2\pi$ і т. д.). Рівняння $\rho = \varphi$ зображує спіраль – зі збільшенням міри кута (у радіанах) збільшується значення ρ.

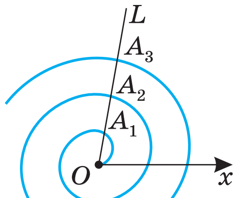
Іншу *спіраль* описує рівняння $\rho = \dfrac{1}{\varphi}$. Тут малим значенням φ відповідають великі значення ρ і навпаки. При збільшенні φ значення ρ зменшується – спіраль «накручується» на точку O.

З а у в а ж е н н я. Значення кута φ в останніх рівняннях зручно задавати не в градусах, а в *радіанах* (див. с. 99).

Рівняння $\rho = a\varphi$, де a – стале додатне число, визначає нескінченну лінію, яка і називається *спіраллю Архімеда* (мал. 3.33).

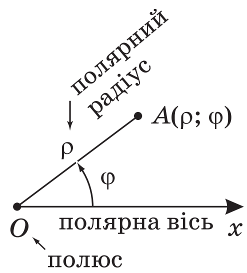
Проведемо на малюнку 3.33 з точки O промінь OL і позначимо точки його перетину зі спіраллю Архімеда в порядку їх розміщення на OL (рахуючи від точки O) через A_1, A_2, A_3, ... Нехай кут A_1Ox, що менший за 2π, дорівнює γ рад. Точці A_2 буде відповідати кут $\gamma + 2\pi$, A_3 – кут $(\gamma + 4\pi)$ і т. д. Тоді

$$OA_1 = a\gamma,\ OA_2 = a(\gamma + 2\pi),$$
$$OA_3 = a(\gamma + 4\pi),\ \dots .$$



Мал. 3.33

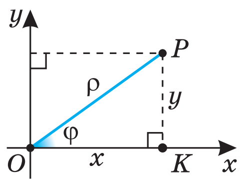
Звідси: $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = 2\pi a$. Таким чином, відстань між сусідніми точками перетину спіралі з променем OL є сталою величиною. Зауважимо, що цей висновок не залежить від того, який саме напрям має промінь OL.



$\underbrace{A(\rho;\ \varphi)}$
полярні координати

Від рівняння фігури в прямокутних декартових координатах можна перейти до рівняння тієї самої фігури в полярних координатах і навпаки.

Якщо взяти за полярну вісь додатну частину осі Ox прямокутної декартової системи координат, а за полюс O – початок координат (мал. 3.34), то можна знайти залежність між прямокутними декартовими координатами точки $(x; y)$ та її полярними координатами $(\rho; \varphi)$:



Мал. 3.34

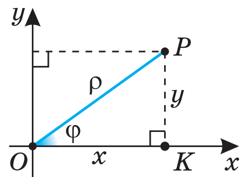
$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$$

З прямокутного трикутника OPK знаходимо, що

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Маємо *формули для переходу від декартової прямокутної системи координат до полярної і навпаки.*

Зв'язок між декартовою і полярною системами:



$$x = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi,$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

З а у в а ж е н н я. Для того щоб можна було користуватися такими залежностями для довільного положення точки на площині, треба визначити тригонометричні функції для кутів, більших за 180°. Їх визначають подібно до того, як це ми робили для кутів у межах від 0° до 180° (с. 40), тобто через координати точки одиничного кола.

Для допитливих

1. Яку множину точок описує рівняння $\varphi = \alpha$, де α – деяка постійна міра кута (наприклад, 45°)?

2. Запишіть співвідношення, що визначає ГМТ площини, у декартових координатах: **а)** $\varphi = 45°$; **б)** $\rho \leqslant 5$; **в)** $\rho > 2$; **г)** $\varphi \leqslant 30°$.

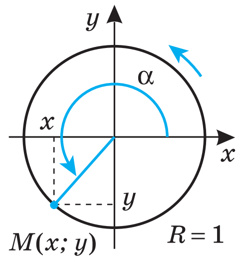
Розглядається кінець радіуса одиничного кола з центром у початку координат (той, що міститься на півколі); відповідний кут відкладається від осі Ox проти годинникової стрілки.

Для довільного кута:

- ***синус кута – ордината (чисельно) кінця радіуса одиничного півкола, що відповідає цьому куту;***
- ***косинус кута – абсциса (чисельно) кінця радіуса одиничного півкола, що відповідає цьому куту*** (мал. 3.35).

Тобто чисельно:

$$x = \cos\alpha,\ y = \sin\alpha,\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$



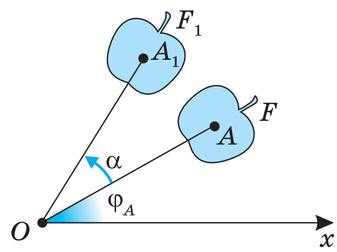
Мал. 3.35

ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОВОРОТ

Тепер спробуємо за допомогою полярної системи координат описати перетворення поворот. Для цього візьмемо центр повороту за полюс O.

Нехай точка A фігури-прообразу має полярні координати $A(\rho_A;\ \varphi_A)$ (мал. 3.36). Після повороту на кут α навколо центру поворота O точка A перейде у точку $A_1(\rho_A;\ \varphi_A + \alpha)$.

Тобто *довільна точка* $(\rho;\ \varphi)$ *фігури-прообразу переходить поворотом на кут* α *навколо полюса* O *у точку* $(\rho;\ \varphi + \alpha)$ *фігури-образу*.



Мал. 3.36

Практична робота 26

1. Накресліть полярну вісь і побудуйте точки, задані полярними координатами:

а) $P\left(1;\ \frac{\pi}{2}\right)$; **б)** $O\left(4;\ \frac{\pi}{3}\right)$; **в)** $L\left(0;\ \frac{\pi}{6}\right)$; **г)** $U\left(2;\ \frac{3}{2}\pi\right)$; **д)** $S(2;\ 0)$.

2. Накресліть декартову систему координат із початком у полюсі вашої полярної системи координат так, щоб вісь Ox містила полярну вісь.
3. Знайдіть абсциси й ординати точок P, O, L, U і S.

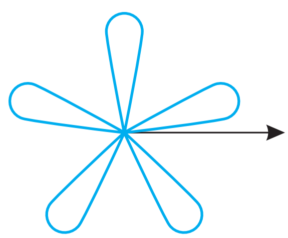
Практична робота 27

1. Накресліть декартову систему координат і в ній трикутник ABC.
2. Побудуйте трикутник $A_1B_1C_1$, утворений перетворенням симетрії трикутника ABC відносно початку координат.

Для допитливих

Вам зараз важко зрозуміти переваги запису рівнянь кривих у полярній системі координат (бо ви ще тільки починаєте вивчати тригонометрію). Проте полярна система інколи значно зручніша за декартову. Наприклад, квітку, яку ви бачите на малюнку, задає рівняння $\rho = \sin 5\varphi$.

Побудуйте *кардіоїду*, задану рівнянням $\rho = 1 - \sin\varphi$. Нагадаємо, що ця крива (див. «Геометрія–7») – траєкторія точки кола, яка котиться (без проковзування) уздовж рівного йому нерухомого кола.



3. Побудуйте трикутник $A_2B_2C_2$, утворений перетворенням поворот трикутника ABC навколо початку координат на 90°, і трикутник $A_3B_3C_3$, утворений перетворенням поворот трикутника ABC навколо початку координат на 180°.
4. Знайдіть координати вершин трикутників ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ і $A_3B_3C_3$ та порівняйте їх. Зробіть висновки.

Завдання 28

1. Знайдіть декартові координати точок, які задано у полярній системі координат:

   а) $G\left(3;\ \frac{\pi}{4}\right)$; **б)** $E\left(8;\ \frac{\pi}{3}\right)$; **в)** $O\left(4;\ \frac{\pi}{6}\right)$; **г)** $M\left(12;\ \frac{2}{3}\pi\right)$; **д)** $T(3;\ \pi)$.
2. Знайдіть полярні координати точок, які задано у декартовій системі координат:
   а) $(0;\ 3)$; **б)** $(8;\ 0)$; **в)** $(-\sqrt{2};\ \sqrt{2})$; **г)** $(-\sqrt{6};\ -\sqrt{2})$; **д)** $(3;\ 3\sqrt{3})$.
3. У декартовій системі координати задано точки: $A(3;\ 0)$, $B(-2;\ 0)$, $C(5;\ 2)$, $D(-1;\ -3)$. Знайдіть координати образів цих точок після повороту навколо початку координат на 90°: **а)** за годинниковою стрілкою; **б)** проти годинникової стрілки.
4. У декартовій системі координат точка $M(2;\ \ldots)$ відображається поворотом навколо початку координат на 90° проти годинникової стрілки у точку $M_1(-5;\ \ldots)$. Визначте пропущені координати точок.
5. Відновіть пропущені декартові координати точок $M(-3;\ \ldots)$ і $M_1(5;\ \ldots)$, якщо відомо, що точка M_1 – образ точки M при повороті навколо початку координат на 90° за годинниковою стрілкою.
6. Які декартові координати матимуть вершини прямокутника, утвореного з прямокутника з вершинами $A(-3;\ 2)$, $B(3;\ 2)$, $C(3;\ -2)$, $D(-3;\ -2)$ поворотом навколо початку координат: **а)** на 90°; **б)** на 180°?
7. Побудуйте криву, що задана у полярній системі координат рівнянням:

   а) $\rho = 1$; **б)** $\rho = 4$; **в)** $\varphi = \frac{\pi}{4}$; **г)** $\varphi = 0$; **д)** $\varphi^2 - \frac{\pi^2}{3} = 0$; **е)** $\rho = 1 - \cos\varphi$.
8. У полярній системі координат задано точки $A\left(2;\ \frac{\pi}{3}\right)$ і $B\left(4;\ \frac{\pi}{6}\right)$. Які координати матимуть образи цих точок при повороті навколо полюса на: **а)** $\frac{\pi}{6}$; **б)** $\frac{\pi}{3}$?
9. Вершини трикутника мають полярні координати: $A\left(3;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(6;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $C\left(2;\ \frac{2\pi}{3}\right)$.

   Знайдіть координати вершин фігури-образу $A_1B_1C_1$ при повороті трикутника ABC на $\frac{\pi}{3}$ навколо полюса.
10. Центр кола знаходиться в точці $M\left(5;\ \frac{4\pi}{3}\right)$, радіус кола дорівнює 3. Побудуйте образ цього кола, отриманий його поворотом навколо полюса на $\frac{\pi}{4}$. Вкажіть координати центра кола.
11. Запишіть рівняння у полярних координатах, якщо для декартових координат точок воно має вигляд:
    а) $x^2 + y^2 = 4$; **б)** $x^2 + y^2 = 3$; **в)** $y = \sqrt{3}x$; **г)** $y^2 - x^2 = 0$.

Завдання для повторення розділу III

1. Яке перетворення фігур на площині називається рухом?
2. Яке перетворення називається паралельним перенесенням?
3. Яке перетворення називається: **а)** центральною симетрією; **б)** осьовою симетрією?

4. Яке перетворення називається поворотом?
5. Яке перетворення називається: **а)** гомотетією; **б)** подібністю?
6. Які фігури називають подібними? Як відносяться площі таких фігур?
7. Запишіть формули паралельного перенесення на координатній площині.
8. Які властивості паралельного перенесення і перетворення подібності ви знаєте?
9. Задано: точку, пряму, відрізок, трикутник, чотирикутник. Як виконати для цих фігур: **а)** поворот; **б)** паралельне перенесення; **в)** симетрію відносно точки; **г)** симетрію відносно прямої?

10*. **а)** Як виконати гомотетію, а потім поворот трикутника відносно певної точки? Який трикутник ви отримаєте? Чи можна отримати такий самий трикутник, здійснивши тільки одне перетворення? Яке це перетворення?
б)** А якщо центри гомотетії і повороту – різні точки?
в) А якщо спочатку здійснити перетворення поворот, а потім гомотетії?

11*. Доведіть: якщо при паралельному перенесенні відрізок AB переходить у відрізок A_1B_1, то і середина відрізка AB переходить у середину відрізка A_1B_1.

12*. Нехай рівняння $F(x; y) = 0$ задає деяку множину точок на площині. Як записати рівняння геометричного місця точок, симетричного заданому відносно:
а) осі ординат;
б) осі абсцис;
в) бісектриси першого і третього координатних кутів;
г) бісектриси другого і четвертого координатних кутів?

13*. Нехай рівняння $F(x; y) = 0$ задає деяку множину точок на площині. Як записати рівняння геометричного місця точок, симетричного заданому відносно початку координат?

14*. Точка (3; –2) при паралельному перенесенні перейшла в точку (3; 4). У яку точку перейде точка (3; 4) при цьому паралельному перенесенні. А точка (0; 0)?

15. Запишіть формули паралельного перенесення, за допомогою якого можна з точки $B(-3; -7)$ отримати точку $A(-3; -5)$.

16. Дана точка $A(-3; -1)$. Знайдіть:
а) координати точки A_1, симетричної точці A відносно осі абсцис;
б) координати точки A_2, симетричної точці A відносно осі ординат;
в) координати точки A_3, симетричної точці A відносно початку координат;
г*) координати точки A_4, симетричної точці A відносно точки $B(1; -5)$;
д*) координати точки A_5, що отримана з точки A поворотом на 270° відносно початку координат за годинниковою стрілкою.

17. Знайдіть координати точки, симетричної точці $A(-2; -2)$ відносно:
а) бісектриси першого і третього координатних кутів;
б*) бісектриси другого і четвертого координатних кутів;
в)** прямої $x + y - 3 = 0$.

18. Запишіть рівняння прямої, симетричної прямій $y = 2x - 2$ відносно:
а*) початку координат; **в*)** осі ординат;
б*) осі абсцис; **г**)** прямої $x + y - 3 = 0$.

19*. Скільки існує перетворень руху, що перетворюють сам у себе:
а) квадрат; **б)** правильний шестикутник?

20*. На координатній площині задано точки $A(1; 2)$ і $B(5; 5)$. Рухом ці точки переходять у точки $A_1(2; 3)$ і $B_1(7; 3)$ відповідно. У яку точку при такому перетворенні переходить точка $M(-2; -3)$?

21.** На площині задано дві прямі, що перетинаються під кутом 45°. Після двох послідовних перетворень симетрії відносно даних прямих точка A переходить у A_1, а точка B – у B_1. Знайдіть кут між прямими AB і A_1B_1.

22.** При паралельному перенесенні точка A перейшла в A_1, а пряма l – в l_1. Запишіть рівняння прямої l_1, якщо:
а) $A(-2; 5)$, $A_1(3; -4)$, а рівняння прямої l має вигляд $2x - 3y = 1$;
б) $A(4; 7)$, $A_1(-3; 13)$, а рівняння прямої l має вигляд $3x + 4y = 5$.

23.** Яке найменше число вершин може мати багатокутник, в якого є дві осі симетрії, що перетинаються під кутом: **а)** 30°; **б)** 10°; **в)** 87°?

24.** Дано пряму l і точку A. Знайдіть геометричне місце точок M площини таких, що існує поворот на кут $60°$ з центром на прямій l, що переводить точку A у M.

25*. Гомотетія з центром O переводить точку A у A_1. Побудуйте точку B_1, в яку переходить довільна точка B площини при тому самому перетворенні.

26*. На площині дано два паралельних відрізки. Скільки існує перетворень гомотетії, що переводять один відрізок у інший? Побудуйте центри цих гомотетій.

27*. На площині дано два паралельних відрізки AB і KM. Знайдіть ГМТ центрів гомотетій, що переводять AB у відрізок A_1B_1, який належить KM.

28.** На площині дано коло і точку A. Яку криву опише середина відрізка AB, якщо точка B буде рухатися вздовж заданого кола?

29*. Доведіть, що чотирикутник, який має центр симетрії, – паралелограм.

30*. Протилежні сторони опуклого шестикутника попарно рівні і паралельні. Доведіть, що цей шестикутник має центр симетрії.

31.** Доведіть, що жодна фігура не може мати рівно двох центрів симетрії.

32.** Доведіть, якщо фігура має дві перпендикулярні осі симетрії, то вона має центр симетрії.

33.** Чотирикутник має вісь симетрії. Доведіть, що цей чотирикутник або є рівнобічною трапецією, або симетричний відносно діагоналі.

34.** Доведіть, що опуклий n-кутник є правильним тоді і тільки тоді, коли він переходить сам у себе поворотом на кут $\frac{360°}{n}$ відносно деякої точки.

35.** Побудуйте правильний трикутник так, щоб його вершини належали трьом заданим паралельним прямим.

36.** Дано кут і точку всередині цього кута. Побудуйте коло, що дотикається до сторін заданого кута і проходить через задану точку.

37.** Впишіть у даний трикутник два рівних кола, кожне з яких дотикається до двох сторін трикутника й іншого кола.

38.** Впишіть у даний трикутник ABC трикутник $A_1B_1C_1$, сторони якого паралельні сторонам заданого трикутника KLM.

Готуємося до тематичного оцінювання № 5

Варіант I

1. Знайдіть координати точки, що симетрична точці $A(-2; 1)$ відносно осі абсцис.
2. Коло задано рівнянням $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$. Знайдіть координати центра симетрії цього кола.
3. Побудуйте трапецію, гомотетичну трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) з центром гомотетії A і коефіцієнтом гомотетії 2. Знайдіть відношення площ цих трапецій.
4. У яку пряму переходить пряма $y = 2x$ перетворенням симетрії відносно прямої $x = 0$?

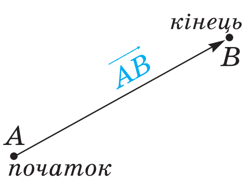
Варіант II

1. Знайдіть координати точки, що симетрична точці $B(1; -3)$ відносно осі ординат.
2. Дано точки $A(2; -3)$ і $B(0; -1)$. Знайдіть координати центра симетрії відрізка AB.
3. Побудуйте трапецію, гомотетичну трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) з центром гомотетії A і коефіцієнтом гомотетії 0,5. Знайдіть відношення площ цих трапецій.
4. У яку пряму переходить пряма $y = x$ перетворенням симетрії відносно прямої $y = 0$?

Розділ IV
ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

У цьому розділі ви ознайомитеся (або продовжите ознайомлення) з величинами, які, крім числового значення, характеризуються ще й напрямом – векторами. Вектори широко використовуються у фізиці й математиці, особливо геометрії. При цьому відкриття Декарта, розглянуте нами в першому розділі, дасть змогу значно спростити опис властивостей векторів та їхнє використання при розв'язуванні геометричних задач.

§ 21. Поняття вектора[1]

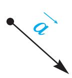


Багато фізичних величин, таких як сила, переміщення матеріальної точки, швидкість, прискорення тощо, характеризуються не лише числовим значенням, а й напрямом у просторі. Такі величини називаються *векторними величинами*, або *векторами*.

Вектором називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, в якому виділено початок і кінець (див. мал. на полі).

ВЕКТОР – *напрямлений відрізок*

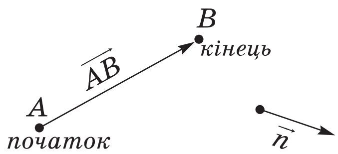
З а у в а ж е н н я. Величини, які характеризуються лише своїм числовим значенням – довжина, площа, маса, температура та інші, називаються *скалярними величинами*, або *скалярами*.



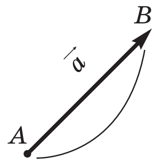
[1] П р и м і т к а д л я в ч и т е л я. Якщо у 8-му класі ви працювали за підручником Галини Апостолової, то матеріал, представлений у § 21–23 даного підручника, вже відомий вашим учням і вимагає лише повторення.

На малюнку 4.1 зображено вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\vec{n}$.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ відрізняється від відрізка AB тим, що точки A і B, які обмежують вектор $\overrightarrow{AB}$, відіграють різну роль: точка A є *початком вектора*, а точка B – його *кінцем*.



Мал. 4.1



$|\vec{a}| = AB$

Модуль вектора

Дві точки площини A і B задають два різні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$. Довжини цих векторів рівні, а напрями – протилежні. Такі вектори називаються *протилежними*.

Модулем вектора називається його довжина. Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ є довжина відрізка AB (мал. 4.2), позначається як $|\overrightarrow{AB}|$. Модуль вектора $\vec{n}$ позначається як $|\vec{n}|$.

Нульовим вектором називається вектор, довжина якого дорівнює нулю (його початок і кінець збігаються). Його позначають як $\vec{0}$. Він не має напряму.

Нульовий вектор $\vec{0}$

не має напряму:

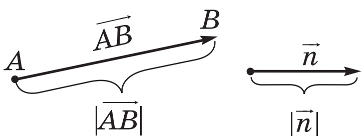
A

$A \equiv B$ • $|\vec{a}| = 0$

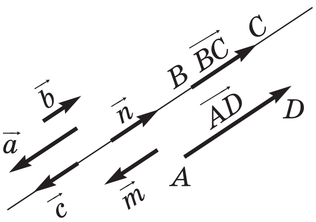
B

Колінеарними називаються два вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

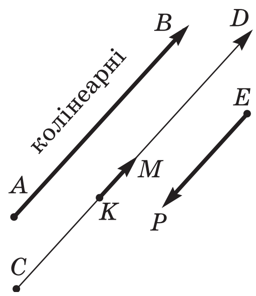
Наприклад, усі вектори, зображені на малюнку 4.3, – колінеарні. Колінеарність векторів будемо позначати так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$; $\vec{c} \parallel \vec{m}$ ...



Мал. 4.2



Мал. 4.3



$AB \parallel CD \parallel PE$

Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

Для допитливих

1. Побудуйте перпендикуляр до заданої прямої, користуючись лише лінійкою, на якій нанесено тільки дві позначки (риски). Зауважимо, що використовувати лінійку для зображення дуги (замість циркуля) не можна. Не можна також використовувати паралельність або перпендикулярність її боків.

2. За допомогою лише лінійки (без позначок) побудуйте до діаметра заданого півкола перпендикуляр, що виходить із заданої точки: **а)** поза цим півколом; **б)** на цьому півколі; **в)** всередині цього півкола.

Ненульові колінеарні вектори бувають або ***співнапрямлені***, тобто однаково напрямлені (мал. 4.4), або ***протилежно напрямлені*** (мал. 4.5).

У випадку, коли два колінеарні *вектори лежать на одній прямій*, вони *співнапрямлені, якщо їхні напрями збігаються, і протилежно напрямлені, якщо ні*.

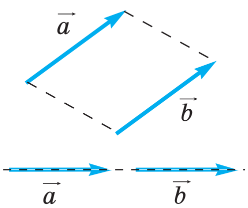
Колінеарні вектори, які *лежать на паралельних прямих*, називаються *співнапрямленими*, якщо вони лежать в одній півплощині, обмеженій прямою, що сполучає початок одного і другого векторів (мал. 4.4-б), і *протилежно напрямленими*, якщо в різних (мал. 4.5-б).

На малюнку 4.4 вектор $\vec{c}$ співнапрямлений з вектором $\vec{e}$, а вектор $\vec{a}$ – з вектором $\vec{b}$.

На малюнку 4.5 вектор $\vec{p}$ протилежно напрямлений з вектором $\vec{l}$, а вектор $\vec{n}$ – з вектором $\vec{m}$.

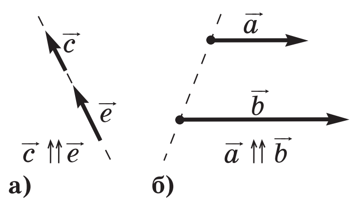
Співнапрямленість та протилежну напрямленість векторів будемо позначати так, як показано на малюнках 4.4, 4.5 відповідно.

$\vec{a} = \vec{b}$

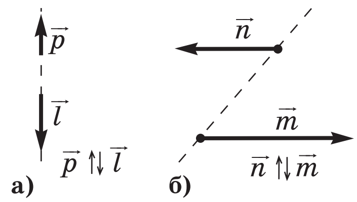


$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ і $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

$\vec{a} \xrightarrow[\text{перенесенням}]{\text{паралельним}} \vec{b}$



Мал. 4.4



Мал. 4.5

ВЛАСТИВОСТІ:

1. $\vec{a} = \vec{a}$

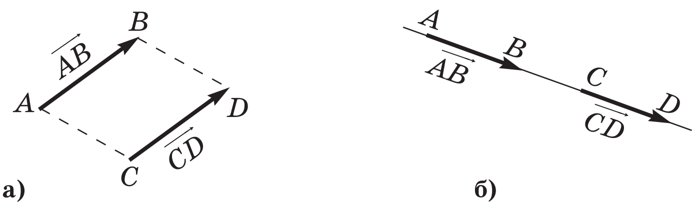
2. $\vec{a} = \vec{b}$ і $\vec{b} = \vec{c}$

$\Downarrow$

$\vec{a} = \vec{c}$

Два ненульові вектори називаються рівними, якщо рівні їхні модулі і вони співнапрямлені.

На малюнку 4.6 маємо два рівні вектори $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Мал. 4.6

На малюнку 4.6-а чотирикутник $ABDC$ – паралелограм ($AB = CD$, $AB \parallel CD$). Тоді вектор $\overrightarrow{CD}$ можна отримати з вектора $\overrightarrow{AB}$ (або $\overrightarrow{AB}$ з $\overrightarrow{CD}$) паралельним перенесенням. Зауважимо, що у випадку розміщення $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ на одній прямій (мал. 4.6-б), вони теж перетворюються один в одний паралельним перенесенням. Тоді означення рівності двох векторів можна сформулювати й так.

Два вектори називаються рівними, якщо їх можна сумістити паралельним перенесенням.

Зрозуміло, що з означення рівності векторів маємо такі ВЛАСТИВОСТІ *рівності векторів*:

1. Будь-який вектор дорівнює сам собі: $\vec{a} = \vec{a}$.

2. Якщо $\vec{a} = \vec{b}$ і $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$.

Практична робота 28

1. Позначте на аркуші паперу три точки A, B і C, що не лежать на одній прямій. Накресліть усі вектори, які мають за початок або кінець дані точки. Запишіть усі отримані вектори та вкажіть початок і кінець кожного вектора.
2. Позначте на аркуші паперу три точки A, B і C, що лежать на одній прямій. Накресліть усі вектори, які визначені відрізками з кінцями в точках A, B і C. Запишіть усі отримані вектори та вкажіть початок і кінець кожного з них.
3. Накресліть два неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Зобразіть кілька векторів: **а)** співнапрямлених з вектором $\vec{a}$; **б)** співнапрямлених з вектором $\vec{b}$; **в)** протилежно напрямлених з вектором $\vec{a}$; **г)** протилежно напрямлених з вектором $\vec{b}$.
4. Накресліть два вектори, які: **а)** мають рівні модулі і неколінеарні; **б)** мають рівні модулі і співнапрямлені; **в)** мають рівні модулі і протилежно напрямлені.
5. Запишіть, які із зображених вами векторів: **а)** рівні; **б)** протилежні.

Практична робота 29

1. Накресліть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CP}$ і $\overrightarrow{EK}$ так, щоб: **а)** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CP}$ і $\overrightarrow{EK}$ були колінеарні та $|\overrightarrow{AB}| = 2$ см, $|\overrightarrow{CP}| = 1$ см, $|\overrightarrow{KE}| = 3{,}5$ см; **б)** $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CP}$ були колінеарні, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{KE}$ не були колінеарні і $|\overrightarrow{AB}| = 1$ см, $|\overrightarrow{CP}| = 2{,}5$ см, $|\overrightarrow{KE}| = 3$ см.
2. За допомогою відповідного масштабу накресліть вектор, який зображає: **а)** переміщення туриста з пункту A на 5 км на південь; **б)** переміщення туриста з пункту A на 10 км на схід; **в)** переміщення туриста з пункту A на $5\sqrt{2}$ км в південно-західному напрямі.
3. За допомогою відповідного масштабу накресліть вектор, який зображає політ літака спочатку на 200 км на схід (з пункту A у пункт B), а потім на 300 км на південь (з пункту B у пункт C). Накресліть вектор, який зображає переміщення літака з початкової точки A у кінцеву точку C.

Практична робота 30

1. Накресліть паралелограм $ABCD$ і трапецію $QWRF$. Запишіть усі пари колінеарних векторів, які визначені сторонами: **а)** паралелограма $ABCD$; **б)** трапеції $QWRF$.
2. Накресліть паралелограм $KMPE$ і позначте точку O перетину його діагоналей. Нехай $\overrightarrow{MK} = \vec{a}$, $\overrightarrow{KP} = \vec{n}$, $\overrightarrow{MO} = \vec{d}$, $\overrightarrow{KO} = \vec{c}$. Випишіть усі вектори з початком або кінцем у точках K, M, P, E і O, які дорівнюють вектору: **а)** $\vec{a}$; **б)** $\vec{n}$; **в)** $\vec{d}$; **г)** $\vec{c}$.
3. Накресліть ненульовий вектор $\vec{a}$ і позначте три точки A, B і C. Відкладіть вектор $\vec{a}$ від точок A, B і C.
4. Накресліть прямокутник $ABCD$ зі сторонами $AB = 3$ см, $BC = 4$ см. Позначте середину сторони AB через M. Знайдіть довжини векторів: **а)** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MA}$; **б)** $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MB}$.

Для допитливих

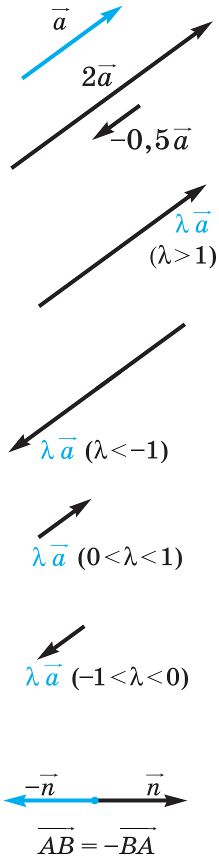
1. На карті вказано положення трьох маяків: A, B і C. З корабля маяки A і B видно під кутом α, а маяки B і C – під кутом β. Знайдіть на карті місце корабля.

2. Два маяки A і B, позначені на карті, видно з корабля під кутом α. Після того як корабель пройшов деяку відстань прямолінійним курсом, ті самі маяки стало видно з корабля під кутом β. Знайдіть на карті місце корабля, якщо за допомогою інструментів, які є на цьому кораблі, довжину пройденого шляху і його напрям встановлено.

§ 22. Дії над векторами

МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

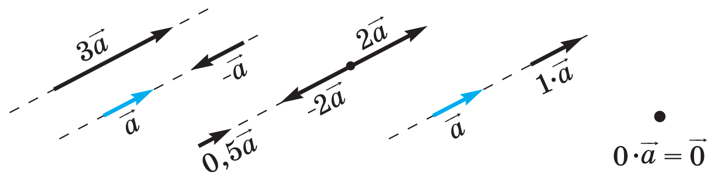
Для будь-якого ненульового вектора $\vec{a}$ і довільного числа k добутком $\vec{a}\cdot k \equiv k\cdot\vec{a}$ називається вектор $\vec{b}$, співнапрямлений з $\vec{a}$, якщо $k>0$, і протилежно напрямлений з $\vec{a}$, якщо $k<0$, модуль якого $|\vec{b}| = |\,k\,|\cdot|\vec{a}|$. При $k=0$ маємо $\vec{0}$.



ВЛАСТИВІСТЬ

$\lambda\cdot(\beta\vec{a}) = (\lambda\cdot\beta)\vec{a}$

На малюнку 4.7 зображено кілька добутків вектора на число.



Мал. 4.7

Якщо $k=0$, то за добуток $k\cdot\vec{a}$ матимемо нульовий вектор, тобто точку.

Якщо $k=1$, то отримаємо вектор $\vec{a}$, тобто вектор, рівний даному.

Якщо $k=-1$, то отримаємо вектор $-\vec{a}$, який дорівнює вектору $\vec{a}$ за модулем і протилежно напрямлений, тобто протилежний.

Доведемо, що **будь-який вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, можна представити як $\vec{b} = k\cdot\vec{a}$.**

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ співнапрямлені, то вони відрізняються лише довжиною: $|\vec{b}| : |\vec{a}| = k$ і $\vec{b} = k\cdot\vec{a}$.

Якщо вектори протилежно напрямлені, то аналогічно попередньому розглянемо вектори $-\vec{a}$ і $\vec{b}$. Тоді матимемо, що $\vec{b} = k\cdot\vec{a}$, але $k<0$.

Правильним буде і обернене твердження: **якщо $\vec{b} = k\cdot\vec{a}$, то вектори $\vec{b}$ і $\vec{a}$ – колінеарні**. Правильність цього твердження випливає з означення множення вектора на число.

З означення множення вектора на число маємо таку його ВЛАСТИВІСТЬ:

$$\lambda\cdot(\beta\,\vec{a}) = (\lambda\cdot\beta)\,\vec{a}.$$

Для допитливих

1. Човен перепливає через річку перпендикулярно до її берегів за 30 хв. Ширина річки 3 км, а швидкість течії дорівнює 2,1 км/год. Знайдіть власну швидкість човна і кут між напрямом течії і напрямом власної швидкості човна. (Порада. Знайдіть тригонометричну функцію шуканого кута і скористайтесь одиничним колом і транспортиром.)

2. З якої точки земної кулі має вилетіти літак, щоб після того, як він пролетів 100 км уздовж меридіана на південь, потім 100 км уздовж паралелі на схід, потім 100 км уздовж меридіана на північ, знову потрапити в початкову точку?

ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ВЕКТОРІВ

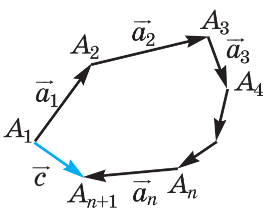
Поняття рівності векторів дає змогу відкласти вектор, рівний даному, від довільної точки площини.

Нехай маємо ненульові вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, ..., \vec{a}_n$. ***Відкладемо від довільної точки площини вектор*** $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}_1$, ***потім від точки*** A_2 ***– вектор*** $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{a}_2$ ***і т. д.*** (мал. 4.8). ***Нарешті відкладемо від точки*** A_n ***вектор*** $\overrightarrow{A_nA_{n+1}} = \vec{a}_n$. ***Сполучимо точки*** A_1 ***і*** A_{n+1}. ***Вектор*** $\overrightarrow{A_1A_{n+1}}$ ***будемо називати сумою заданих векторів***:

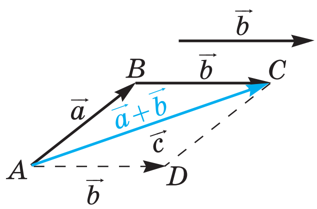
$$\overrightarrow{A_1A_{n+1}} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n.$$

Такий спосіб знаходження суми векторів називається *правилом багатокутника*.

Суму двох неколінеарних векторів знаходять або *за правилом трикутника*, або *за правилом паралелограма* (мал. 4.9).



Мал. 4.8



Мал. 4.9

Правило трикутника випливає безпосередньо з правила багатокутника, якщо доданків лише два.

Наприклад, якщо шукати суму двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то за правилом багатокутника треба від довільної точки A відкласти вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, потім від точки B відкласти $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Тоді $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$. Маємо трикутник ABC і $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. (Зверніть увагу, що літера, яка позначає кінець одного вектора-доданка і початок другого, повторюється і «зникає».)

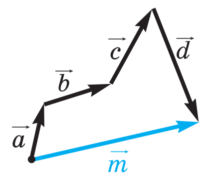
Тобто знайти вектор $\vec{c}$ – суму двох неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – можна за таким правилом.

Правило трикутника. *Розмістити вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ так, щоб початок вектора $\vec{b}$ збігався з кінцем вектора $\vec{a}$:*
- *початком вектора $(\vec{a} + \vec{b})$ буде початок вектора $\vec{a}$;*
- *кінцем вектора $(\vec{a} + \vec{b})$ буде кінець вектора $\vec{b}$.*

Щоб знайти суму двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ за правилом паралелограма, проведемо через точки C і A попереднього випадку прямі, паралельні AB і BC (мал. 4.9), – отримаємо паралелограм $ABCD$. Тоді маємо, що $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, а вектор AC збігається з діагоналлю паралелограма $ABCD$. Тобто знайти вектор $\vec{c}$ – суму двох неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – можна за таким правилом.

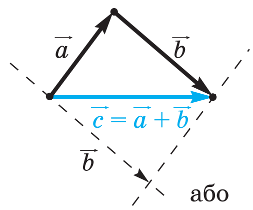
$\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

За правилом багатокутника:

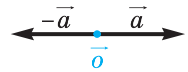


$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

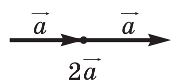
За правилами:
трикутника



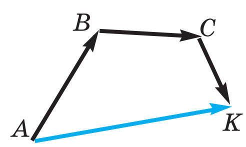
паралелограма



$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$



$\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AK}$

Правило паралелограма. *Розмістити вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ так, щоб початки векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ збігалися; через кінці векторів провести прямі, паралельні прямим, які містять дані вектори:*

- *початком вектора $(\vec{a}+\vec{b})$ буде початок векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;*
- *кінцем вектора $(\vec{a}+\vec{b})$ буде протилежний цій точці кінець діагоналі утвореного паралелограма.*

ВЛАСТИВОСТІ:

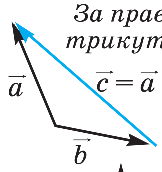
1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$;
3. $\vec{a}+(-\vec{a})=0$;
4. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Зрозуміло, що з означення суми векторів випливають такі її ВЛАСТИВОСТІ:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$;
3. $\vec{a}+(-\vec{a})=0$;
4. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

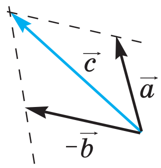
З останнього співвідношення маємо: ***щоб знайти різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, треба до вектора $\vec{a}$ додати вектор $(-\vec{b})$* – правило паралелограма.**

За правилом трикутника:



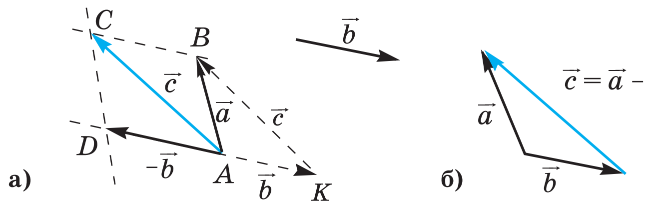
$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$

За правилом паралелограма:



$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$

На малюнку 4.10-а: $\overrightarrow{AK}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=-\vec{b}$, вектор $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$ – за правилом паралелограма ($ADCB$ – паралелограм). Сполучимо точки B і K – отримаємо паралелограм $ACBK$ (бо $CB \parallel AK$ і $CB = AK$). Тоді $\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{AC}$ і різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (вектор $\vec{c}$) можна знайти за таким правилом.



Мал. 4.10

Правило трикутника. *Розмістити вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ так, щоб початки векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ збігалися (мал. 4.10-б):*

- *початком вектора $(\vec{a}-\vec{b})$ буде кінець вектора $\vec{b}$;*
- *кінцем вектора $(\vec{a}-\vec{b})$ буде кінець вектора $\vec{a}$.*

Практична робота 31

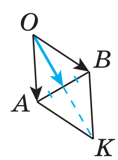
1. Накресліть ненульовий вектор $\overrightarrow{AB}$ і побудуйте вектори $0\cdot\overrightarrow{AB}$, $1\cdot\overrightarrow{AB}$, $-1\cdot\overrightarrow{AB}$, $(1:|AB|)\cdot\overrightarrow{AB}$. Виміряйте довжину вектора $(1:|AB|)\cdot\overrightarrow{AB}$ і переконайтеся, що вона дорівнює одиниці.
2. Накресліть два співнапрямлені вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, за допомогою масштабної лінійки знайдіть $|a|$ і $|b|$. Побудуйте вектор $(|b|:|a|)\cdot\vec{a}$ і переконайтеся в тому, що він дорівнює вектору $\vec{b}$.

Для допитливих

Опорна задача. Доведіть, якщо точка N – середина відрізка AB, то для довільної точки O площини виконується

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{ON}.$$

Порада. Продовжте відрізок ON на рівний йому відрізок і пригадайте правило паралелограма (додавання векторів).



3. Накресліть два протилежно напрямлені вектори $\vec{c}$ і $\vec{p}$ так, щоб $|c| = 2$ см, $|p| = 4$ см. Побудуйте вектор $(-|p| : |c|) \cdot \vec{c}$ і переконайтеся, що він дорівнює вектору $\vec{p}$.
4. Накресліть три ненульові вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте вектори: **а)** $-\vec{a}$, $-\vec{b}$, $-\vec{c}$; **б)** $2\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $0{,}5\vec{c}$; **в)** виміряйте довжини цих векторів і переконайтеся в тому, що: $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$, $|0{,}5 \cdot \vec{c}| = 0{,}5|-\vec{c}|$, $|2 \cdot \vec{a}| = 2|\vec{a}|$.
5. Накресліть ненульовий вектор $\vec{a}$. Побудуйте вектор $\vec{p} = 3\vec{a}$. Побудуйте вектори: $-\vec{a}$, $1{,}5\vec{a}$, $2\vec{a}$, $6\vec{a}$. Вкажіть, як напрямлений кожний з отриманих векторів відносно вектора $\vec{p}$, і виразіть їхні довжини через $|p|$.

Практична робота 32

1. Накресліть попарно колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$. Побудуйте суми $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c} + \vec{d}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}$.
2. Накресліть неколінеарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ і $\vec{e}$. За правилом багатокутника побудуйте вектор $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$.
3. Накресліть два неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, початки яких не збігаються: **а)** позначте довільну точку A і за правилом трикутника побудуйте суму $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$; **б)** позначте іншу точку M і за правилом паралелограма побудуйте суму $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{MP}$; **в)** за допомогою креслярських інструментів переконайтеся, що $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MP}$.
4. Накресліть неколінеарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте вектори: **а)** $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$; **б)** переконайтеся, що вектор $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ дорівнює вектору $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Практична робота 33

1. Накресліть два ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Доведіть (побудовою), що $\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$.
2. Накресліть два ненульові вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте вектори: **а)** $\vec{m} - \vec{n}$; **б)** $\vec{n} - \vec{m}$. Які вектори ви отримали?
3. Накресліть два ненульові вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$. Побудуйте вектори: **а)** $\vec{x} + 2\vec{y}$; **б)** $0{,}5\vec{y} + \vec{x}$; **в)** $\vec{y} - 3\vec{x}$; **г)** $-2\vec{y} + \vec{x}$; **д)** $-\vec{y} - \vec{x}$; **е)** $0 \cdot \vec{y} - 2\vec{x}$; **є)** $1{,}5\vec{y} - 0 \cdot \vec{x}$.

4*. Накресліть довільний паралелограм $ABCD$. Позначте довільну точку X на цьому самому аркуші паперу. Побудуйте вектори $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}$ і $\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$. Переконайтеся, що отримані вектори рівні. Чи зміниться результат, якщо змінити положення точки X? Відповідь обґрунтуйте.

Для допитливих

Теорема. **Три точки A, B і C лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли існують числа k, n і m такі, що $k + n + m = 0$ ($k \neq 0$, $n \neq 0$, $m \neq 0$), і для довільної точки O площини виконується співвідношення $k \cdot \overrightarrow{OA} + n \cdot \overrightarrow{OB} + m \cdot \overrightarrow{OC} = 0$.**

Доведення

Необхідність. A, B, C лежать на одній прямій, тоді $\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{BA}$. Звідси: $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \lambda(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA})$ і $\lambda\overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB} + (-1)\overrightarrow{OC} = 0$. Щ. в. д.

Достатність. Нехай виконується рівність $k \cdot \overrightarrow{OA} + n \cdot \overrightarrow{OB} + m \cdot \overrightarrow{OC} = 0$, де $k + n + m = 0$ ($k \neq 0$, $n \neq 0$, $m \neq 0$), тобто $n + m = -k$.

Помножимо векторну рівність на $\frac{1}{m}$ і додамо до обох її частин вектор $\overrightarrow{BO}$, маємо: $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \frac{k}{m}\overrightarrow{AO} + \frac{n}{m}\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BO}$. $\overrightarrow{BC} = \frac{k}{m}\overrightarrow{AO} + \frac{n+m}{m}\overrightarrow{BO} = \frac{k}{m}\overrightarrow{AO} - \frac{k}{m}\overrightarrow{BO} = \frac{k}{m}\overrightarrow{AB}$. Тобто $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AB}$ колінеарні, і точки A, B, C лежать на одній прямій.

Щ. в. д.

§ 23. Розкладання вектора за двома неколінеарними векторами

Будь-який вектор можна розкласти за двома неколінеарними векторами.

$\vec{a} \nparallel \vec{b}$

$\Downarrow$

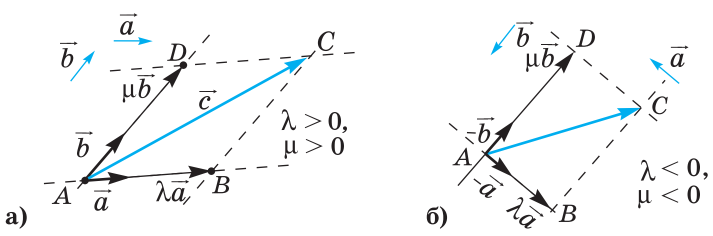
$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$,

де $\{\lambda; \mu\}$ – єдина пара чисел

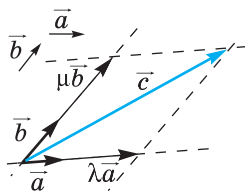
Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – два неколінеарні вектори, то будь-який третій вектор $\vec{c}$ можна представити у вигляді $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, де λ і μ – пара чисел. Тобто **на площині будь-який вектор можна розкласти за двома неколінеарними векторами.**

Для доведення цього твердження через початок A і кінець C вектора $\vec{c}$ проведемо прямі паралельно векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 4.11). Ми отримали паралелограм $ABCD$. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\vec{a}$ колінеарні. Тоді $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{a}$. Аналогічно $\overrightarrow{AD} = \mu\vec{b}$.

Маємо: $\vec{c} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, що і вимагалося довести.



Мал. 4.11



$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

Ми довели, що існує шукана пара чисел λ і μ. Доведемо від супротивного, що вона єдино можлива.

Нехай існує інша пара чисел λ_1 і μ_1 таких, що $\vec{c} = \lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b}$. Тоді маємо:

$$\lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \ (\lambda_1 - \lambda)\,\vec{a} = (\mu - \mu_1)\,\vec{b}.$$

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ за умовою неколінеарні, тоді остання рівність можлива лише за умови, що вектори $(\lambda_1 - \lambda)\vec{a}$ і $(\mu - \mu_1)\vec{b}$ нульові, тобто при $\lambda_1 = \lambda$ і $\mu_1 = \mu$, що суперечить припущенню. Тоді пара чисел λ і μ – єдина.

Практична робота 34

1. Накресліть три неколінеарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. За допомогою креслярських інструментів розкладіть вектор $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Виміряйте довжини отриманих векторів, визначте відповідні коефіцієнти і запишіть вектор $\vec{c}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
2. Накресліть два ненульові вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$, які лежать на двох взаємно перпендикулярних прямих. Накресліть третій вектор $\vec{l}$. Розкладіть (побудовою) вектор $\vec{l}$ за векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$. Визначте відповідні коефіцієнти і запишіть вектор $\vec{l}$ через вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$.

3*. Побудуйте довільний трикутник ABC і проведіть його медіану AM. Розкладіть (побудовою) вектор $\overrightarrow{AM}$ за векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Запишіть відповідний вираз.

Для допитливих

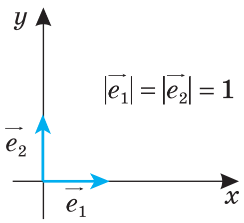
Точки M_1 і M_2 – середини відрізків A_1B_1 і A_2B_2 відповідно. Доведіть, що

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2}).$$

§ 24. Координати вектора

На кожній з координатних осей від точки O (початку координат) відкладемо одиничний вектор (тобто вектор, довжина якого дорівнює одиниці) так, щоб ці вектори містилися на додатних півосях. Нехай $\vec{e}_1$ – одиничний вектор на осі абсцис, а $\vec{e}_2$ – одиничний вектор на осі ординат (мал. 4.12-а).

Вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ називають *координатними векторами*, або *ортами*.



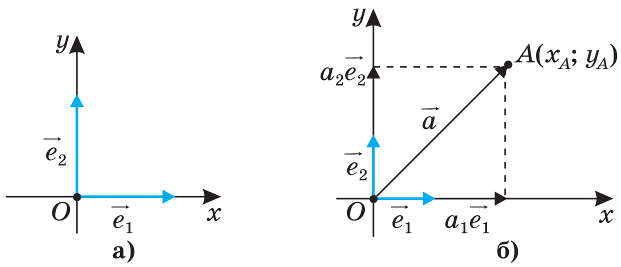
$\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ – орти, або *координатні вектори*

Як ми вже знаємо, будь-який вектор (на площині) можна розкласти за двома неколінеарними векторами. Причому коефіцієнти цього розкладу визначаються однозначно (тобто єдино можливим чином).

Координатні вектори неколінеарні, тоді **довільний вектор $\vec{a}$ на координатній площині можна представити у вигляді**

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2.$$

При цьому коефіцієнти a_1 і a_2 визначаються однозначно. Вони називаються *координатами вектора в даній системі координат*.



Мал. 4.12

Якщо початок вектора $\vec{a}$ суміщається з початком координат (мал. 4.12-б), то координати цього вектора a_1 і a_2 збігаються з координатами його кінця.

У випадку, коли початок вектора $\vec{a}$ не суміщається з початком координат, перенесемо осі координат паралельно самим собі і помістимо початок координат у початок вектора – точку $P(x_P; y_P)$ (мал. 4.13-а).

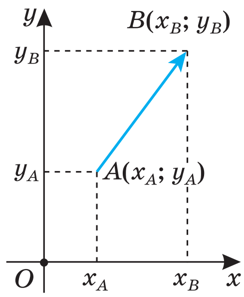
$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ – **однозначно**

a_1 і a_2 – координати вектора $\vec{a}$

Нехай у новій системі координат кінець K вектора $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, тобто числа a_1 і a_2 є координатами вектора $\vec{a}$ в цій системі координат. Тоді у старій системі координат (після оберненого паралельного перенесення осей) маємо:

$$x_K = a_1 + x_P,\ y_K = a_2 + y_P \ \text{ і } \ a_1 = x_K - x_P,\ a_2 = y_K - y_P.$$

З а у в а ж е н н я. Такий самий результат можна отримати, якщо здійснити паралельне перенесення не осей координат, а самого вектора (мал. 4.13-б) і скористати-



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(x_B - x_A;\ y_B - y_A)}$

ся тим, що при паралельному перенесенні отримуємо вектор, рівний даному.

Таким чином, *якщо початком вектора $\vec{a}$ є точка $P(x_P;\ y_P)$, а кінцем – точка $K(x_K;\ y_K)$, то координатами вектора $\vec{a}$ будуть числа:*

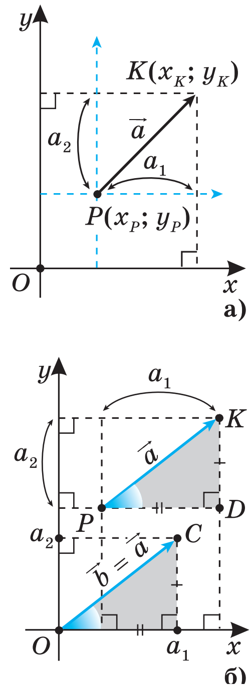
$$a_1 = x_K - x_P,\ a_2 = y_K - y_P.$$

А записують це так:

$$\vec{a}\ (a_1;\ a_2), \text{ або } \overrightarrow{PK}\ (a_1;\ a_2),$$
$$\text{або } \overrightarrow{(a_1;\ a_2)}.$$

Для вектора $\vec{a}$ $(a_1;\ a_2)$ з прямокутного трикутника PDK (див. мал. 4.13-б) за теоремою Піфагора отримаємо значення модуля цього вектора:

$$|\ \vec{a}\ | = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$



Мал. 4.13

З наведеного випливають такі ВЛАСТИВОСТІ *векторів*:

ВЛАСТИВОСТІ векторів:

$\vec{a}(a_1;\ a_2) = \vec{b}(b_1;\ b_2)$

$\Downarrow \qquad \Uparrow$

$a_1 = b_1$ і $a_2 = b_2$

$\vec{0} = \overrightarrow{(0;\ 0)}$

$|\vec{a}(a_1;\ a_2)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

1. Рівні вектори мають рівні координати.

2. Якщо координати двох векторів однакові, то ці вектори рівні.

3. Нульові вектори мають нульові координати.

4. Модуль вектора $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ дорівнює $|\ \vec{a}\ | = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Точки A і B мають координати $A(-1;\ 6)$ і $B(5;\ -2)$. Знайдіть координати і модуль вектора $\overrightarrow{AB}$.

Розв'язання

Нехай $\overrightarrow{AB}\ (a_1;\ a_2)$.

1) $a_1 = x_B - x_A = 5 - (-1) = 6;\ a_2 = y_B - y_A = -2 - 6 = -8.$

2) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{36 + 64} = 10.$

Відповідь: $\overrightarrow{AB}(6;\ -8)$, $|\overrightarrow{AB}| = 10$.

Для допитливих

Опорна задача. Знайдіть координати вектора з початком у точці $O(1;\ 2)$ і модулем 3.

Розв'язання

Кінець $K(x;\ y)$ шуканого вектора лежить на колі з центром у точці $O(1;\ 2)$, радіус якого дорівнює 3. Тоді координати точки K задовольняють рівняння $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$. Звідси $(y - 2)^2 = 3^2 - (x - 1)^2$ і $|y - 2| = \sqrt{9 - (x - 1)^2}$. Тобто $y - 2 = \pm\sqrt{9 - (x - 1)^2}$ за умови, що $9 - (x - 1)^2 \geqslant 0$, $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{\left(x - 1;\ \pm\sqrt{9 - (x - 1)^2}\right)}$ для всіх $|x - 1| \leqslant 3$, тобто $x \in [-2;\ 4]$.

Приклад 2. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо задано координати трьох інших його вершин: $A(2; -3)$, $B(5; -2)$, $C(1; 4)$.

Розв'язання

Нехай точка D має координати $D(x_D; y_D)$ (мал. 4.14).

1) $ABCD$ – паралелограм, тоді $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2) Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$:

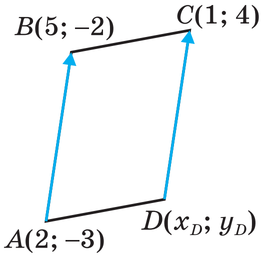
$\overrightarrow{AB}\,(5 - 2; -2 - (-3)) = \overrightarrow{(3;\ 1)}$;

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{(1 - x_D;\ 4 - y_D)}$.

3) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, тоді $1 - x_D = 3$; $4 - y_D = 1$.

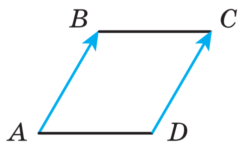
Звідси: $x_D = -2$ і $y_D = 3$.

Відповідь: $D(-2; 3)$.



Мал. 4.14

$ABCD$ – паралелограм



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$x_D = (x_C - x_B) + x_A$

$y_D = (y_C - y_B) + y_A$

Приклад 3. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо задано координати трьох інших його вершин: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$.

Розв'язання

Нехай точка D має координати $D(x_D; y_D)$.

1) $ABCD$ – паралелограм, тоді $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2) Запишемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)}$ і $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{(x_3 - x_D;\ y_3 - y_D)}$.

3) З рівності $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ маємо:

$x_2 - x_1 = x_3 - x_D$ і $y_2 - y_1 = y_3 - y_D$.

Тоді $x_D = x_1 - x_2 + x_3$ і $y_D = y_1 - y_2 + y_3$.

Відповідь: $(x_1 - x_2 + x_3; y_1 - y_2 + y_3)$.

Практична робота 35

1. Накресліть прямокутну систему координат і координатні вектори (орти) $\vec{e}_1\,(1; 0)$ і $\vec{e}_2(0; 1)$.
2. Побудуйте вектори з початком у точці O, кінці яких мають координати: $(12; 5)$, $(4; -3)$ і $(-3; -4)$. Позначте ці вектори, запишіть їх координати, розкладіть ці вектори за координатними векторами і знайдіть модулі векторів, що ви отримали.
3. Побудуйте вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, якщо $A(0; 4)$, $B(2; 4)$, $C(-1; 6)$, $D(1; 6)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ та їх модулі.
4. Побудуйте вектор $\overrightarrow{KT}$, якщо $K(-1; 4)$, $T(2; 1)$. Розкладіть вектор $\overrightarrow{KT}$ за координатними векторами. Запишіть координати вектора $\overrightarrow{KT}$.

Завдання 29

1°. Через орти $\vec{e}_1(1; 0)$ і $\vec{e}_2(0; 1)$ запишіть вектори: **а)** $\vec{a}(3; 7)$; **б)** $\vec{b}\,(4; -3)$; **в)** $\vec{c}(-8; 5)$; **г)** $\vec{d}(-3; 0)$.

2°. Розкладіть за координатними векторами $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ вектори: **а)** $\vec{a}(2; 3)$; **б)** $\vec{b}\,(2; -3)$; **в)** $\vec{c}(-1; -4)$.

3°. Вектор $\vec{a}$ записали через орти $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, якщо:

а) $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$; **б)** $\vec{a} = 7\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$; **в)** $\vec{a} = -4\vec{e}_1$; **г)** $\vec{a} = 0{,}5\vec{e}_2$.

4°. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$ та його модуль, якщо:

а) $A(3;\ 5)$, $B(1;\ 2)$; **в)** $A(-3;\ -5)$, $B(-1;\ -2)$; **д)** $A(-3;\ -5)$, $B(1;\ 2)$.

б) $A(-3;\ 5)$, $B(-1;\ 2)$; **г)** $A(3;\ 5)$, $B(-1;\ -2)$;

5. Знайдіть координати точки, яка є початком вектора $\overrightarrow{MN}$, якщо:

а) $\overrightarrow{MN}(-1;\ 2)$ і $N(-3;\ -2)$; **б)** $\overrightarrow{MN}(1;\ 2)$ і $N(2;\ 0)$; **в)** $\overrightarrow{MN}(3;\ -4)$ і $N(-2;\ 0)$.

6. Знайдіть координати кінця вектора $\overrightarrow{FG}$, якщо:

а) $\overrightarrow{FG}(2;\ -3)$ і $F(4;\ 1)$; **б)** $\overrightarrow{FG}(1;\ -2)$ і $F(-3;\ 0)$; **в)** $\overrightarrow{FG}(4;\ 1)$ і $F(-3;\ 0)$.

7. Заповніть таблицю:

A	$(0;\ 0)$	$(\quad;\ -3)$		$(a;\ b)$	$(2;\ 4)$
B	$(2;\ 2)$	$(2;\ -7)$	$(3;\ 1)$		
$\overrightarrow{AB}$		$(5;\quad)$	$(-3;\ -0{,}5)$	$(c;\ d)$	$(0;\ 0)$

8°. Дано вектори: $\vec{a}(3;\ -5)$, $\vec{b}(-3;\ -5)$, $\vec{c}(5;\ -3)$, $\vec{d}(3;\ 5)$, $\vec{f}(5;\ -3)$, $\vec{g}(-3;\ 3)$, $\vec{h}(-5;\ -3)$. Які з цих векторів: **а)** рівні; **б)** мають рівні модулі?

9°. Серед даних векторів знайдіть одиничні:

$$\vec{a}(0;\ -1),\ \vec{b}\left(\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right),\ \vec{c}\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right),\ \vec{d}\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

10. Дано точки $M(3;\ 5)$, $N(10;\ 12)$, $P(8;\ 4)$, $K(1;\ -3)$. Запишіть усі можливі вектори, які мають початком і кінцем дані точки. Чи є серед утворених векторів: **а)** рівні; **б)** рівні за модулем?

11°. Дано точки $M(7;\ -4)$, $N(2;\ 5)$, $P(-1;\ 2)$. Знайдіть координати точки K, якщо $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PK}$.

12. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ – рівні. Знайдіть: **а)** координати точки D, якщо $A(-4;\ 2)$, $B(-6;\ -1)$, $C(2;\ -3)$; **б)** координати точки C, якщо $A(2;\ -1)$, $B(2;\ -3)$, $D(-2;\ 2)$.

13. $ABCD$ – паралелограм. Знайдіть координати точки D, якщо $A(-4;\ 3)$, $B(5;\ 0)$, $C(5;\ -3)$.

14. Модуль вектора $\vec{n}(5;\ y)$ дорівнює 6. Знайдіть y.

15. Модуль вектора $\vec{m}(x;\ -4)$ дорівнює 8. Знайдіть x.

16. Модуль вектора $\vec{p}(x;\ y)$ дорівнює 5. Відомо, що x і y – цілі числа. Знайдіть їх.

17. Дано координати вершин трикутника $A(6;\ -2)$, $B(2;\ 3)$ і $C(-2;\ -3)$; AM_1, BM_2, CM_3 – медіани трикутника. Вкажіть координати векторів $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{BM_2}$, $\overrightarrow{CM_3}$.

18. У трикутнику ABC відомі координати його вершин $A(-1;\ 3)$, $B(2;\ 8)$, $C(7;\ -5)$, AM – медіана трикутника. Знайдіть модуль вектора $\overrightarrow{AM}$.

19*. Дві вершини прямокутника $ABCD$ – точки $A(-1;\ 6)$ і $B(4;\ 6)$. Модуль вектора $\overrightarrow{AC}$ дорівнює 13. Знайдіть координати вершин C і D.

Для допитливих

Опорна задача. Доведіть: **якщо M – центроїд трикутника ABC, а X – довільна точка його площини, то** $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$.

1) Нехай у $\triangle ABC$ $AK \equiv m_a$. Тоді $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{XK} - \overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XK} - \overrightarrow{XA})$, $\overrightarrow{XK} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}$.

2) $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XA} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$. Щ. в. д.

§ 25. Дії над векторами, що задані координатами

Знайдемо координати векторів, що є сумою, різницею двох векторів і добутком вектора на число.

МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Нехай дано вектор $\vec{a}(a_1;\ a_2)$. Тобто $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$. Тоді

$$\lambda\vec{a} = \lambda(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) = \lambda a_1\vec{e}_1 + \lambda a_2\vec{e}_2.$$

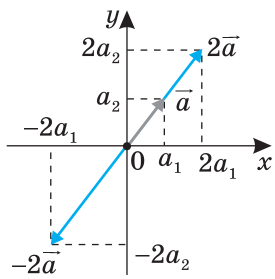
Тобто координати вектора $\lambda\vec{a}$ дорівнюють $\overrightarrow{(\lambda a_1;\ \lambda a_2)}$.

Щоб помножити вектор на число, треба помножити кожну його координату на це число.

$$\lambda\vec{a} = \overrightarrow{(\lambda a_1;\ \lambda a_2)}.$$

$\lambda\vec{a}(a_1;\ a_2) =$
$= \overrightarrow{(\lambda a_1;\ \lambda a_2)}$

На малюнку 4.15 зображено добуток вектора $\vec{a}$ на числа ± 2.



Мал. 4.15

Як відомо (с. 150), будь-який вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, можна представити як $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ і навпаки: якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні.

Зауваження. Вказане число λ може бути і додатним, і від'ємним, і нулем (бо нульовий вектор колінеарний будь-якому вектору).

$\vec{a} \parallel \vec{b},$
$\Downarrow \ \Uparrow$
$\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2} = \lambda$
$\vec{b} = \lambda\vec{a}$

Рівність $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ означає, що $b_1 = \lambda a_1,\ b_2 = \lambda a_2$.

Тоді якщо $a_1 \neq 0$ і $a_2 \neq 0$,: $\dfrac{b_1}{a_1} = \lambda = \dfrac{b_2}{a_2}$.

Маємо:

- **координати двох колінеарних векторів пропорційні;**
- **якщо координати двох векторів пропорційні, то ці вектори колінеарні.**

$\overrightarrow{AK} = (-1)\cdot\overrightarrow{KA}$
протилежні
$-\vec{a}(a_1;\ a_2) =$
$= \overrightarrow{(-a_1;\ -a_2)}$

СУМА ВЕКТОРІВ

Нехай дано вектори $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ і $\vec{b}(b_1;\ b_2)$. Тобто

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 \quad \text{і} \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2.$$

Нехай сумою цих векторів є вектор $\vec{c}(c_1;\ c_2) = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2$:

$$c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2.$$

Оскільки такий розклад можна здійснити єдино можливим чином, то

$$c_1 = a_1 + b_1 \text{ і } c_2 = a_2 + b_2.$$

$\vec{a}(a_1;\ a_2) +$
$+ \vec{b}(b_1;\ b_2) =$
$= \overrightarrow{(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)}$

Зрозуміло, що для координат суми кількох векторів отримаємо аналогічні вирази, в яких додаються відповідні координати всіх векторів-доданків.

Координати вектора, що є сумою будь-якого числа векторів, дорівнюють сумі відповідних координат векторів-доданків.

РІЗНИЦЯ ДВОХ ВЕКТОРІВ

$\vec{a}(a_1; a_2) -$
$- \vec{b}(b_1; b_2) =$
$= \overrightarrow{(a_1 - b_1; a_2 - b_2)}$

Щоб знайти різницю двох векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$, треба до вектора $\vec{a}$ додати вектор $(-\vec{b})$. Тобто

$$\vec{c}(c_1; c_2) = \vec{a}(a_1; a_2) - \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{a}(a_1; a_2) + \vec{b}(-b_1; -b_2),$$

$$c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + (-b_1\vec{e}_1 - b_2\vec{e}_2) = (a_1 - b_1)\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\vec{e}_1.$$

Звідси: $c_1 = a_1 - b_1$ і $c_2 = a_2 - b_2$.

Координати вектора, що є різницею двох заданих векторів, дорівнюють різниці відповідних координат цих векторів.

ВЛАСТИВОСТІ
дій над векторами:

$\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$;

$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;

$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) =$
$= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

Подання векторів через їхні координати значно спрощує дії над векторами, бо вони зводяться до дій над числами – їхніми координатами.

Тому цей розділ називають *векторною алгеброю*.

З наведеного вище безпосередньо випливають такі ВЛАСТИВОСТІ *дій над векторами*:

1. $\lambda(\mu\vec{a}) = \mu(\lambda\vec{a})$;
2. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;
3. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;
4. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
5. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Перед розкладанням вектора по двох інших векторах **перевірте** останні на пропорційність відповідних координат.
Якщо їхні координати пропорційні – вони колінеарні і розклад здійснити неможливо.

Приклад 1. Розкладіть вектор $\vec{c}(-6; 0)$ за векторами $\vec{a}(1; 3)$ і $\vec{b}(2; 6)$.

Розв’язання

Координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ пропорційні $(1 : 2 = 3 : 6)$. Тоді вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні $(\vec{a} = 0{,}5\vec{b})$, і виконати розклад неможливо.

Відповідь: задача не має розв’язку.

Приклад 2. Розкладіть вектор $\vec{c}(-6; 0)$ за векторами $\vec{a}(1; 3)$ і $\vec{b}(2; -6)$.

Для допитливих

Цікавий приклад застосування векторного методу

На сторонах довільного трикутника ABC зовні побудовано паралелограми: ABA_1B_1, BCC_1B_2, CAA_2C_2. Доведіть, що з відрізків A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 можна скласти трикутник.

Доведення

Розглянемо багатокутник $A_1B_1B_2C_1C_2A_2$. Маємо:

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2C_1} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_2A_2} + \overrightarrow{A_2A_1} = 0.$$

Врахуємо, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_2C_1}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{C_2A_2}$ і $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = 0$. Тоді $\overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{A_2A_1} = 0$. Тобто з відрізків A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 можна скласти трикутник, якщо вектори $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$, $\overrightarrow{A_2A_1}$ неколінеарні.

А чи можуть вектори $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$, $\overrightarrow{A_2A_1}$ бути колінеарними?

Розв’язання

Координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не пропорційні, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не є колінеарними, тому можна виконати розклад

$$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\overrightarrow{(\lambda;\ 3\lambda)}+\overrightarrow{(2\mu;\ -6\mu)}=\overrightarrow{(\lambda+2\mu;\ 3\lambda-6\mu)}.$$

Маємо: $\vec{c}(-6;\ 0)=\overrightarrow{(\lambda+2\mu;\ 3\lambda-6\mu)}$. Звідси:

$$\begin{cases}\lambda+2\mu=-6,\\ 3\lambda-6\mu=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda+2\mu=-6,\\ \lambda-2\mu=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\lambda=-3,\\ \mu=-1{,}5.\end{cases}$$

Відповідь: $\vec{c}=-3\vec{a}-1{,}5\vec{b}$.

Приклад 3. У паралелограмі $ABCD$ точки M і N лежать на сторонах AB і CD відповідно, $AM : MB = CN : ND = 2 : 1$. Виразіть вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$.

Розв’язання

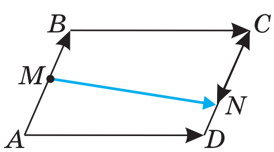
Позначимо вектори $\overrightarrow{AB}\triangleq\vec{a}$ і $\overrightarrow{AD}\triangleq\vec{b}$ (мал. 4.16).

1) $ABCD$ – паралелограм, тоді $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

2) За правилом багатокутника $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$.

3) $\overrightarrow{MB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AB}$ і $AM : MB = 2 : 1$, тоді $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{3}\vec{a}$.

4) $\overrightarrow{CN}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AB}$ і $CN : ND = 2 : 1$, тоді $\overrightarrow{CN}=-\frac{2}{3}\vec{a}$.



Мал. 4.16

5) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}=\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}$.

Відповідь: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Розкладаємо вектор $\vec{c}\,(c_1;\ c_2)$ за $\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$ і $\vec{b}\,(b_1;\ b_2)$, $\vec{a}\nparallel\vec{b}$:

1) *записати* $\lambda\vec{a}=\overrightarrow{(\lambda a_1;\ \lambda a_2)}$ і $\lambda\vec{b}=\overrightarrow{(\mu b_1;\ \mu b_2)}$;

2) *записати* $\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}=\overrightarrow{(\lambda a_1+\mu b_1;\ \lambda a_2+\mu b_2)}$;

3) *записати* $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$, з рівності координат $\begin{cases}c_1=\lambda a_1+\mu b_1\\ c_2=\lambda a_2+\mu b_2\end{cases}$ *знайти* λ і μ.

Для допитливих

За допомогою деякої точки X будь-який вектор можна представити у вигляді суми або різниці двох векторів:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{XB};\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{XB}-\overrightarrow{XA}.$$

Це інколи полегшує розв’язування задач, і такий метод називають *методом проколу*, а точку X – *полюсом*.

Наприклад, доведемо методом проколу, що середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює півсумі їх довжин.

Нехай $ABCD$ – трапеція ($BC \parallel AD$), точки M і N – середини сторін AB і DC. Тоді $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{XN}-\overrightarrow{XM}$. Врахуємо (див. с. 154), що:

$$2\overrightarrow{XN}=\overrightarrow{XD}+\overrightarrow{XC},\ 2\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}\ .$$

Тоді $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{XD}-\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}-\overrightarrow{XB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.

Твердження доведено.

Практична робота 36

1. Накресліть прямокутну систему координат.
2. Побудуйте вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$, якщо $A(-6; -2)$, $B(3; 4)$, $C(1; 1)$. Знайдіть координати цих векторів.
3. Побудуйте вектор, який є сумою векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$. Використовуючи клітинки зошита, знайдіть його координати.
4. Порівняйте отримані координати з координатами векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$. Зробіть висновок.

Практична робота 37

1. Накресліть прямокутну систему координат.
2. Побудуйте вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо $A(2; 2)$, $B(4; 7)$, $C(9; 6)$. Знайдіть координати цих векторів.
3. Побудуйте вектор, що є різницею векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Використовуючи клітинки зошита, знайдіть його координати.
4. Порівняйте отримані координати з координатами векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Зробіть висновок.

Практична робота 38

1. У прямокутній системі координат побудуйте вектор $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(1; 1)$, $B(3; 3)$.
2. Побудуйте вектор $3\overrightarrow{AB}$. Використовуючи клітинки зошита, знайдіть його координати.
3. Порівняйте отримані координати з координатами вектора $\overrightarrow{AB}$. Зробіть висновок.

Завдання 30

1°. Дано вектор $\vec{a}(1; 5)$. Знайдіть координати векторів: **а)** $2\vec{a}$; **б)** $3\vec{a}$; **в)** $-5\vec{a}$; **г)** $-12\vec{a}$.

2°. Дано вектори $\vec{a}(2; -5)$ і $\vec{b}(-3; 4)$. Знайдіть вектори:
а) $2\vec{b}$; **б)** $-\vec{b}$; **в)** $4\vec{b}$; **г)** $-4\vec{b}$; **д)** $\vec{a}+\vec{b}$; **е)** $\vec{a}-\vec{b}$; **є)** $\vec{a}+2\vec{b}$; **ж)** $\vec{a}-4\vec{b}$.

3°. Знайдіть координати вектора $2\vec{a}$ і $\frac{1}{3}\vec{a}$, якщо:
а) $\vec{a}(-7; 3)$; **б)** $\vec{a}(-3; 9)$; **в)** $\vec{a}(0,5; -2)$; **г)** $\vec{a}=\vec{e}_1-3\vec{e}_2$; **д)** $\vec{a}=-6\vec{e}_1+21\vec{e}_2$.

4°. Знайдіть суму векторів:
а) $\vec{a}(1; -2)$ і $\vec{b}(2; -3)$; **б)** $\vec{a}(-3; 4)$ і $\vec{b}(2; -3)$; **в)** $\vec{a}(-5; 4)$ і $\vec{b}(2; -2)$.

5°. Знайдіть вектор $\vec{a}-\vec{b}$, якщо:
а) $\vec{a}(1; 4)$, $\vec{b}(-1; -3)$; **б)** $\vec{a}(-3; 2)$, $\vec{b}(2; -1)$; **в)** $\vec{a}(5; 3)$, $\vec{b}(-4; 4)$.

6. Знайдіть модулі векторів $\vec{x}+\vec{y}$ і $\vec{x}-\vec{y}$, якщо:
а) $\vec{x}(4; -1)$, $\vec{y}(-5; 8)$; **в)** $\vec{x}(3; 2)$, $\vec{y}(4; -2)$;
б) $\vec{x}=3\vec{e}_1-2\vec{e}_2$, $\vec{y}=-4\vec{e}_1+\vec{e}_2$; **г)** $\vec{x}=\vec{e}_1-2\vec{e}_2$, $\vec{y}=\vec{e}_1-3\vec{e}_2$.

7. Дано вектори $\vec{a}=\vec{e}_1-6\vec{e}_2$, $\vec{b}=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2$. Знайдіть координати і модуль вектора:
а) $2\vec{a}+3\vec{b}$; **б)** $\vec{a}-3\vec{b}$; **в)** $0,5\vec{a}-\vec{b}$; **г)** $4\vec{b}-5\vec{a}$.

Для допитливих

1. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ пов'язані залежністю $2\vec{a}+5\vec{b}+0\cdot\vec{c}-8\vec{d}=0$. Представте кожний із векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ у вигляді лінійної комбінації інших векторів. Чи правильно, що вектор $\vec{c}$ не можна представити у вигляді лінійної комбінації інших векторів? Чому?

2. Нехай $\vec{a}=5\vec{m}-3\vec{n}$, $\vec{b}=7\vec{m}-4\vec{n}$, де вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ – неколінеарні. Розкладіть вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

8. Дано $|\lambda\vec{a}| = 5$. Знайдіть λ, якщо:
а) $\vec{a}(6; -8)$; **б)** $\vec{a}(3; -4)$; **в)** $\vec{a}(-7; 24)$; **г)** $\vec{a}(5; 12)$.

9. Дано вектори $\vec{a}(3; -2)$, $\vec{b}(4; 2)$. Знайдіть координати і модуль вектора:
а) $2\vec{a} + \vec{b}$; **б)** $\vec{a} - 3\vec{b}$; **в)** $5\vec{a} - \vec{b}$; **г)** $2\vec{b} + 5\vec{a}$.

10. Знайдіть вектор $4(\vec{a} - 2\vec{b}) + 3(0,5\vec{c} + 3\vec{d})$, якщо:
а) $\vec{a}(2; 3)$, $\vec{b}(-3; 4)$, $\vec{c}(0; -2)$, $\vec{d}(2; -2)$;
б) $\vec{a}(0; -3)$, $\vec{b}(2; -4)$, $\vec{c}(2; -2)$, $\vec{d}(1; -1)$.

11. Які з векторів колінеарні: $\vec{a}(8; 4)$, $\vec{b}(-1; -0,5)$, $\vec{c}(4; 4)$, $\vec{d}(0,5; 0,5)$, $\vec{x}(-2; 1)$, $\vec{y}(-1; -1)$?

12. Дано чотири точки: $A(3; 0)$, $B(0; 1)$, $C(2; 7)$ і $D(5; 6)$. Доведіть, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні.

13*. Знайдіть значення x, при якому вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ співнапрямлені, якщо:
а) $\vec{a}(2; 3)$, $\vec{b}(12; x)$; **б)** $\vec{a}(x; 2)$, $\vec{b}(3; 4)$; **в)** $\vec{a}(-3; 1)$, $\vec{b}(4; x)$.

14*. Знайдіть значення x, при якому вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, якщо:
а) $\vec{a}(-2; 3)$, $\vec{b}(12; x)$; **б)** $\vec{a}(x; -2)$, $\vec{b}(3; 4)$; **в)** $\vec{a}(3; 1)$, $\vec{b}(4; x)$.

15*. Дано вектор $\vec{a}(-5; 4)$. Знайдіть вектор $\vec{x}(x_0; y_0)$, який у 5 разів довший, ніж вектор $\vec{a}$, і напрямлений з вектором $\vec{a}$: **а)** однаково; **б)** протилежно.

16*. Модуль вектора $k\vec{x}$ дорівнює 12. Знайдіть k, якщо: **а)** $\vec{x}(1; 3)$; б) $\vec{x}(-5; -1)$.

17*. Знайдіть одиничний вектор, колінеарний вектору $\vec{x}(6; -8)$ і однаково з ним напрямлений.

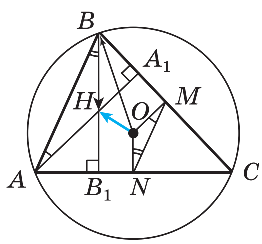
18*. Знайдіть серед поданих тверджень правильні:
а) якщо $|\vec{b}| = k|\vec{a}|$, то $\vec{b} = k\vec{a}$;
б) якщо $\vec{b} = k\vec{a}$, то $|\vec{b}| = k|\vec{a}|$;
в) якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то $|\vec{b}| = k|\vec{a}|$ і $\vec{b} = k\vec{a}$;
г) якщо $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ і $|\vec{b}| = k|\vec{a}|$, то $\vec{b} = k\vec{a}$.

Для допитливих

Доведемо слідом за Ейлером таку теорему.

Теорема Ейлера (формула Гамільтона). **Якщо в довільному трикутнику ABC позначити через H його ортоцентр, а через O – центр кола, описаного навколо цього трикутника, то $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.**

Доведення



Проведемо в трикутнику ABC висоти BB_1, AA_1 і перпендикуляри ON і OM до сторін AC і BC трикутника (див. мал.).

1) Із трикутника BOH: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BH}$.

2) O – центр кола, описаного навколо трикутника ABC, тоді ON і OM – серединні перпендикуляри до сторін AC і BC, а MN – середня лінія.

3) $MN \parallel AB$ (як середня лінія), $ON \parallel BB_1$ (як перпендикуляри до AC). Тоді $OM \parallel AA_1$ (як перпендикуляри до BC). $\angle ABB_1 = \angle ONM$, $\angle BAA_1 = \angle OMN$, $\triangle ABH \sim \triangle MNO$ з $k = 2$ (бо $AB = 2MN$).

4) $\triangle ABH \sim \triangle MNO$ з $k = 2$. Тоді $BH = 2ON$.
$BH \parallel ON$, $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{ON}$. Тоді $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{ON}$.

5) N – середина відрізка AC. Тоді (див. с. 152):
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{ON}$, тобто $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

Теорему доведено.

19*. Розкладіть вектор $\vec{a}$ за векторами $\vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо:

а) $\vec{a}(2;\ 3)$, $\vec{b}(-1;\ 4)$, $\vec{c}(5;\ -6)$; **б)** $\vec{a}(-3;\ 5)$, $\vec{b}(0;\ 2)$, $\vec{c}(-1;\ -1)$.

20.** Дано вектори $\vec{a}(3;\ -1)$, $\vec{b}(1;\ -2)$ і $\vec{c}(-1;\ 7)$. Розкладіть вектор $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

21. Дано точки $A(1;\ 0)$, $B(-2;\ -1)$, $C(0;\ 3)$. Знайдіть точку $D(x;\ y)$, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ рівні.

22*. Сума векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ дорівнює нулю. Знайдіть координати точки D, якщо $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ -1)$, $C(1;\ 3)$.

23*. З'ясуйте, які умови повинні задовольняти вектори, щоб виконувалося співвідношення:

а) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$; **б)** $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$; **в)** $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$.

24.** $ABCD$ – трапеція, в якої довжина основи AD у 3 рази більша за довжину BC. Знайдіть координати точки D, якщо $A(-4;\ 6)$, $B(-2;\ -1)$, $C(3;\ 3)$.

25.** Дано координати вершин трикутника: $A(7;\ 3)$, $B(-5;\ -2)$, $C(4;\ -1)$. Знайдіть вектори: **а)** $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$; **б)** одиничні вектори, що паралельні відповідно прямим AB і AC; **в)** вектор $\overrightarrow{AL}$, якщо відрізок AL є бісектрисою заданого трикутника.

26*. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь Ox дорівнює 2, проекція вектора $\vec{b}$ на вісь Ox дорівнює -3, проекція вектора $\vec{c}$ на вісь Ox дорівнює 4. Знайдіть проекції на вісь Ox векторів:

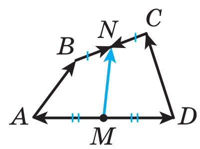
а) $-3\vec{a}$; **б)** $\vec{b} + \vec{c}$; **в)** $\vec{c} - \vec{a}$; **г)** $3\vec{a} - 2\vec{b}$; **д)** $-\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c}$.

27.** Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 1. Точка K – середина AD, точка E – середина AB, O – точка перетину діагоналей квадрата. Знайдіть проекцію на вісь AD вектора: **а)** $\overrightarrow{CB}$; **б)** $\overrightarrow{AC}$; **в)** $\overrightarrow{DB}$; **г)** $\overrightarrow{BK}$; **д)** $\overrightarrow{CE}$; **е)** $\overrightarrow{EK}$.

Для допитливих

Векторна формула середньої лінії чотирикутника

Доведемо для довільного чотирикутника $ABCD$ (див. мал.), що $\dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}}{2} = \overrightarrow{MN}$, де M і N – середини прилеглих його сторін AD і BC. Цю формулу називають *векторною формулою середньої лінії чотирикутника*.



Справді: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ і $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$. Додавши ці рівності почленно, отримаємо ту, що потрібно довести.

Доведіть самостійно такі **опорні задачі**.

1. Нехай дано трикутник ABC. Доведіть для векторів $\vec{m} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ і $\vec{n} = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ такі твердження:

а) вектор $\vec{m} + \vec{n}$ спрямований уздовж бісектриси внутрішнього кута A трикутника ABC;

б) вектор $\vec{m} - \vec{n}$ спрямований уздовж бісектриси зовнішнього кута при вершині A трикутника ABC.

2. Нехай M – центроїд трикутника ABC. Доведіть, що $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$.

3. Доведіть, якщо $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$, то M – центроїд трикутника ABC.

4. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ – два трикутники на площині. Доведіть, якщо $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 0$, то центроїди цих трикутників збігаються.

5. Задано точки A, B, C і D. Знайдіть таку точку M, щоб $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CD}$.

6. У трикутнику ABC точка O – центр описаного навколо цього трикутника кола, а H – ортоцентр. Доведіть, що $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.

§ 26. Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ ***і*** $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ ***називається число*** $a_1b_1 + a_2b_2$. Скалярний добуток позначають $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Знайдемо скалярний добуток двох рівних векторів:

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a_1a_1 + a_2a_2 = a_1^2 + a_2^2 = |\vec{a}|^2.$$

Скалярний добуток вектора самого на себе $\vec{a}\cdot\vec{a}$ позначають $\vec{a}^2$ і називають *скалярним квадратом вектора*.

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату модуля цього вектора $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

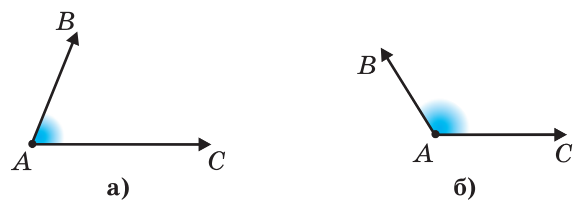
З означення скалярного добутку двох векторів випливають такі його ВЛАСТИВОСТІ:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;
2. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;
3. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

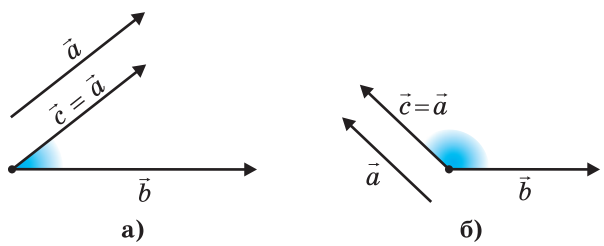
Для подальшого нам треба вміти визначати кут між двома векторами.

Кутом між векторами $\overrightarrow{AB}$ *і* $\overrightarrow{AC}$ називається кут BAC (мал. 4.17).

Кутом між двома векторами, що не мають спільного початку, називається кут між рівними їм векторами, що мають спільний початок (мал. 4.18).



Мал. 4.17



Мал. 4.18

Вважають, що *кут між двома співнапрямленими векторами* дорівнює нулю.

З а у в а ж е н н я. Кут між двома прямими не може бути тупим. Кут між двома векторами може бути тупим.

Доведемо ще кілька властивостей скалярного добутку векторів.

Скалярний добуток:

$\vec{a}\cdot\vec{b} \overset{def}{=} a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2$

Скалярний квадрат:

$\vec{a}\cdot\vec{a} \triangleq \vec{a}^2$

Нагадаємо:

«$\overset{def}{=}$» – рівність за означенням;

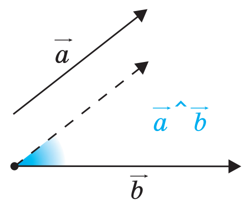
«$\triangleq$» – «позначили як».

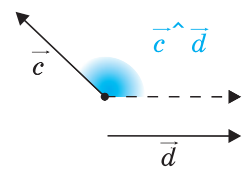
ВЛАСТИВОСТІ $\vec{a}\cdot\vec{b}$:

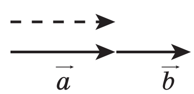
1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) =$
$= \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;

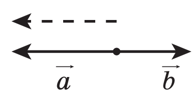
3) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.







$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0°$



$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 180°$

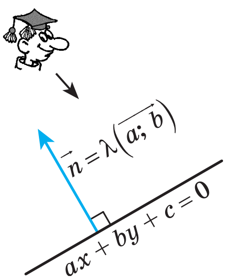
Т Теорема. **Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює добутку їхніх модулів на косинус кута між ними.**

Доведення

ВЛАСТИВОСТІ $\vec{a}\cdot\vec{b}$:

4) $\vec{a}\cdot\vec{b}=$
$=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$;

5) $\vec{a}\perp\vec{b}$
$\Downarrow\quad\Uparrow$
$\vec{a}\cdot\vec{b}=0,$
$(\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$.



Нехай дано вектори $\vec{a}(a_1;\,a_2)$ і $\vec{b}(b_1;\,b_2)$. Позначимо кут між ними як α. Треба довести, що

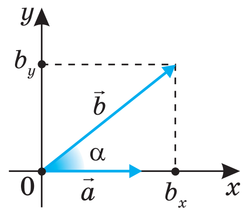
$$a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha.$$

Розглянемо скалярний квадрат вектора $\vec{a}+\vec{b}$ і врахуємо властивості скалярного добутку двох векторів, наведені вище:

$$(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2,$$
$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

Звідси скалярний добуток двох векторів $\vec{a}\cdot\vec{b}$ визначається тільки через довжини векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{a}+\vec{b}$, тобто він не залежить від вибору системи координат.

Спрямуємо вісь Ox так, як показано на малюнку 4.19, і запишемо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:



Мал. 4.19

$\vec{a}(|a|;\,0)$, $\vec{b}(|b|\cos\alpha;\,|b|\sin\alpha)$.

Тоді $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha+0\cdot|\vec{b}|\sin\alpha=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$.

Теорему доведено.

Н Наслідок 1. **Якщо ненульові вектори взаємно перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю.**

Н Наслідок 2. **Якщо скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю, то ці вектори взаємно перпендикулярні.**

Для допитливих

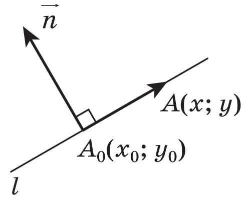
ВЕКТОР-НОРМАЛЬ ДО ПРЯМОЇ
(вектор, перпендикулярний до прямої)

Нехай маємо пряму l, рівняння якої має вигляд $ax+by+c=0$. Позначимо на цій прямій точки $A_0(x_0;\,y_0)$ і $A(x;\,y)$. Для координат цих точок виконуються співвідношення

$ax+by+c=0$ і $ax_0+by_0+c=0$.

Віднімемо від першої рівності другу:

$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$.



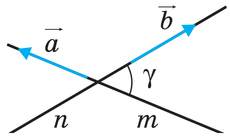
Маємо, що $\overrightarrow{A_0A}\,(x-x_0;\,y-y_0)$. Тоді остання рівність є скалярним добутком двох перпендикулярних векторів – вектора $\overrightarrow{A_0A}$, який лежить на заданій прямій l, і вектора $(\overline{a;\,b})$. Вектор, колінеарний вектору $(\overline{a;\,b})$, і є шуканим *вектором-нормаллю до прямої* $ax+by+c=0$:

$$\vec{n}=\lambda(\overline{a;\,b}).$$

Зауваження. З останньої теореми маємо, що:

1) для довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується нерівність $\vec{a}\cdot\vec{b} \leqslant |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$;
2) косинус кута α між двома ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$;
3) косинус кута γ між двома прямими, вздовж яких напрямлено вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює $\cos\gamma = \dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ (бо кут між прямими не перевищує 90°).

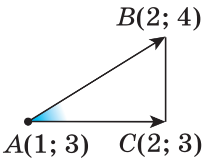
$$\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$



$$\cos\left(n\,\hat{}\,m\right) = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

↑
кут
між прямими –
не тупий, $\cos\gamma \geqslant 0$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ



Мал. 4.20

Приклад 1. Трикутник ABC задано координатами його вершин $A(1;\,3)$, $B(2;\,4)$ і $C(2;\,3)$. Знайдіть градусну міру кута A цього трикутника.

Розв'язання

1) Шуканий $\angle A = \overrightarrow{AC}\,\hat{}\,\overrightarrow{AB}$ (мал. 4.20).

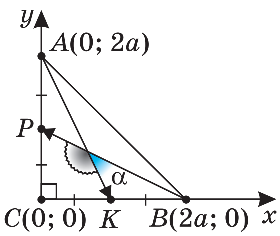
2) $\overrightarrow{AC} = \overline{(1;\,0)}$, $\overrightarrow{AB} = \overline{(1;\,1)}$. Тоді

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1\cdot 1 + 0\cdot 1}{\sqrt{1+0}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ і } \angle A = 45^\circ.$$

Відповідь: $\angle A = 45^\circ$.

Приклад 2. Знайдіть косинус кута між медіанами рівнобедреного прямокутного трикутника, які проведені до його катетів.

Розв'язання



Мал. 4.21

Спрямуємо осі Ox і Oy уздовж катетів трикутника і позначимо довжини його катетів через $2a$ (мал. 4.21). Тоді: $A(0;\,2a)$, $B(2a;\,0)$, $C(0;\,0)$.

1) Координати середин катетів: $K(a;\,0)$, $P(0;\,a)$.
2) $\overrightarrow{BP} = \overline{(-2a;\,a)}$, $\overrightarrow{AK} = \overline{(a;\,-2a)}$.
3) Шуканий кут є кутом між прямими і не може бути тупим, його косинус – додатне число. Тоді

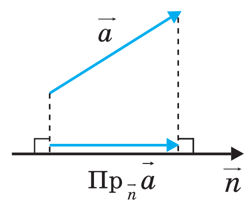
$$\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{BP}\,\hat{}\,\overrightarrow{AK}\right)\right| = \frac{|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AK}|}{|\overrightarrow{BP}|\cdot|\overrightarrow{AK}|} =$$

$$= \frac{|-2a\cdot a + a\cdot(-2a)|}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}\cdot\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{4a^2}{5a^2} = \frac{4}{5}.$$

Відповідь: $\dfrac{4}{5}$.

Нагадаємо:

проекція вектора $\vec{a}$ на напрям $\vec{n}$



$$\text{Пр}_{\vec{n}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{n}\right)\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Завдання 31

1°. Обчисліть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}(3; -7)$, $\vec{b}(4; 3)$;
б) $\vec{a}(-3; -5)$, $\vec{b}(-1; 2)$;
в) $\vec{a}(5; 3)$, $\vec{b}(-3; 1)$;
г) $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$, $\vec{b} = -5\vec{e}_1 + 0{,}6\vec{e}_2$;
д) $\vec{a} = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{b} = -\vec{e}_1 + 0{,}5\vec{e}_2$.

2. Знайдіть x, якщо:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -13$, $\vec{a}(3; 2)$, $\vec{b}(-5; x)$;
б) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$, $\vec{a}(-3; 2)$, $\vec{b}(-1; x)$;
в) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$, $\vec{a}(x; -3)$, $\vec{b}(2; -2)$;
г) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$, $\vec{a}(-2; x)$, $\vec{b}(-2; x)$.

3. Дано вектори $\vec{a}(8; -2)$ і $\vec{b}(4; 3)$. Знайдіть вектор $\vec{x}$, що задовольняє умови $\vec{x} \cdot \vec{a} = 8$ і $\vec{x} \cdot \vec{b} = 0$.

4°. Обчисліть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 6$, кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 45°;
б) $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 3$, кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 120°;
в) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 12$, кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 90°.

5°. Обчисліть $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$ і $\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ та порівняйте отримані результати, якщо:

а) $\vec{a}(2; 0)$, $\vec{b}(-1; 3)$, $\vec{c}(4; 0)$; **б)** $\vec{a}(2; 1)$, $\vec{b}(-3; 2)$, $\vec{c}(-1; -2)$.

6°. Обчисліть $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b}$ і $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ та порівняйте отримані результати, якщо:

а) $\vec{a}(2; 0)$, $\vec{b}(-1; 3)$, $\lambda = 2$; **б)** $\vec{a}(2; 1)$, $\vec{b}(-3; 2)$, $\lambda = -0{,}5$.

7°. Обчисліть $\vec{a} \cdot \vec{b}$ і $\vec{b} \cdot \vec{a}$ та порівняйте отримані результати, якщо:

а) $\vec{a}(2; 0)$, $\vec{b}(-1; 3)$; **б)** $\vec{a}(2; 1)$, $\vec{b}(-3; 2)$.

8°. Знайдіть $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо:

а) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\cos\varphi = 0{,}4$;
б) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, $\varphi = 60°$;
в) $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 5$, $\varphi = 90°$;
г) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\varphi = 30°$;
д) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\cos\varphi = -0{,}5$;
е) $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = 120°$;
є) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = 180°$.

9. Знайдіть косинус кута між векторами:

а) $\vec{a}(3; 4)$ і $\vec{b}(-1; 5)$; **б)** $\vec{a}(-3; 4)$ і $\vec{b}(1; 5)$; **в)** $\vec{a}(-3; -4)$ і $\vec{b}(-1; -5)$.

Для допитливих

Відстань від точки $(x_0; y_0)$ до прямої $ax + by + c = 0$

Будемо позначати таку відстань, як $d((x_0; y_0); ax + by + c = 0)$.

Задана пряма перетинає вісь Ox у точці $C\left(-\dfrac{c}{a}; 0\right)$. Шукана відстань від точки $A(x_0; y_0)$ до прямої $ax + by + c = 0$ дорівнює довжині перпендикуляра AB, опущеного з точки A на пряму. З трикутника ABC:

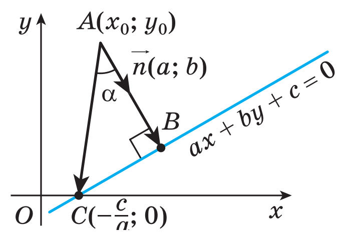
$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|\cos\alpha, \text{ де } \cos\alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}, \quad \vec{n} = (a; b), \quad \overrightarrow{AC} = \left(-x_0 - \frac{c}{a};\ -y_0\right).$$

Тобто

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\vec{n}|} = \frac{|-ax_0 - c - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

отже, шукана відстань

$$d((x_0; y_0); ax + by + c = 0) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



10. Точки $A(3; 2)$, $B(5; 1)$, $C(1; -2)$ – вершини трикутника. Знайдіть внутрішній кут при вершині A, косинус зовнішнього кута при вершині B.

11*. Не виконуючи побудови точок A, B, C, установіть, яким є трикутник ABC (гострокутним, прямокутним, тупокутним), якщо:
а) $A(0; 3)$, $B(2; 0)$, $C(-2; -1)$; **б)** $A(1; 1)$, $B(-3; 1)$, $C(1; 4)$; **в)** $A(2; 4)$, $B(3; 4)$, $C(-4; 5)$; **г)** $A(0; 3)$, $B(2; 0)$, $C(-2; 0)$.

12. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
а) $\vec{a}(0; 2)$, $\vec{b}(\sqrt{3}; 1)$; **в)** $\vec{a}(0; -2)$, $\vec{b}\left(1; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
б) $\vec{a}(1; 2)$, $\vec{b}(-4; 2)$; **г)** $\vec{a}(4; -4)$, $\vec{b}(0; -1)$.

13. Доведіть, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, якщо:
а) $\vec{a}(0; 3)$, $\vec{b}(-2; 0)$; **б)** $\vec{a}(-2; 3)$, $\vec{b}(-6; -4)$; **в)** $\vec{a}(m; n)$, $\vec{b}(-n; m)$.

14. При якому значенні x перпендикулярні вектори:
а) $\vec{a}(3; x)$ і $\vec{b}(4; 5)$; **б)** $\vec{a}(4; x)$ і $\vec{b}(-9; x)$?

15. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $30°$, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$. Знайдіть скалярний добуток:
а) $(2\vec{a} - 3\vec{b})\cdot(\vec{a} + \vec{b})$; **б)** $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(\vec{a} - 2\vec{b})$; **в)** $(6\vec{a} - 5\vec{b})\cdot(6\vec{a} + 5\vec{b})$.

16*. Дано $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $\dfrac{2\pi}{3}$. Знайдіть, при якому значенні k вектори $\vec{p} = k\vec{a} + 17\vec{b}$ і $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ взаємно перпендикулярні.

17*. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $(\vec{a} + \vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, а кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $120°$.

18*. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $60°$. Знайдіть:
а) $|\vec{a} - \vec{b}|$; **б)** $|3\vec{a} - \vec{b}|$; **в)** $|2\vec{a} + 3\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$.

19*. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $30°$, $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$. Обчисліть косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$.

20*. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $120°$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Знайдіть $|\vec{a} - \vec{b}|$.

21*. Знайдіть вектор $\vec{a}$, колінеарний вектору $\vec{b}(1; 2)$, якщо $\vec{a}\cdot\vec{b} = 20$.

22*. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що вектори $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{d} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаємно перпендикулярні?

23*. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють один з одним кути по $120°$. Розкладіть вектор $\vec{a}$ за векторами $\vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 1$.

24*. Знайдіть одиничний вектор, що утворює тупий кут з ортом $\vec{e}_1$ і перпендикулярний до вектора $\vec{a}(4; 1)$.

25*. Дано вектор $\vec{b}(3; 2)$. Знайдіть вектор, перпендикулярний до $\vec{b}$, довжиною 4 і який утворює тупий кут з віссю Oy.

26. Доведіть, що точки $A(3; 0)$, $B(0; 1)$, $C(2; 7)$ і $D(5; 6)$ є вершинами прямокутника $ABCD$.

Для допитливих

Скориставшись формулою відстані від точки до прямої, розв'яжіть такі задачі.

1. Запишіть рівняння кола з центром у точці $(1; -2)$, яке дотикається до прямої $y = 2x - 5$.

2. Знайдіть найменшу площу трикутника, дві вершини якого мають координати $(0; 2)$ і $(-3; 0)$, а третя лежить на прямій $3x - 2y + 10 = 0$.

3. Знайдіть найменшу площу трикутника, дві вершини якого мають координати $(-2; 0)$ і $(0; -4)$, а третя лежить на параболі $y = x^2$.

27. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ – квадрат, якщо:
а) $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 1)$, $C(0;\ 2)$, $D(-1;\ 1)$; **б)** $A(-3;\ -1)$, $B(-2;\ 3)$, $C(2;\ 2)$, $D(1;\ -2)$.

28. Дано вершини чотирикутника $ABCD$: $A(1;\ -2)$, $B(1;\ 4)$, $C(-4;\ 1)$ і $D(-5;\ -6)$. Доведіть, що його діагоналі взаємно перпендикулярні.

29.** Трикутник задано координатами його вершин $A(1;\ -2)$, $B(1;\ 4)$, $C(-4;\ 1)$. Знайдіть вектор $\overrightarrow{BM}$, де точка M є основою висоти, проведеної з вершини B.

30.** Три сили $\vec{F_1}(3;\ 4)$, $\vec{F_2}(2;\ 3)$, $\vec{F_3}(-3;\ 0)$ прикладені до однієї точки. Знайдіть роботу, яку виконала рівнодійна цих сил, якщо точка прикладання рівнодійної, рухаючись прямолінійно, перемістилася з положення $M_1(5;\ 3)$ в положення $M_2(4;\ -1)$.

31.** Дано вектори $\vec{a}(-1;\ 1)$ і $\vec{b}(3;\ -5)$. Знайдіть проекцію вектора $2\vec{a}-\vec{b}$ на вектор $\vec{a}+\vec{b}$.

32.** Вектор $\vec{a}$, модуль якого дорівнює 6, напрямлений під кутом $\alpha = 30^\circ$ до осі Ox. Знайдіть проекції цього вектора на координатні осі.

33.** Дано три взаємно перпендикулярні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, модулі яких дорівнюють 3, 6 і $\sqrt{11}$ відповідно. Знайдіть модуль вектора $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

34.** Вектор $\vec{a}$, модуль якого дорівнює 3, утворює кут $\alpha = 30^\circ$ з прямою AB. Під яким кутом β до AB треба розмістити вектор $\vec{b}$, рівний за модулем $\sqrt{3}$, щоб вектор $\vec{a}+\vec{b}$ був паралельним AB? Знайдіть модуль вектора $\vec{a}+\vec{b}$.

35.** Доведіть, якщо для сторін чотирикутника $ABCD$ виконується співвідношення $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$, то діагоналі цього чотирикутника взаємно перпендикулярні.
Порада. Використайте так званий *векторний метод*. Розгляньте вектори, що збігаються зі сторонами чотирикутника та його діагоналями, і скористайтеся властивостями скалярного добутку векторів для скалярного квадрата й ознакою перпендикулярності векторів.

Для допитливих

1. Доведіть твердження (**опорний факт**): **для того, щоб із трьох даних відрізків AB, BC і AC можна було побудувати трикутник, необхідно й достатньо, щоб $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$, де $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ – неколінеарні.**

2. Спираючись на опорний факт (1), доведіть, що: **а)** із медіан довільного трикутника можна побудувати трикутник; **б)** можна побудувати трикутник з половин діагоналей довільного чотирикутника та однієї з його середніх ліній (*середньою лінією чотирикутника* називають відрізок, що сполучає середини його протилежних сторін).

3. У трикутнику ABC: AA_1 – бісектриса, $AB = c$, $CA = b$. Доведіть, що вектори $\overrightarrow{AA_1}$ і $\frac{1}{c}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{b}\overrightarrow{AC}$ колінеарні.

4. У площині прямокутника $ABCD$ взято точку X. Доведіть, що
$$\overrightarrow{XA}\cdot\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XB}\cdot\overrightarrow{XD}.$$

5. Який вигляд має чотирикутник $ABCD$, якщо
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=0?$$

6. Доведіть, що для довільних чотирьох точок A, B, C і D виконується рівність
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0.$$

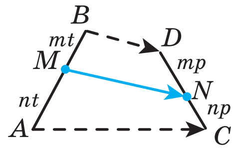
7. Дано вектори $\vec{a}(1;\ 2)$ і $\vec{b}(3;\ -1)$. При якому значенні k вектор $\vec{a}+k\cdot\vec{b}$ буде найкоротшим? Обчисліть для цього значення k скалярний добуток $\vec{b}\cdot(\vec{a}+k\cdot\vec{b})$.

8. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $k\cdot\vec{a}+m\cdot\vec{b}$ попарно перпендикулярні. Доведіть, що хоча б один з них дорівнює нуль-вектору.

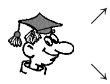
9. Яку умову повинні задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектор $\vec{a}+\vec{b}$ був перпендикулярний до вектора $\vec{a}-\vec{b}$?

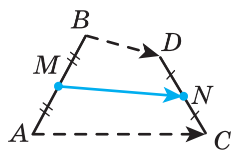
§ 27. Векторний метод доведення теорем і розв'язування геометричних задач

Застосуємо вектори до розв'язування геометричних задач. Деякі з таких задач ми вже розглядали на попередній сторінці, а деякі розв'язували раніше іншими методами.



$\overrightarrow{MN} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{BD}$

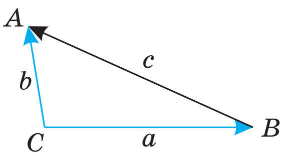




$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$

ПРИКЛАДИ ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМ

Т Теорема косинусів. **Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін мінус подвоєний добуток цих сторін на косинус кута між ними.**



Мал. 4.22

Нехай у трикутнику ABC (мал. 4.22) $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Треба довести, що

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Доведення

Запишемо векторну рівність

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}.$$

З векторного квадрата цього співвідношення

$$\overrightarrow{BA}^2 = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - 2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$$

маємо:

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\overrightarrow{CA}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2 - 2|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cos C,$$

тобто $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

Теорему доведено.

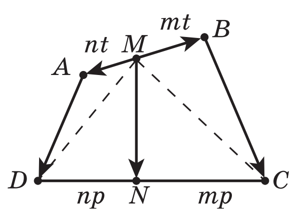
Зауваження. Якщо кут C прямий, то $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$, тоді $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$ і отримаємо теорему Піфагора: $c^2 = a^2 + b^2$.

Для допитливих

Опорна задача

Якщо точки M і N належать відрізкам AB та CD відповідно і $AM : MB = CN : ND = n : m$, то

$$\overrightarrow{MN} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{BD}.$$



Доведення

1) $CN : ND = n : m \to \overrightarrow{MN} = \dfrac{n\overrightarrow{MD} + m\overrightarrow{MC}}{m+n}$;

2) $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$, тоді

$$\overrightarrow{MN} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{m+n}\left(m\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB}\right);$$

3) $AM : MB = n : m \to m\overrightarrow{AM} = n\overrightarrow{MB}$ і $m\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} = 0$, і шукана рівність виконується.

Суть методу векторів: записати мовою векторів геометричне розміщення точок, прямих, відрізків; і навпаки, мову векторних рівностей «перекласти» мовою геометрії.

Теорема. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

Нехай $ABCD$ – ромб (мал. 4.23). Треба довести, що $AC \perp BD$.

Доведення

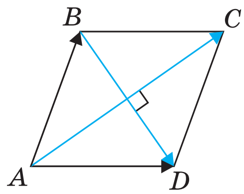
Маємо, що $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. Знайдемо скалярний добуток $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) =$$
$$= \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = 0,$$

бо довжини сторін ромба однакові.

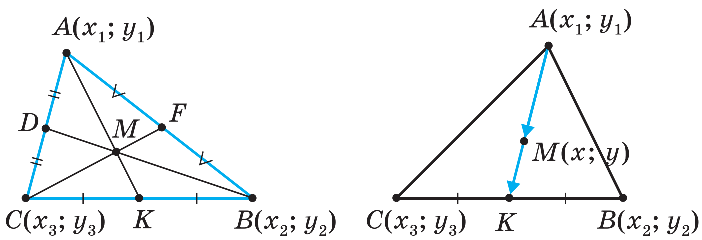
Ми довели, що $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, тоді $AC \perp BD$.

Теорему доведено.



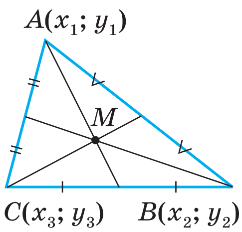
Мал. 4.23

Теорема. Якщо $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ – вершини трикутника ABC, то три медіани цього трикутника перетинаються в одній точці $M\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$, яка ділить кожну медіану у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини (мал. 4.24-а).



а) б)

Мал. 4.24



$M\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}; \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

Доведення

Нехай точка K – середина сторони BC трикутника ABC (мал. 4.24-б) і точка $M(x; y)$ – така точка медіани AK, що $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MK}$.

Вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MK}$ мають координати:

$$\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{x - x_1;\ y - y_1}) \text{ і } \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{\left(\frac{x_2 + x_3}{2} - x;\ \frac{y_2 + y_3}{2} - y\right)}.$$

Тоді з рівності $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MK}$ маємо:

$$x - x_1 = 2\left(\frac{x_2 + x_3}{2} - x\right) \text{ і } y - y_1 = 2\left(\frac{y_2 + y_3}{2} - y\right).$$

Звідси:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \text{ і } y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Повторюючи ті самі міркування для медіан BD і CF трикутника ABC, отримаємо, що точка з координатами

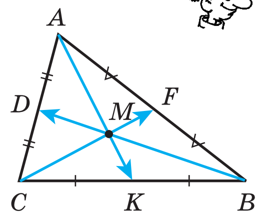
$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

належить усім медіанам трикутника ABC і поділяє їх у відношенні $2:1$, рахуючи від вершини.

Теорему доведено.

Наслідок. **Якщо AK, BD і CF – медіани трикутника ABC** (мал. на полі), **то виконуються такі рівності:**

$$\textbf{(1)}\ \overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CF}=\vec{0};$$
$$\textbf{(2)}\ \overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}=\vec{0};$$
$$\textbf{(3)}\ \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$



$\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$

$\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}=\vec{0}$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Перш за все зауважимо, що

$$\overrightarrow{MK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AK},\quad \overrightarrow{MD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD},\quad \overrightarrow{MF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CF};$$

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AK},\quad \overrightarrow{MB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BD},\quad \overrightarrow{MC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CF}.$$

Тому для доведення тверджень наслідку достатньо довести тільки твердження (1).

Розглянемо першу координату вектора $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CF}$. Вона дорівнює сумі відповідних координат векторів $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CF}$, тобто

$$\frac{x_2+x_3}{2}-x_1+\frac{x_1+x_3}{2}-x_2+\frac{x_1+x_2}{2}-x_3=0.$$

Аналогічно і друга координата цього вектора дорівнює нулю.

Повернемося до теореми про поділ відрізка у заданому відношенні, яку ми розглядали у § 1 (с. 14).

Особливість методу векторів: не вимагає розгляду складних геометричних конфігурацій, а зводить геометричну задачу до алгебраїчної, яку звичайно легше розв'язати, ніж початкову геометричну.

Теорема. **Якщо $A(x_1;\ y_1)$ та $B(x_2;\ y_2)$ – кінці відрізка AB і точка $C(x;\ y)$ ділить відрізок AB у відношенні $AC:CB=m:n$, то**

$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n};\quad y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}.$$

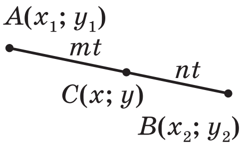
Доведення

Якщо $AC:CB=m:n$, то $|\overrightarrow{AC}|:|\overrightarrow{CB}|=m:n$ і $n\cdot\overrightarrow{AC}=m\cdot\overrightarrow{CB}$ (мал. 4.25).

Для допитливих

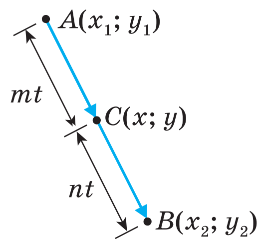
1. У трикутнику ABC точки E, F і D – середини сторін AC, AB і BC відповідно. Доведіть, що $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}=0$.

2. Скориставшись векторною формулою для середньої лінії чотирикутника (с. 164), знайдіть довжини відрізків, які сполучають середини протилежних сторін чотирикутника, якщо задано довжини всіх його сторін і градусні міри кутів, під якими перетинаються прямі, що містять його протилежні сторони.



$$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n}$$
$$y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}$$

Вектори $n\cdot\overrightarrow{AC}$ і $m\cdot\overrightarrow{CB}$ мають координати



Мал. 4.25

$$n\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{\left(n\left(x-x_1\right);\ n\left(y-y_1\right)\right)}\ \text{і}$$

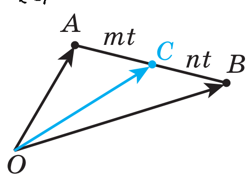
$$m\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{\left(m\left(x_2-x\right);\ m\left(y_2-y\right)\right)}.$$

З рівності правих частин цих співвідношень маємо систему:

$$\begin{cases} n(x-x_1)=m(x_2-x), \\ n(y-y_1)=m(y_2-y), \end{cases}$$

розв'язуючи яку відносно x і y, отримаємо шукані рівності.

Теорему доведено.

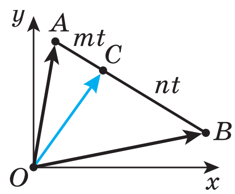


$$\overrightarrow{OC}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}$$

Наслідок 1. **Якщо точка C ділить відрізок AB у відношенні $m:n$, рахуючи від точки A, то**

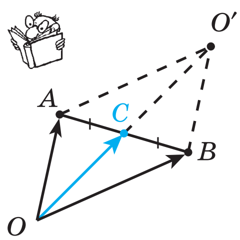
$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{m+n}(n\cdot\overrightarrow{OA}+m\cdot\overrightarrow{OB}).$$

Нехай вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ мають координати $\overrightarrow{OA}(x_A;\ y_A)$ і $\overrightarrow{OB}(x_B;\ y_B)$.



Мал. 4.26

Вектори $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ мають спільний початок – точку O (мал. 4.26). Паралельним перенесенням цих векторів відобразимо точку O в початок координат. (Як відомо, при паралельному перенесенні отримаємо вектор, рівний даному.) Тоді: $O(0;\ 0)$, $A(x_A;\ y_A)$, $B(x_B;\ y_B)$. За теоремою, доведеною вище, маємо



$$C\left(\frac{nx_A+mx_B}{m+n};\ \frac{ny_A+my_B}{m+n}\right)$$

$$\text{і}\ \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{\left(\frac{nx_A+mx_B}{m+n};\ \frac{ny_A+my_B}{m+n}\right)}=\frac{1}{m+n}(n\cdot\overrightarrow{OA}+m\cdot\overrightarrow{OB}).$$

Твердження доведено.

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$$

($BOAO'$ – паралелограм)

Наслідок 2. **У випадку, коли C – середина відрізка AB, тобто $m=n=1$,**

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

Зауваження. Останню формулу можна отримати і з продовження медіани OC трикутника AOB (див. мал. на полі).

Для допитливих

Розв'яжіть задачу векторним методом.

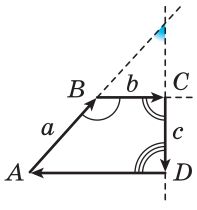
Дано довжини двох сторін паралелограма й однієї з його діагоналей. Знайдіть одну з тригонометричних функцій гострого кута цього паралелограма.

ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ ДЛЯ ЧОТИРИКУТНИКА

Квадрат сторони опуклого чотирикутника дорівнює сумі квадратів трьох інших його сторін без подвоєних добутків пар цих сторін на косинуси кутів між ними.

Доведення

Нехай маємо опуклий чотирикутник $ABCD$ (мал. 4.27). Тоді $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$. Якщо помножити цей вектор сам на себе, маємо:

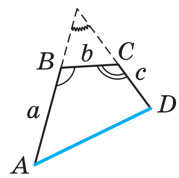


Мал. 4.27

$$|\overrightarrow{AD}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

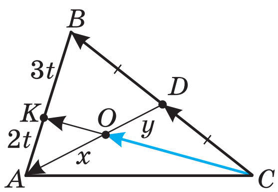
Звідси і випливає твердження теореми: $AD^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos(180° - \angle B) + 2bc\cos(180° - \angle C) + 2ac\cos(180° - a\hat{\ }c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos B - 2bc\cos C - 2ac\cos(a\hat{\ }c)$.

Теорема косинусів для чотирикутника



$AD^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos B - 2bc\cos C - 2ac\cos(a\hat{\ }c)$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ



Мал. 4.28

Опорна задача 1. У трикутнику ABC точка K ділить сторону AB у відношенні $AK : KB = 2 : 3$. У якому відношенні відрізок CK ділить медіану AD цього трикутника (мал. 4.28)?

Дано: $AK : KB = 2 : 3$, $BD = DC$.
Знайти: $AO : OD$.

Розв'язання

1) $AK : KB = 2 : 3 \Rightarrow \overrightarrow{CK} = \frac{1}{5}(3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB})$ (див. с. 174).

2) $\overrightarrow{CO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CK} \Rightarrow \overrightarrow{CO} = \lambda\overrightarrow{CK} = \frac{\lambda}{5}(3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB})$.

3) $AO : OD = x : y \Rightarrow \overrightarrow{CO} = \frac{1}{x+y}(y\overrightarrow{CA} + x\overrightarrow{CD}) = \frac{1}{x+y}(y\overrightarrow{CA} + x\frac{1}{2}\overrightarrow{CB})$.

4) $\frac{1}{x+y}\left(y\overrightarrow{CA} + x\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) = \frac{\lambda}{5}(3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{x+y} = \frac{3\lambda}{5}, \\ \frac{x}{2(x+y)} = \frac{2\lambda}{5}. \end{cases}$

5) Поділимо друге рівняння системи на перше: $\frac{x}{2y} = \frac{2}{3}$.

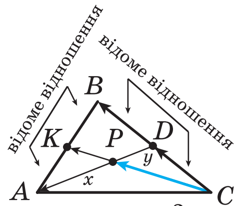
Чим займаються математики, як не порядком і відношенням?

Арістотель

Звідси: $x : y = 4 : 3$ і $AO : OD = 4 : 3$.

Відповідь: 4 : 3, рахуючи від вершини A.

Приклад 2. Медіани, проведені до сторін AB і AC трикутника ABC, взаємно перпендикулярні. Доведіть, що кут між цими сторонами менший за 45°.

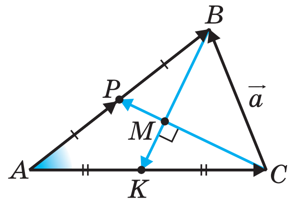


$x : y$ – ?

1) записати $\overrightarrow{CK}$ через $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CB}$;
2) $\overrightarrow{CP} = \lambda\overrightarrow{CK}$;
3) записати $\overrightarrow{CP}$ через $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{CA}$, а $\overrightarrow{CD}$ через $\overrightarrow{CB}$;
4) порівняти $\overrightarrow{CP}$ з п. 2 і п. 3.

Доведення

1) Кут A трикутника ABC збігається з кутом між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ (мал. 4.29).



Мал. 4.29

2) $\angle BKA > 90°$ як зовнішній кут трикутника MKC. Тоді з трикутника ABK маємо, що кут A – гострий.

3) Позначимо вектори $\overrightarrow{AB} \triangleq \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} \triangleq \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} \triangleq \vec{a}$. Точки P і K ділять відрізки AB і AC навпіл. Тому (с. 174):

$$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a}), \quad \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(-\vec{c} - \vec{a}).$$

4) Враховуючи, що $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$, знайдемо скалярний добуток $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BK}$:

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}(-2\vec{b} + \vec{c}) \cdot \frac{1}{2}(-2\vec{c} + \vec{b}) = \frac{1}{4}(5\vec{b} \cdot \vec{c} - 2\vec{b}^2 - 2\vec{c}^2).$$

За умовою $\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{BK}$. Тоді $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BK} = 0$ і $5\vec{b} \cdot \vec{c} = 2\vec{b}^2 + 2\vec{c}^2$. Звідси:

$$\cos A = \frac{2}{5} \cdot \frac{b^2 + c^2}{bc} = \frac{2}{5}\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geqslant \frac{4}{5},$$

бо середнє арифметичне двох додатних чисел не більше за їхнє середнє геометричне.

Математика – жриця означеності та ясності.

Й. Ф. Гербарт

5) Маємо $\cos A \geqslant \frac{4}{5} > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тоді $\cos A > \cos 45°$. На проміжку від 0° до 90° більшому куту відповідає менше значення косинуса, тоді $\angle A < 45°$. Щ. в. д.

Мій потяг до математичних наук передусім пояснюється моєю відразою до лицемірства.

Стендаль

Приклад 3. Доведіть, що сума квадратів усіх сторін чотирикутника дорівнює сумі квадратів його діагоналей плюс квадрат подвоєної відстані між серединами діагоналей.

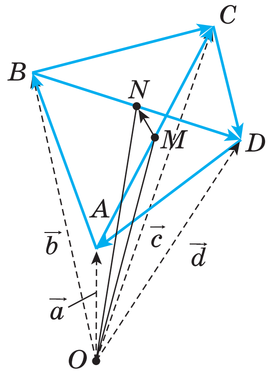
Дано: $ABCD$, $BN = ND$, $AM = MC$ (мал. 4.30).

Довести: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + (2MN)^2$.

Для допитливих

Розв'яжіть задачу векторним методом.

У ромбі $ABCD$ діагоналі $AC = 2a$ і $BD = 2b$ перетинаються в точці O. На діагоналях AC і BD позначили відповідно точки M і K так, що $OM = \frac{b^2}{2a}$ і $OK = \frac{b}{2}$. Знайдіть кут, який утворюють при перетині прямі CK і DM.



Мал. 4.30

Доведення

Розглянемо точку O поза чотирикутником $ABCD$.

Позначимо:

$\overrightarrow{OA} \triangleq \vec{a}, \overrightarrow{OB} \triangleq \vec{b}, \overrightarrow{OC} \triangleq \vec{c}, \overrightarrow{OD} \triangleq \vec{d}$.

1) $\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \vec{c}-\vec{b}=\overrightarrow{BC}, \vec{d}-\vec{c}=\overrightarrow{CD}$, $\vec{a}-\vec{d}=\overrightarrow{DA}$;

2) $\vec{c}-\vec{a}=\overrightarrow{AC}, \vec{d}-\vec{b}=\overrightarrow{BD}$;

3) точки M і N – середини діагоналей AC і BD, тоді

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}),\ \ \overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d});$$

4) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d})-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$,

тоді $2\overrightarrow{MN}=\vec{b}+\vec{d}-\vec{a}-\vec{c}$;

5) з (1), (2) і (4) маємо, що треба довести співвідношення:

$|\vec{b}-\vec{a}|^2+|\vec{c}-\vec{b}|^2+|\vec{d}-\vec{c}|^2+|\vec{a}-\vec{d}|^2=$

$=|\vec{c}-\vec{a}|^2+|\vec{d}-\vec{b}|^2+|\vec{b}-\vec{a}+\vec{d}-\vec{c}|^2$, тобто

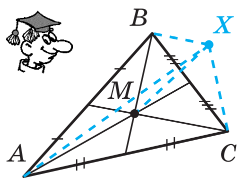
$|\vec{c}-\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{d}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2+|\vec{d}-\vec{b}|^2+2(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{d}-\vec{c})$.

Якщо використати те, що скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, то легко переконатися в тому, що останнє співвідношення виконується.

Найбільше математика корисна тим, що безпосередньо сприяє розвиткові чіткого мислення і духу відкриття.

Й. Ф. Гербарт

Теорема Лейбніца



$XA^2+XB^2+XC^2=$
$=3XM^2+AM^2+$
$+BM^2+CM^2$

Приклад 4. Теорема Лейбніца. **Сума квадратів відстаней від будь-якої точки X площини трикутника ABC до вершин цього трикутника і до його центроїда M пов'язана співвідношенням:**

$$\mathbf{XA^2+XB^2+XC^2=3XM^2+AM^2+BM^2+CM^2.}$$

Доведення

1) $\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{XB}=\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MC}$.

2) Піднесемо ці рівності до скалярного квадрата і додамо почленно:

$$XA^2+XB^2+XC^2=3XM^2+MA^2+MB^2+MC^2+$$
$$+\,2\overrightarrow{XM}\,(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}).$$

Врахуємо, що $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ (див. с. 173), тоді маємо шукане співвідношення.

Зауваження. Спробуйте для порівняння довести цю теорему іншим способом.

Завдання 32

1. У колі з центром O провели дві перпендикулярні хорди AB і CD, що перетинаються в точці M. Виразіть $\overrightarrow{OM}$ через $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OD}$.

2. У трикутнику ABC: $\angle A=90°$, $AB=6$, $AC=8$, AM і BN – бісектриси кутів A і B. Знайдіть косинус кута між AM і BN.

3. $ABCD$ – прямокутник, у якого $AB=CD=2a$, $AD=BC=5a$. Точка $K \in AD$, $AK=a$. Доведіть, що $\angle BKC=90°$.

4. Медіани бічних сторін рівнобедреного трикутника перетинаються під кутом 60°. Знайдіть кут при вершині трикутника.
5. Дано паралелограм $ABCD$ і точку M у його площині. Відомо, що $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+$ $+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$. Доведіть, що M – точка перетину діагоналей паралелограма.
6. У ромбі $ABCD$ довжина сторони дорівнює 6, а кут BAD дорівнює 60°. На стороні BC взято точку E таку, що $EC = 2$. Знайдіть відстань від точки E до центра симетрії ромба.
7. У трикутнику ABC дано: $AB = BC$; D – середина сторони AC; $DK \perp BC$; M – середина відрізка DK. Доведіть, що AK і BM взаємно перпендикулярні.
8. За допомогою скалярного добутку векторів доведіть, що висоти трикутника перетинаються в одній точці.
9. Нехай H – ортоцентр трикутника ABC, O – центр описаного навколо нього кола. Доведіть, що $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.
10. Нехай O – центр кола, описаного навколо трикутника ABC, а точка H така, що виконується рівність $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. Доведіть, що H – ортоцентр трикутника ABC.
11. У рівносторонній трикутник вписано коло. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин трикутника не залежить від вибору точки на колі.
12. Навколо рівностороннього трикутника описано коло. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин трикутника не залежить від вибору точки на колі.
13. У квадрат вписано коло. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин квадрата не залежить від вибору точки на колі.
14. Навколо квадрата описано коло. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин квадрата не залежить від вибору точки на колі.
15. У трикутнику ABC бісектриса AD ділить сторону BC у відношенні $BD : CD = 1 : 2$. В якому відношенні медіана CE ділить цю бісектрису?
16. $ABCD$ – довільний чотирикутник, KL і MN – відрізки, що сполучають середини його протилежних сторін, φ – кут між діагоналями. Доведіть, що виконується співвідношення $(AB^2 + CD^2) - (AD^2 + BC^2) = 2(KL^2 - MN^2) = 2AC \cdot BD \cdot \cos\varphi$.
17. Швидкість течії річки $v_р$. Швидкість плавця в стоячій воді – $v_п$. Плавець має намір перепливти річку так, щоб його найменше знесло течією. Як йому пливти?
18. $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ – правильний багатокутник. Точка M – точка вписаного у багатокутник кола. Доведіть, що $MA_1^2 + MA_2^2 + \ldots + MA_n^2$ – не залежить від вибору точки на колі.
19. $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ – правильний багатокутник. Точка M – точка описаного навколо багатокутника кола. Доведіть, що $MA_1^2 + MA_2^2 + \ldots + MA_n^2$ не залежить від вибору точки на колі.
20. Доведіть, що сума квадратів усіх сторін і всіх діагоналей вписаного правильного n-кутника дорівнює n^2R^2, де R – радіус кола, описаного навколо багатокутника.

Завдання для повторення розділу IV

1°. Наведіть приклади векторних і скалярних величин.
2*. Що математики називають вектором і чим їхнє означення вектора відрізняється від поняття вектора у фізиці?
3. Які вектори називають колінеарними?

Для допитливих

Розв'яжіть задачу векторним методом.

У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) $AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Доведіть, що медіани AK і CM взаємно перпендикулярні.

4°. Що таке модуль вектора?

5. Чи завжди є правильним таке твердження: «Якщо модулі двох векторів рівні, то ці вектори рівні»? Наведіть приклади.

6°. Чим відрізняються протилежно напрямлені вектори? Наведіть приклад.

7°. Наведіть приклад: **а)** співнапрямлених векторів; **б)** протилежно напрямлених векторів; **в)** рівних векторів.

8. Сформулюйте означення рівності векторів.

9*. Сформулюйте два означення рівності векторів. Чи є вони рівносильними? Відповідь обґрунтуйте.

10°. Наведіть приклад множення одного й того самого вектора на число: **а)** 2; **б)** –2. Чи будуть рівними модулі цих векторів?

11°. Наведіть приклади додавання двох колінеарних: **а)** однаково напрямлених векторів; **б)** протилежно напрямлених векторів.

12°. Наведіть приклади віднімання двох колінеарних: **а)** однаково напрямлених векторів; **б)** протилежно напрямлених векторів.

13. Наведіть приклади: **а)** додавання двох неколінеарних векторів; **б)** віднімання двох неколінеарних векторів.

14. Дано паралелограм $KMHP$. Знайдіть: **а)** різницю векторів $\overrightarrow{KM}$ і $\overrightarrow{PH}$; **б)** суму векторів $\overrightarrow{KM}$ і $\overrightarrow{HP}$.

15. Дано чотирикутник $ABCD$. Знайдіть суму векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$.

16. Знайдіть суму векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{MP}$ і $\overrightarrow{BK}$.

17. Дано паралелограм $CMET$. Розкладіть вектор $\overrightarrow{CE}$ за векторами: **а)** $\overrightarrow{CM}$ і $\overrightarrow{CT}$; **б)** $\overrightarrow{MC}$ і $\overrightarrow{TC}$; **в)** $\overrightarrow{MC}$ і $\overrightarrow{CT}$.

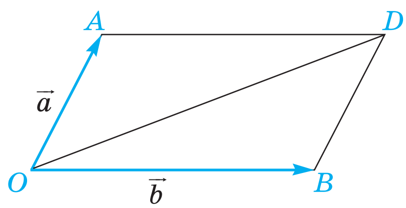
18*. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O. Розкладіть за векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ вектор: **а)** $\overrightarrow{OA}$; **б)** $\overrightarrow{OC}$; **в)** $\overrightarrow{BD}$; **г)** $\overrightarrow{OB}$.

19. На малюнку 4.31 дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Побудуйте вектор: **а)** $\vec{a} + \vec{b}$; **б)** $\vec{a} - \vec{b}$; **в)** $\vec{a} + 0{,}5\vec{b}$; **г)** $\vec{b} - 0{,}5\vec{a}$; **д)** $0{,}5\vec{a} + 1/3\vec{b}$.

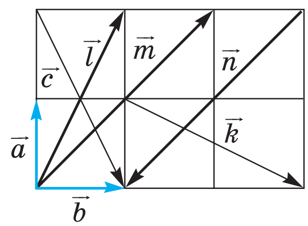
20*. На малюнку 4.32 дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайдіть вектори: $\vec{c}$, $\vec{l}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{k}$.

21°. Що можна сказати про координати рівних векторів?

22°. Запишіть формулу для знаходження модуля вектора, якщо відомі його координати.



Мал. 4.31



Мал. 4.32

23°. Як знайти: **а)** добуток вектора на число, якщо відомі його координати; **б)** суму, різницю і скалярний добуток двох векторів, якщо відомі їхні координати?

24. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, запишіть його через координатні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ і знайдіть його модуль, якщо:

а) $A(-7; 2)$, $B(5; 7)$; **в)** $A(0; 5)$, $B(-3; 1)$;
б) $A(4; 4)$, $B(7;0)$; **г)** $A(-2; 1)$, $B(6; 3)$.

Для допитливих

Розв'яжіть задачу векторним методом.

У трикутнику ABC на сторонах AB і BC позначили відповідно точки K і D так, що $AK : KB = 3 : 1$ і $BD : DC = 3 : 1$. Відрізки AD і CK перетинаються в точці O. Знайдіть відношення $KO : OC$ і $AO : OD$.

25. При якому значенні n вектори: **а)** $\vec{a}(n;\ 1)$ і $\vec{b}(3;\ 9)$; **б)** $\vec{a}(n;\ 4)$ і $\vec{b}(9;\ n)$ колінеарні і як вони при цьому напрямлені?

26. При якому значенні β вектори $\vec{a}(3;\ 4)$ і $\vec{b}(\beta;\ -2)$:
а) колінеарні; **б)** перпендикулярні; **в)** мають однакові модулі?

27*. Знайдіть значення x, при якому кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $60°$, якщо $\vec{a}(4;\ -3)$, $\vec{b}(1;\ x)$.

28*. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ – прямокутник, якщо: **а)** $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$, $C(0;\ 4)$, $D(-1;\ 2)$; **б)** $A(-3;\ -1)$, $B(-2;\ -4)$, $C(4;\ -2)$, $D(3;\ 1)$.

29. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}(1;\ -3)$ і $\vec{b}(2;\ 4)$.

30. Знайдіть косинус кута ABC, якщо $A(4;\ 2)$, $B(3;\ -1)$, $C(-1;\ 1)$.

31. Знайдіть косинуси кутів трикутника з вершинами в точках:
а) $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 1)$, $C(4;\ 5)$; **б)** $A(0;\sqrt{3})$, $B(2;\sqrt{3})$, $C\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

32. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $120°$. Відомо, що $|\vec{a}| = 4$ і $|\vec{b}| = 3$. Знайдіть:
а) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; **б)** $(3\vec{a}+2\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$; **в)** $|4\vec{a}-3\vec{b}|$.

33*. Доведіть векторним методом, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

34.** Доведіть векторним методом, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

Готуємося до тематичного оцінювання № 6

Варіант I

1. Знайдіть координати і модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(0;\ 2)$, $B(-1;\ 3)$.
2. Косинус кута, утвореного векторами $\vec{a}(x;\ 2)$ і $\vec{b}(0;\ 1)$, дорівнює 0,5. Знайдіть x.
3. Знайдіть координати точки D, якщо $A(-1;\ -1)$, $B(4;\ 5)$, $C(-2;\ 1)$ і $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
4. Знайдіть $3\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{a} + \vec{b}$, якщо:
   а) $\vec{a}(2;\ 4)$, $\vec{b}(6;\ 2)$; **б)** $\vec{a}(-3;\ 1)$, $\vec{b}(3;\ -3)$.
5. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ – прямокутник, якщо $A(-5;\ -1)$, $B(-3;\ -4)$, $C(3;\ 0)$, $D(1;\ 3)$.

Варіант II

1. Знайдіть координати і модуль вектора $\overrightarrow{CD}$, якщо $C(-2;\ 0)$, $D(1;\ 2)$.
2. Знайдіть косинус кута, утвореного векторами $\vec{a}(1;\ 2)$ і $\vec{b}(-1;\ 1)$.
3. Вектори $\vec{a}(-3;\ 2)$ і $\vec{b}(6;\ x)$ колінеарні. Знайдіть x.
4. Знайдіть $3\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{a} + \vec{b}$, якщо:
   а) $\vec{a}(2;\ -3)$, $\vec{b}(4;\ 0)$; **б)** $\vec{a}(4;\ 1)$, $\vec{b}(-2;\ 5)$.
5. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ – ромб, якщо $A(3;\ 3)$, $B(-2;\ 3)$, $C(-5;\ -1)$, $D(0;\ -1)$.

Для допитливих

1. Дано паралелограм $ABCD$. Пряма l перетинає прямі AB, AC і AD відповідно в точках B_1, C_1 і D_1. Доведіть, якщо $\overrightarrow{AB_1} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD_1} = n\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC_1} = m\overrightarrow{AC}$, то $\dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n}$.

2. Точка I – інцентр трикутника ABC, W_1, W_2, W_3 – точки перетину продовження його бісектриси з описаним навколо цього трикутника колом, центром якого є точка O. Доведіть, що $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OW_1} + \overrightarrow{OW_2} + \overrightarrow{OW_3}$.

Розділ V
ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ІЗ СТЕРЕОМЕТРІЇ

У цьому розділі ви ознайомитеся із стереометрією – розділом геометрії, що вивчає фігури у просторі («стереос» у перекладі з грецької – *просторовий*, а «метріо» – *вимірюю*). Докладніше цю науку ви вивчатимете у старших класах. Але вже зараз ви дізнаєтеся про її основи, про те, які бувають багатогранники і тіла обертання, та про деякі їхні властивості.

§ 28. Основні засади побудови стереометрії

Предметом вивчення в стереометрії є просторові форми – *тривимірні* геометричні фігури.

Так само як і планіметрія, стереометрія є математичною наукою і вивчає фігури *абстрактно*, тобто незалежно від їхнього наповнення конкретним змістом. Проте основою такого абстрагування є реальний світ. Про це свідчать самі назви просторових геометричних форм. Так, слово *сфера* походить від грецького «м'яч»; *куб* – від «гральна кістка»; *циліндр* – від «коток»; *призма* – від «розпиляна»; *конус* – від «соснова шишка», «кегля», «верхівка шолома»; *пірамідою* стародавні єгиптяни називали свої споруди – гробниці фараонів.

Стереометрія вивчає фігури у просторі абстрактно, на основі дедуктивного методу.

Стереометрія, як і планіметрія, *узагальнює й абстрагує практичний досвід* людини і на основі *дедуктивного методу*, тобто ланцюжка логічних переходів від умови до висновку, вивчає властивості просторових фігур.

Логічна схема побудови стереометрії така сама, як і планіметрії:
1) основні поняття;
2) аксіоми;
3) означення інших фігур та доведення інших тверджень.

Логічна схема побудови стереометрії така сама, як і планіметрії.

1. Приймаємо основні поняття.
2. Приймаємо аксіоми.
3. Іншим геометричним фігурам даємо означення, спираючись на вже відомі поняття.
4. Інші твердження про властивості геометричних фігур, крім прийнятих аксіом, вимагають доведення.

Основними фігурами в стереометрії, які прийнято як поняття без означення, є: точка, пряма, площина і простір. Зрозуміло, що на малюнках зображають тільки частини площини і прямої. Площини позначають грецькими літерами: α, β, δ, γ, φ та іншими.

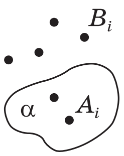
Аксіоми стереометрії, як і планіметрії, не є вільним витвором математиків, а здобуті людством у процесі багатовікового досвіду і відбивають реальну дійсність. Перша аксіома відображає те, що стереометрія ґрунтується на планіметрії.

А–1. **На площині виконуються всі твердження планіметрії.**

Аксіома 1. **У просторі існують площини. На кожній площині виконуються всі аксіоми і теореми планіметрії.**

Тобто система аксіом стереометрії складається з аксіом планіметрії, до яких додаються ще три аксіоми простору.

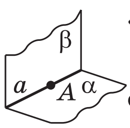
А–2.



Існують:
$\{A_i\} \in \alpha$
$\{B_i\} \notin \alpha$

Аксіома 2. **Яка б не була площина, існують точки, які належать цій площині, і точки, які не належать їй.**

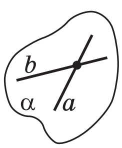
А–3.



$\begin{cases} A \in \alpha \\ A \in \beta \end{cases}$
$\Downarrow$
$\alpha \cap \beta = a$
$\uparrow$
пряма

Аксіома 3. **Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються, і причому – по прямій.**

А–4.



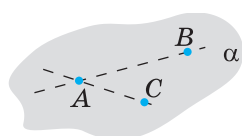
$a \cap b$
$\Downarrow$
$\{a; b\} \in \alpha$
$\uparrow$
єдина

Аксіома 4. **Якщо дві різні прямі мають одну спільну точку, то через них можна провести площину, і до того ж тільки одну.**

Усі інші твердження про властивості просторових фігур вимагають доведення. Розглянемо приклад доведення теорем у стереометрії.

Теорема. **Через три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину.**

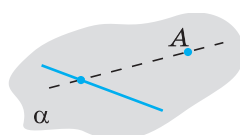
Нехай дано три точки A, B і C (мал. 5.1). Треба довести, що існує площина, в якій лежать ці точки.



Мал. 5.1

Доведення

1) Проведемо прямі AB і AC. За умовою точки A, B і C не лежать на одній прямій, тоді прямі AB і AC не збігаються.
2) За аксіомою через прямі AB і AC можна провести площину.



Мал. 5.2

Теорему доведено.

Нагадаємо:
{ } – знак множини;
∈ – «належить»;
∉ – «не належить»;
∩ – «перетинає»;
⇒ – «тоді».

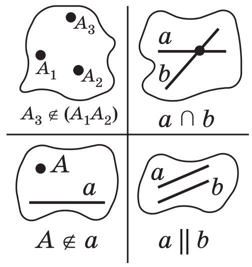
Аналогічно доводять таку теорему. **Через пряму і точку поза нею можна провести площину** (мал. 5.2).

Площину можна провести (і до того ж тільки одну):
- через три точки, що не лежать на одній прямій (теорема);
- через дві прямі, що перетинаються (аксіома 4);
- через пряму і точку поза нею (теорема);
- через дві паралельні прямі (з означення паралельних прямих).

Аналогічно тому, як ми це робили у планіметрії, *розв'язування стереометричних задач здійснюють логічними кроками, спираючись на аксіоми і теореми стереометрії та планіметрії, твердження умови або факти, доведені у процесі розв'язування*.

Прикладом запису такого розв'язування є доведення теореми, наведене вище.

Площину **можна** провести, і до того ж **тільки одну**, через:



Практична робота 39

1. У невеликий аркуш картону вколіть дві голки, де позначте точки A і B. Проведіть на картоні пряму AB.
2. Спробуйте встановити на столі отриману конструкцію так, щоб вона трималася тільки на вколотих вами голках.
3. Уколіть ще одну голку поза прямою AB.
4. Виконайте пункт 2.
5. Що ви спостерігаєте?
6. Переколіть третю голку так, щоб вона була на прямій AB.
7. Виконайте пункт 2.
8. Зробіть висновки.

Завдання 33

1°. Стіл із чотирма ніжками, який стоїть на рівній підлозі, інколи хитається, а стіл з трьома ніжками завжди стоїть стійко. Як пояснити цей факт?

2°. Які з наведених тверджень правильні: **а)** будь-які дві точки простору завжди лежать на одній прямій; **б)** будь-які три точки простору лежать на одній прямій; **в)** сторони прямого кута лежать в одній площині?

3. Чому в аксіомі 3 не сказано, що пряма, по якій перетинаються дві площини, обов'язково проходить через їхню спільну точку?

4. Чи однакові за змістом такі висловлювання: «площини α і β перетинаються»; «площини α і β мають спільну точку»?

5. Поясніть, що означають такі висловлювання: «можна провести площину»; «можна провести тільки одну площину».

6*. Які з висловлювань однакові за змістом: «існує точка»; «існує одна точка»; «існує не менше як одна точка»; «існує не більше як одна точка»?

7. Скільки площин можна провести через: **а)** дану точку простору; **б)** дві дані точки простору; **в)** три дані точки простору? Відповідь обґрунтуйте.

8. У якому випадку через пряму і точку можна провести більше як одну площину?

9. Три точки у просторі розміщено так, що через них провели 100 різних площин. Що можна сказати про ці точки?

10. Чому двері, які кріпляться на двох петлях, треба фіксувати на замок?

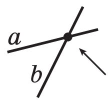
11. Чи можна через дві довільні точки провести площину? Чому?

12*. Чи можна через точку перетину двох даних прямих провести третю пряму, яка не лежить з ними в одній площині? Поясніть відповідь.

§ 29. Взаємне розміщення прямих і площин у просторі. Перпендикуляр до площини

Прямі *a* і *b*:

1) перетинаються

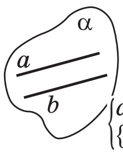


$a \cap b$

точка перетину (одна)

2) паралельні

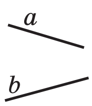
$a \parallel b$



$\begin{cases} a \not\cap b \\ \{a; b\} \in \alpha \end{cases}$

3) мимобіжні

$a \dotminus b$



$\begin{cases} a \not\cap b \\ \{a; b\} \notin \alpha \end{cases}$

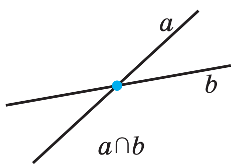
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ

Дві різні прямі на площині або перетинаються, або паралельні. У просторі можливі три випадки взаємного розміщення двох різних прямих.

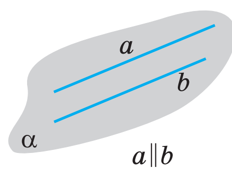
1. *Дві прямі перетинаються* – мають одну спільну точку (мал. 5.3).

2. *Дві прямі паралельні* – не мають спільних точок і лежать в одній площині (мал. 5.4).

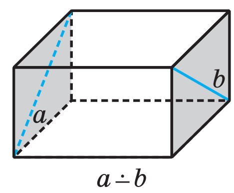
3. *Дві прямі* не мають спільних точок, і через них не можна провести площину (мал. 5.5). Їх *називають мимобіжними* і позначають: $a \dotminus b$.



Мал. 5.3



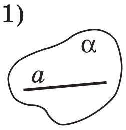
Мал. 5.4



Мал. 5.5

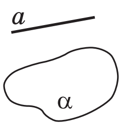
Пряма *a* і площина α:

1)



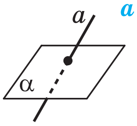
$a \in \alpha$

2)



$a \parallel \alpha$

3)



$a \cap \alpha$

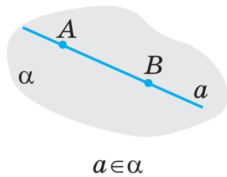
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

У просторі можливі три випадки взаємного розміщення прямої і площини.

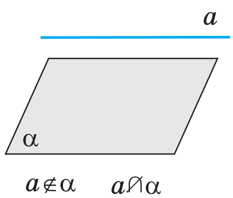
1. *Пряма лежить у даній площині* (мал. 5.6).

2. *Пряма паралельна даній площині* – пряма і площина не мають спільних точок (мал. 5.7).

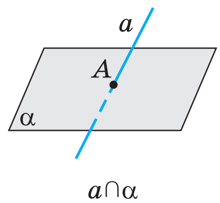
3. *Пряма перетинає площину* – пряма і площина мають одну спільну точку (мал. 5.8).



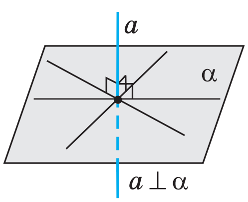
Мал. 5.6



Мал. 5.7



Мал. 5.8



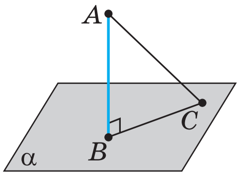
Мал. 5.9

Пряма, що перетинає площину, називається перпендикулярною до цієї площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої цієї площини (мал. 5.9).

Перпендикуляром, опущеним з даної точки *A* на площину α, називається відрізок перпендикулярної до цієї площини прямої *AB*, що має за

Нагадаємо:
$\cap$ – «перетинає»;
$\not\cap$ – «не перетинає».

кінці точку A і точку перетину вказаної прямої із заданою площиною – *основою перпендикуляра* (точка B на мал. 5.10).



$AB \perp \alpha$

Мал. 5.10

Відрізок, що сполучає точку A з будь-якою іншою точкою C площини α (окрім основи перпендикуляра B), називається *похилою*, проведеною з даної точки A до площини α.

При цьому точка C називається *основою похилої*, а відрізок BC – *проекцією похилої* AC на площину α.

Відстанню від точки до площини називається довжина перпендикуляра, опущеного з цієї точки на дану площину (довжина AB).

Корисно ще знати ознаку перпендикулярності прямої і площини.

Ознака. **Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих цієї площини, що перетинаються.**

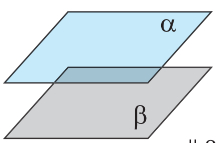
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПЛОЩИН

У просторі можливі тільки два випадки взаємного розміщення двох різних площин.

1. *Площини паралельні* – не мають спільних точок (мал. 5.11).

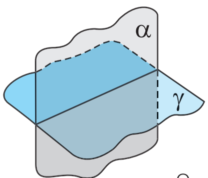
2. *Площини перетинаються* – за аксіомою маємо, що дві площини перетинаються по прямій (мал. 5.12).

Дві площини називаються перпендикулярними, якщо площина, перпендикулярна до лінії перетину даних площин, перетинає їх по перпендикулярних прямих (мал. 5.13).



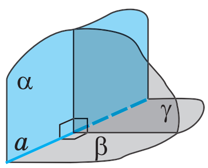
$\alpha \parallel \beta$

Мал. 5.11



$\alpha \cap \gamma$

Мал. 5.12

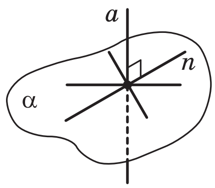


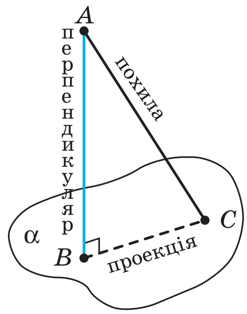
$\alpha \perp \beta$

Мал. 5.13

Означення $a \perp \alpha$:

якщо $a \perp n$
↑
довільна в α

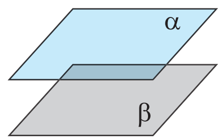




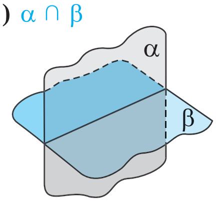
C – основа похилої,
B – основа перпендикуляра,
AB – відстань від A до α

Площини α і β:

1) $\alpha \parallel \beta$



2) $\alpha \cap \beta$



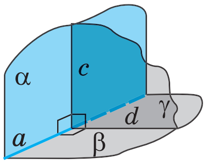
Для допитливих

1. Уявімо, що земну кулю вздовж екватора щільно обв'язали шнуром. Потім довжину цього шнура збільшили на 1 м так, що він по всій своїй довжині рівновіддалений від поверхні Землі. Чи може в утворений простір під шнуром пролізти миша?

2. А тепер, збільшивши довжину шнура, як і в попередній задачі, в якомусь місці екватора «відтягнемо» шнур на максимально можливу відстань від поверхні Землі. Чи зможе тепер під шнуром пройти слон?

Зауваження. Радіус земної кулі дорівнює приблизно 6400 км.

Означення $\alpha \perp \beta$:

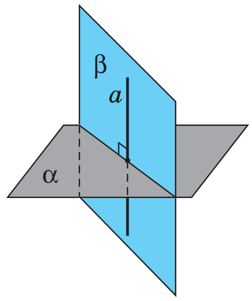


якщо $\gamma \perp a$ і $c \perp d$
($c = \gamma \cap \alpha$; $d = \gamma \cap \beta$)

Корисно знати ще й *ознаку перпендикулярності двох площин.*

О з н а к а. **Дві площини взаємно перпендикулярні, якщо одна з них містить пряму, перпендикулярну до другої площини** (мал. 5.14).

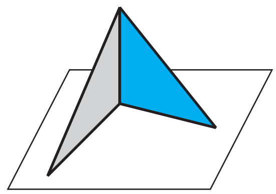
На малюнку пряма a належить площині β, і причому $a \perp \alpha$. Тоді $\beta \perp \alpha$.



Мал. 5.14

Практична робота 40

1. Сумістіть два косинці по одному з їхніх катетів так, щоб самі косинці не збігалися, і розмістіть конструкцію на аркуші паперу (мал. 5.15). Що можна сказати про пряму, яка містить спільну сторону цих косинців відносно до аркуша паперу?
2. Візьміть два аркуші картону й один косинець. Спробуйте за допомогою косинця розмістити один аркуш перпендикулярно до другого. Чи вдалося вам це зробити?
3. Візьміть два аркуші картону і два косинці. Спробуйте за допомогою косинців розмістити один аркуш перпендикулярно до другого. Чи вдалось вам це зробити?
4. Зробіть висновок.
5. Укажіть пряму, яка лежить у площині одного з аркушів і перпендикулярна до другого аркуша картону.



Мал. 5.15

Для допитливих

ПРО ЗОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ФІГУР

Креслення фігури у планіметрії є або точною копією оригіналу, або подібною до неї фігурою. Зовсім інакше зображають просторові фігури. На жаль, не існує «просторового» олівця, який залишав би лінії у просторі. Не можна на площину паперу скопіювати куб або фігуру, подібну до нього, – плоске зображення не може бути точною копією просторової фігури. Виникає проблема: за якими правилами будувати зображення просторової фігури, щоб воно найкраще відтворювало оригінал?

Для побудови зображень фігур у стереометрії використовують *метод паралельних проекцій*. Наприклад, учитель креслить на дошці і каже: «Це куб». Але на дошці не куб, а зображення куба. А де сам куб? Він начебто міститься десь над головами учнів, через його вершини і точки ребер проходять паралельні між собою проектуючі прямі, які при перетині з площиною дошки дають зображення куба.

У старших класах ви будете вивчати *паралельне проектування*, а зараз ми лише наведемо його *властивості, за якими зображають просторові фігури.*

1. Зображенням прямої є пряма або точка.

2. Паралельні прямі зображуються паралельними прямими, або прямими, що збігаються, або точками (кожна – однією точкою).

3. Відношення, в якому точка ділить відрізок у зображенні й оригіналі, однакові.

Властивість (3) означає, наприклад, що середина відрізка зображається серединою відрізка-проекції.

Прямі, перпендикулярні до заданої площини, намагаються зображати вертикальними прямими (див. мал. 5.9, 5.10).

Завдання 34

1°. Як треба розуміти, що прямі a і b у просторі не паралельні?

2°. Що можна сказати про прямі a і b, якщо вони: **а)** не мимобіжні; **б)** не перетинаються?

3°. Дано дві прямі, але через них не можна провести площину. Чи перетинаються ці прямі? Відповідь обґрунтуйте.

4. Чи правильне твердження: «Якщо прямі a і b лежать у різних площинах і не перетинаються, то вони мимобіжні»?

5. Чи правильне таке твердження для простору: «Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу»? Відповідь проілюструйте на моделі.

6. Чи може пряма перетинати дві сторони трикутника і не лежати в площині цього трикутника?

7*. Доведіть, що прямі у просторі не можуть перетинатися більш як в одній точці.

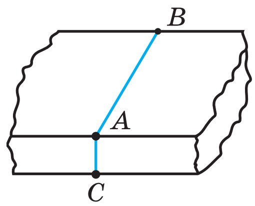
8. Скільки прямих, паралельних даній площині, можна провести через задану точку поза цією площиною?

9. Чи може бути, що десять прямих площини α паралельні площині β, але площини α і β не паралельні? Відповідь проілюструйте.

10*. Чи правильні у стереометрії такі твердження: **а)** через точку, яка лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до заданої прямої; **б)** прямі, перпендикулярні до заданої прямої, паралельні між собою; **в)** якщо прямі, що перетинаються, не паралельні двом даним перпендикулярним прямим, то вони не перпендикулярні між собою?

11°. Знайдіть серед навколишніх предметів моделі прямих і площин, які перпендикулярні між собою.

12. Щоб розріз дерев'яного бруска був перпендикулярний до цього бруска, через точку A його ребра проводять перпендикулярні до ребра прямі AB і AC (мал. 5.16). Потім брусок розпилюють по цих прямих. Поясніть ці дії.



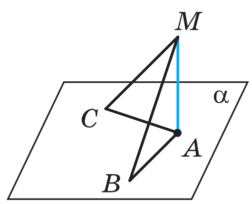
Мал. 5.16

13*. Доведіть, що коли пряма не лежить у площині, то вона не може мати з цією площиною двох або більше спільних точок.

14*. На малюнку 5.17 точки A, B, C лежать у площині α, $MA \perp \alpha$, $MB = MC$. Доведіть, що $AC = AB$.

15*. Чи існує пряма, розділена на дві півпрямі так, що одна півпряма лежить у площині α, а друга – у площині β? Відповідь проілюструйте.

16*. Кожна з площин α і β проходить через точки A, B, і C. Чи можна зробити висновок, що α і β – одна й та сама площина? Відповідь обґрунтуйте.



Мал. 5.17

17*. Чи правильне таке твердження: «Дві площини, паралельні одній і тій самій прямій, паралельні між собою»?

18. Чи може пряма перетинати одну з паралельних площин, але не перетинати другу площину? Відповідь проілюструйте моделлю з двох аркушів паперу та олівця.

19°. Покажіть в оточенні два прямих кути зі спільною стороною, але які не є суміжними.

20. Знайдіть навколо вас: **а)** дві паралельні площини; **б)** дві перпендикулярні площини і покажіть лінію їх перетину.

21. Чи правильним є твердження: «Якщо площина перпендикулярна до даної площини, то вона перпендикулярна і до будь-якої прямої цієї площини»? Відповідь проілюструйте моделлю (з двох аркушів паперу).

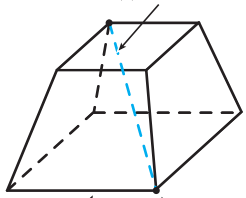
22. На двох перпендикулярних площинах вибрали по прямій. Чи можуть ці прямі бути мимобіжні? Відповідь проілюструйте прикладом з оточення.

23*. Як практично встановити, чи перпендикулярна площина стіни до площини підлоги?

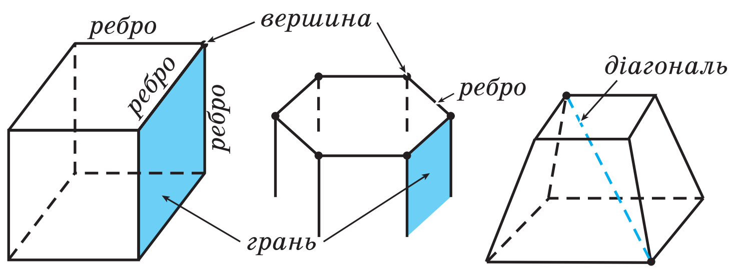
24*. Використовуючи ознаку перпендикулярності двох площин, доведіть, що площина стіни перпендикулярна до площини підлоги.

§ 30. Багатогранники. Правильні багатогранники

Ще у 5–6-х класах ви вивчали куб, прямокутний паралелепіпед, піраміду. Всі ці фігури – багатогранники. Серед усього, що оточує людину, можна побачити багато *багатогранників*. Таку геометричну фігуру можна визначити як внутрішню частину простору, що обмежена багатокутниками, які називаються *гранями* багатогранника. Сторони кожної грані – *ребра багатогранника,* а вершини – *вершини багатогранника*.



Діагоналями багатогранника називаються відрізки, які сполучають вершини багатогранника і не належать його граням. Указані елементи багатогранника зображено на малюнку 5.18.



а) б) в)

Мал. 5.18

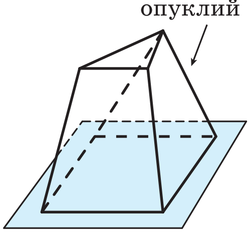
Поверхня багатогранника складається з плоских багатокутників, що є його гранями.

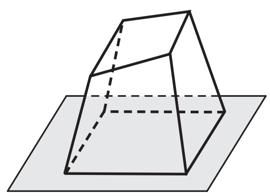
Плоскі кути багатогранника – кути багатокутників-граней.

Кут, утворений двома ребрами однієї грані багатогранника, називається його *плоским кутом*. **Плоскі кути багатогранника – це внутрішні кути багатокутників, що є його гранями.**

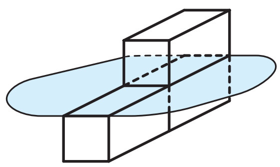
Поверхня багатогранника складається з плоских багатокутників. Зрозуміло, що **площею поверхні будь-якого багатогранника є сума площ усіх його граней.**

Багатогранники бувають опуклими (мал. 5.19) і неопуклими (мал. 5.20). *Опуклим* називається багатогранник, який повністю лежить по один бік від площини будь-якої з його граней (мал. 5.19).





Мал. 5.19

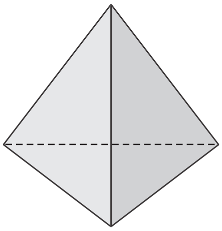


Мал. 5.20

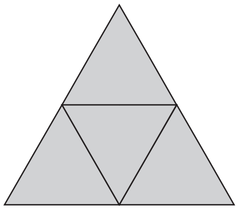
Кажуть, що ***опуклий багатогранник правильний, якщо всі його грані – рівні між собою правильні багатокутники* і у кожній його вершині сходиться однакове число ребер.**

Існує лише п’ять правильних багатогранників: чотиригранник, шестигранник (куб), восьмигранник, дванадцятигранник і двадцятигранник.

Правильний чотиригранник (мал. 5.21) обмежують чотири правильні трикутники. Його ще називають *правильним тетраедром*. Він має 4 вершини і 6 ребер. На малюнку 5.22 зображено правильний тетраедр, розгорнутий у площину однієї зі своїх граней. Таке зображення багатогранника називають його *розгорткою*.

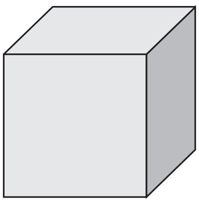


Мал. 5.21

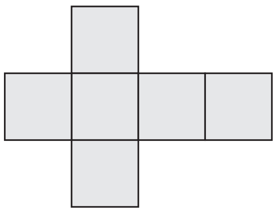


Мал. 5.22

Правильний шестигранник (мал. 5.23) має 6 граней-квадратів, 8 вершин і 12 ребер. Його ще називають *кубом*. Розгортку куба зображено на малюнку 5.24.

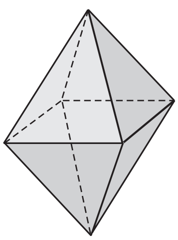


Мал. 5.23

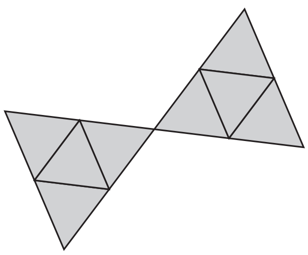


Мал. 5.24

Поверхню правильного восьмигранника (або *октаедра*), як і чотиригранника, утворюють правильні трикутники, але відмінність у тому, що у восьмигранника їх не чотири, а вісім (мал. 5.25). Він має 6 вершин і 12 ребер. Його розгортку зображено на малюнку 5.26.



Мал. 5.25



Мал. 5.26

ПРАВИЛЬНИЙ БАГАТОГРАННИК

↑

– усі грані рівні

правильні багатокутники

– завжди опуклий;
– у кожній вершині сходиться однакове число ребер;
– існує п’ять видів.

ПРАВИЛЬНИЙ ТЕТРАЕДР

грані – правильні трикутники:
– граней – 4;
– вершин – 4;
– ребер – 6;
– з кожної вершини виходить ребер – 3.

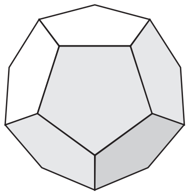
КУБ

грані – квадрати:
– граней – 6;
– вершин – 8;
– ребер – 12;
– з кожної вершини виходить ребер – 3.

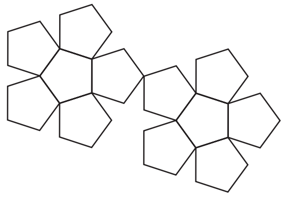
Для допитливих

Грецьке слово «кібос» буквально означає «гральний кубик», а тіло однакової з ним форми було названо *кубом*. Цей термін є в Евкліда.

Правильний дванадцятигранник (або *додекаедр*) має 12 граней (мал. 5.27). Кожна з них являє собою правильний п'ятикутник. У дванадцятигранника 20 вершин і 30 ребер. На малюнку 5.28 зображено його розгортку.

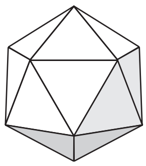


Мал. 5.27

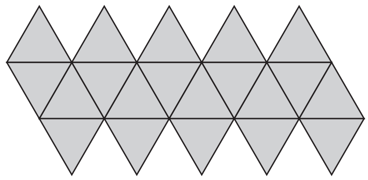


Мал. 5.28

Правильний двадцятигранник (або *ікосаедр*) обмежують 20 рівносторонніх трикутників, які сходяться у 12 вершинах (мал. 5.29). Він має 30 ребер. Його розгортку зображено на малюнку 5.30.



Мал. 5.29



Мал. 5.30

Цікаво, що вершини кожного з п'яти видів правильних багатогранників, у тому числі й ікосаедра, лежать на поверхні кулі.

Дванадцять вершин ікосаедра – це максимальне число точок, які можна нанести на поверхню кулі так, щоб відстань між будь-якими двома сусідніми точками була однакова.

Цю властивість ікосаедра застосувала одна з американських фірм для виготовлення баскетбольних м'ячів. На поверхні сферичної камери-основи встановлюють 12 точок, рівномірно розділених по каркасу (вершини

ОКТАЕДР

грані – правильні трикутники:
- граней – 8;
- вершин – 6;
- ребер – 12;
- з кожної вершини виходить ребер – 4.

ДОДЕКАЕДР

грані – правильні п'ятикутники:
- граней – 12;
- вершин – 20;
- ребер – 30;
- з кожної вершини виходить ребер – 3.

ІКОСАЕДР

грані – правильні трикутники:
- граней – 20;
- вершин – 12;
- ребер – 30;
- з кожної вершини виходить ребер – 5.

Для допитливих

Здавна відомі п'ять правильних багатогранників (так званих **платонових тіл**): тетраедр, гексаедр (куб), октаедр, додекаедр та ікосаедр.

Тетраедр у перекладі з грецької означає чотирикутник («тетра» – *чотири*, «едра» – *сторона*, *грань*).

Гексаедр означає шестигранник і походить від грецького «гекса» – *шість*.

Назва *октаедр* походить від грецького «окто» – *вісім*, що означає восьмигранник.

Додекаедр означає дванадцятигранник від грецького «додека» – *дванадцять*.

Назва *ікосаедра* походить від грецьких «ейкосі» – *двадцять* і «едра» – *сторона*, *грань* і, отже, означає двадцятигранник.

ікосаедра). Машина намотує нейлонові нитки по колах, що містять кожну пару зазначених точок.

Площа поверхні правильного багатогранника (площа його розгортки) дорівнює площі правильного багатокутника його грані, взятої стільки разів, скільки граней має відповідний правильний багатогранник.

ТЕОРЕМА ЕЙЛЕРА

Здавна відомі п'ять правильних багатогранників. Число вершин, ребер і граней для цих багатогранників наведено в таблиці:

Назва багатогранника	Число вершин	Число ребер	Число граней
Тетраедр	4	6	4
Куб	8	12	6
Октаедр	6	12	8
Додекаедр	20	30	12
Ікосаедр	12	30	20

Розглядаючи цю таблицю, легко побачити, що для кожного з цих багатогранників **сума числа вершин В і числа граней Г на 2 більша за число його ребер Р:**

$$\mathbf{В + Г - Р = 2.}$$

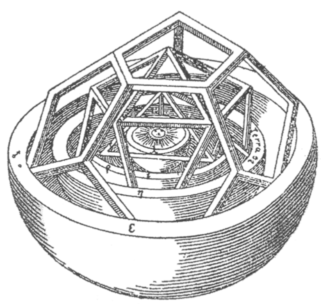
Для будь-якого правильного багатогранника виконується *теорема Ейлера*: **число його граней плюс число його вершин дорівнює числу його ребер плюс два:**

$$В + Г = Р + 2$$

Для допитливих

У давні часи геометричним фігурам, особливо правильним, надавали таємничого філософського змісту. Так, за Платоном, усе в природі створено взаємодією вогню, повітря, води і землі, а основні найпростіші елементи цих стихій мають відповідно форми: тетраедра, октаедра, ікосаедра і куба. Щодо додекаедра, то Платон вважав, що саме таку форму має Всесвіт – Божественний ефір.

У XVI ст. знаменитий німецький астроном *Йоганн Кеплер* (1571–1630) пропонував модель побудови Всесвіту, що складалася з правильних багатогранників і вписаних у них сфер, – так званий «кубок Кеплера» (див. мал.).



За Кеплером, зовнішня велика сфера відповідає орбіті найвіддаленішої з відомих на той час планет – Сатурна. Якщо в цю сферу вписати куб, а в куб знову сферу – то це буде сфера орбіти Юпітера. У сферу Юпітера Кеплер вписує правильний тетраедр, а вписана в нього сфера відповідає орбіті Марса. У сферу Марса вписується додекаедр і знову сфера – сфера орбіти Землі. Далі вписується ікосаедр і сфера Венери, а після того – октаедр і сфера орбіти Меркурія.

Пізніше саме Кеплер відкрив, що траєкторії руху планет навколо Сонця є не кола, а еліпси, і «кубок Кеплера», а разом із ним і правильні багатогранники втратили ореол таємничості.

Таке співвідношення виконується не тільки для правильних багатогранників, а й для інших багатогранників, наприклад призм, пірамід і т. д.

Ейлер перший помітив і довів цю чудову властивість багатогранників. Тому її називають *теоремою Ейлера для багатогранників.*

Практична робота 41

1. Склейте моделі опуклого і неопуклого багатогранників.
2. Полічіть число: вершин, ребер, плоских кутів ваших багатогранників.
3. Порівняйте число ребер і число плоских кутів. Зробіть висновок.
4*. Порівняйте число ребер із сумою числа вершин і числа граней. Зробіть висновок.

Завдання 35

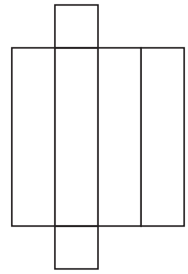
1°. Знайдіть навколо вас приклади об'єктів, що мають форму багатогранників. Укажіть число їх граней, ребер, вершин.

2*. Який правильний багатогранник має:
а) 8 вершин; **е)** 12 ребер;
б) 8 граней; **є)** 12 граней;
в) 20 вершин; **ж)** 30 ребер;
г) 20 граней; **з)** 6 ребер;
д) 12 вершин; **и)** найбільше число ребер?

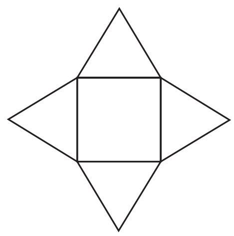
3. Наведіть приклади з оточення опуклих і неопуклих багатогранників.

4*. Багатогранник має 12 ребер. Скільки він має плоских кутів?

5*. На малюнку 5.31 зображено розгортки багатогранників. Визначте, скільки в них вершин, ребер, граней.



а)



б)

Мал. 5.31

6*. Яке найменше число ребер може сходитися в одній вершині багатогранника?

7*. Яке найменше число ребер може мати багатогранник?

8. Визначте для куба число: **а)** його діагоналей; **б)** діагоналей його граней; **в)** плоских кутів.

9*. Яке найменше число плоских кутів може мати багатогранник?

10.** Намалюйте багатогранник, у якого: **а)** 6 вершин і 5 граней; **б)** число вершин однакове із числом граней.

11.** Намалюйте багатогранник, у якого всі грані – квадрати, але він не є кубом.

12. Діагональ грані куба дорівнює 4 см. Знайдіть повну поверхню куба.

13*. Довжина ребра першого куба втричі більша за довжину ребра другого куба. У скільки разів площа повної поверхні першого куба більша за площу повної поверхні другого куба?

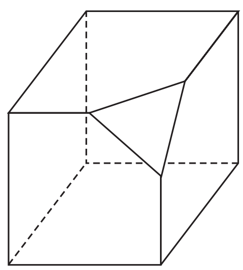
14*. Діагональ куба дорівнює 9 см. Знайдіть ребро цього куба.

15*. Як визначити площу повної поверхні куба, знаючи довжину його діагоналі?

16*. Два однакові правильні тетраедри склеїли по одній із граней. Чи буде утворена фігура правильним багатогранником? Чому?

17.** Площина, що проходить через середини трьох ребер куба, відтинає його частину так, як показано на малюнку 5.32. Зробіть від руки ескіз розгортки утвореної фігури.

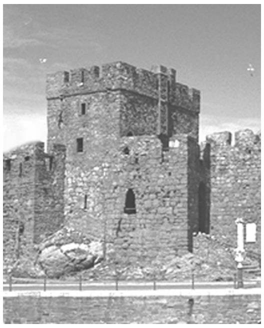
18*. Площа поверхні правильного додекаедра дорівнює 180 см². Знайдіть площу однієї грані.



Мал. 5.32

§ 31. Призми. Об'єм просторової фігури

Серед багатогранників виділяють два види: *призми* і *піраміди*.



Мал. 5.33

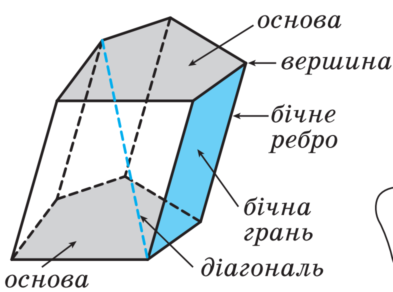
Замки середньовічної Європи зведені у формі *призм* (мал. 5.33) – їхні *бічні грані є паралелограмами*.

Призма має дві грані – *основи*, які можуть бути будь-якими багатокутниками, але рівними, і лежати *в паралельних площинах* (мал. 5.34).

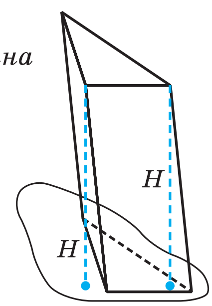
Діагоналлю призми називається відрізок, що сполучає дві вершини призми, які не належать одній грані.

Залежно від того, який багатокутник лежить в основі, призма може бути:
- трикутна (мал. 5.35),
- чотирикутна (мал. 5.36),
- п'ятикутна (мал. 5.34) і т. д.

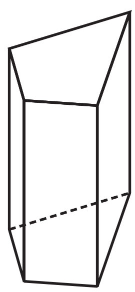
***n*-кутною призмою називається багатогранник, дві грані якого (основи) – рівні *n*-кутники, розміщені у паралельних площинах, а всі інші грані (бічні) – паралелограми.**



Мал. 5.34



Мал. 5.35



Мал. 5.36

Висотою призми називається відстань між її основами, перпендикуляр з довільної точки однієї основи до площини другої її основи (*H* на мал. 5.35).

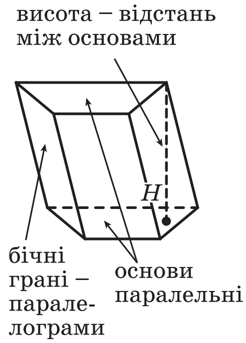
Призма називається *прямою*, якщо її бічні грані – прямокутники. Бічні ребра такої призми перпендикулярні до площин її основ (мал. 5.36).

Висота прямої призми дорівнює довжині її бічного ребра.

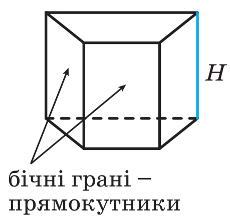
Пряма призма, основою якої є правильний багатокутник, називається *правильною*.

Паралелепіпед – це призма, шість граней якої є паралелограмами. Його протилежні грані – паралельні, тому за основу можна вважати будь-яку пару з них.

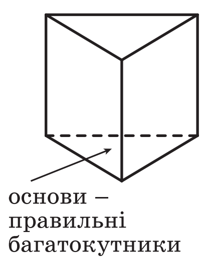
ПРИЗМА



ПРЯМА ПРИЗМА



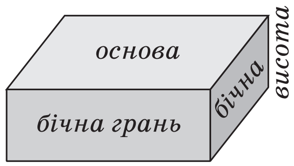
ПРАВИЛЬНА ПРИЗМА
пряма призма



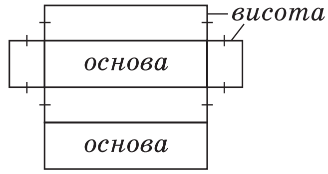
Прямокутний паралелепіпед – це паралелепіпед, утворений із шести прямокутників (мал. 5.37).

Якщо одну з граней прямокутного паралелепіпеда взято за основу, то протилежна їй грань також основа, всі інші грані будуть бічними гранями. Довжина ребра бічної грані, яка не належить основам, називається *висотою* прямокутного паралелепіпеда. Вона перпендикулярна до площини його основи.

Довжину ребер прямокутного паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, називають його *вимірами*.



Мал. 5.37



Мал. 5.38

Площа повної поверхні прямокутного паралелепіпеда S дорівнює сумі площ шести прямокутників (мал. 5.38). *Площу бічної поверхні* $S_б$ знаходять додаванням площі чотирьох прямокутників бічних граней, що рівнозначно добутку периметра основи на висоту:

$$S_б = P \cdot H = 2(a + b)H,$$

де a і b – довжини сторін основи.

Площа повної поверхні дорівнює сумі площі бічної поверхні і площі обох основ:

$$S = S_б + 2S_о = 2(a + b)H + 2ab.$$

Аналогічними міркуваннями неважко довести, що формули

$$S_б = P \cdot H, \quad S = S_б + 2S_о$$

можна застосовувати для обчислення площі поверхні будь-якої прямої призми.

Подібно до того, як ми вводили поняття площі для обмеженої з усіх боків плоскої фігури, у стереометрії вводиться поняття об'єму для просторової фігури.

Об'єм – це число, яке ставиться у відповідність обмеженій з усіх боків просторовій фігурі і яке має такі властивості:

1) *об'єм фігури є числом невід'ємним;*

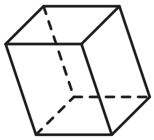
2) *об'єми рівних фігур рівні;*

3) *якщо фігуру поділено на частини, які не перекриваються, то об'єм фігури дорівнює сумі об'ємів цих частин;*

4) *за одиницю об'єму приймають об'єм куба зі стороною, що дорівнює одиниці довжини.*

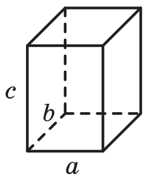
Наприклад, об'єм куба зі стороною 1 м дорівнює одному кубічному метру (1 м^3); об'єм куба зі стороною 1 фут дорівнює 1 фут^3.

ПАРАЛЕЛЕПІПЕД
призма



усі грані – паралелограми

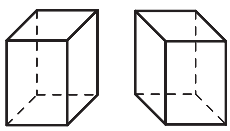
ПРЯМОКУТНИЙ ПАРАЛЕЛЕПІПЕД
призма,
усі грані – прямокутники



a, b, c – *виміри*

ОБ'ЄМ

1) $V \geqslant 0$;

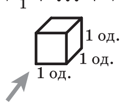


$F_1 = F_2$

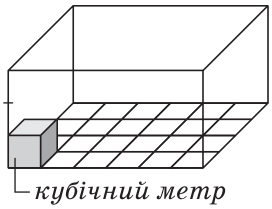
2) $F_1 = F_2$
$\Downarrow$
$V_1 = V_2$;

3) $F = F_1 + \ldots + F_n$
$\Downarrow$
$V = V_1 + \ldots + V_n$;

4) куб



$V = 1$ од.^{3}



Мал. 5.39

Нехай довжини ребер прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 6 м, 4 м і 3 м (мал. 5.39). На основі цього паралелепіпеда можна розмістити 24 кубики зі стороною завдовжки 1 м. Об'єм такого шару кубиків становить 24 м^3. Оскільки всередині даної фігури вміщається три ряди по 24 кубики в кожному, то її об'єм дорівнює $24 \cdot 3 = 72$ (м^3).

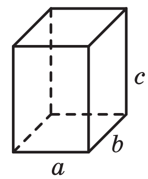
Тобто **об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту:**

$$\boldsymbol{V = S_о \cdot H}.$$

Можна довести, що об'єм будь-якого прямокутного паралелепіпеда обчислюється за наведеною вище формулою (аналогічно тому, як ми доводили формулу для обчислення площі прямокутника у 8-му класі). Строге доведення цього факту ви будете вивчати у старших класах.

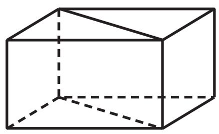
Якщо a, b, c – виміри прямокутного паралелепіпеда, то зрозуміло, що його об'єм можна обчислювати за формулою $V = a \cdot b \cdot c$.

Прямокутний паралелепіпед



$V = a \cdot b \cdot c$

Якщо провести площину через паралельні діагоналі основ прямокутного паралелепіпеда (мал. 5.40), то отримаємо дві рівні трикутні прямі призми, в основах яких лежать прямокутні трикутники. Зрозуміло, що об'єм кожної з цих прямих призм дорівнює половині об'єму вихідного паралелепіпеда, тобто добутку площі трикутника-основи на висоту призми.

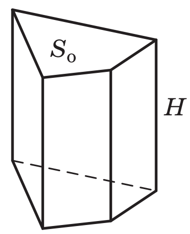


Мал. 5.40

Пряма призма

$V = S_о \cdot H$

площа основи

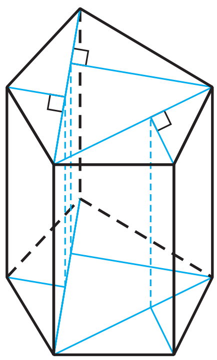


Будь-яку пряму призму можна поділити на прямі призми, основами яких є прямокутні трикутники. Висоти утворених призм будуть однакові (мал. 5.41).

Об'єм прямої призми дорівнюватиме сумі об'ємів таких трикутних призм, звідси:

$$\boldsymbol{V = S_о \cdot H},$$

де $S_о$ і H – площа основи і висота прямої призми.



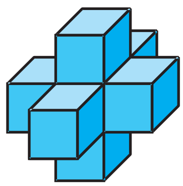
Мал. 5.41

Для допитливих

Якщо на гранях куба добудувати куби, отримаємо так званий «гіперкуб».

Саме таку фігуру використав *Сальвадор Далі* у картині «Гала перед розп'яттям на гіперкубі».

Чи є гіперкуб правильним багатогранником?



Наведемо приклади застосування отриманих у цьому параграфі формул.

Приклад 1. Ребра упаковки соку «Садочок» дорівнюють 6 см, 9 см і 20 см. Знайдіть загальну площу матеріалу, використаного для її виготовлення. Який об'єм такої упаковки?

Розв'язання

1) Периметр основи дорівнює $6 \cdot 2 + 9 \cdot 2 = 30$ (см), а висота – 20 см. Тоді площа бічної поверхні $S_б = 30 \cdot 20 = 600$ (см^2).

Площа основи дорівнює $6 \cdot 9 = 54$ (см^2). Тоді площа повної поверхні упаковки $S = 54 \cdot 2 + 600 = 708$ (см^2).

2) Площа основи дорівнює 54 (см^2), а висота – 20 см. Тоді об'єм $V = 54 \cdot 20 = 1080$ (см^3), тобто не набагато більше за 1 л.

Відповідь: 600 см^2 і 1080 см^3.

Приклад 2. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, площі трьох граней якого дорівнюють 42 см^2, 56 см^2, 48 см^2.

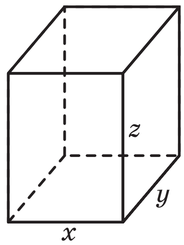
Розв'язання

1) У прямокутному паралелепіпеді протилежні грані – рівні прямокутники. Тобто задано площі трьох граней, які мають спільну вершину (мал. 5.42).

2) Позначимо довжини ребер так, як показано на малюнку 5.42. Шуканий об'єм дорівнює $V = xyz$.

3) За умовою маємо:

$$\begin{cases} xy = 42 = 6 \cdot 7, \\ yz = 56 = 7 \cdot 8, \\ xz = 48 = 6 \cdot 8. \end{cases}$$



Мал. 5.42

Звідси: $(xy) \cdot (yz) \cdot (xz) = x^2y^2z^2 = 6^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2$ і $V = xyz = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336$ (см^3).

Відповідь: 336 см^3.

Вимірюй усе, що піддається вимірові, і зроби таким усе, що не піддається вимірові.

Галілео Галілей

Практична робота 42

1. Накресліть розгортку прямого паралелепіпеда і зробіть з неї модель прямого паралелепіпеда.

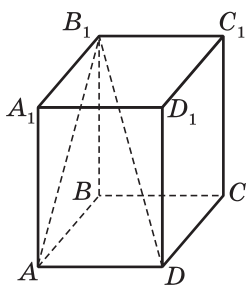
2*. Чи можна виготовити таку модель паралелепіпеда, щоб, розглядаючи її з різних боків, можна було стверджувати, що цей паралелепіпед є прямим і що він є похилим?

Завдання 36

1°. Назвіть будь-які предмети, що мають форму паралелепіпеда.

2°. Учень вважає, що терміни «правильна чотирикутна призма» і «прямокутний паралелепіпед» означають одну й ту саму фігуру. Чи правий він?

3°. Чи можна вважати правильним означення: «Кубом називається правильна чотирикутна призма, в якої висота дорівнює стороні основи»?
4. Чи можуть усі грані призми бути трикутниками? А трапеціями?
5. Чи існує призма, в якої немає жодної діагоналі?
6*. Призма має 18 граней. Який багатокутник лежить у її основі?
7. Які дані треба мати про призму, щоб стверджувати, що вона є правильною?
8. Що можна сказати про призму, всі бічні грані якої квадрати?
9. Чи правильне твердження: «У кожній призмі число ребер завжди кратне 3»?
10*. Чи можна стверджувати, що у прямій призмі бічне ребро перпендикулярне до кожної діагоналі основи? Відповідь обґрунтуйте.
11**. Чи може паралелограм бути розгорткою бічної поверхні похилої призми?
12. Які додаткові ознаки відрізняють: **а)** правильну призму від прямої; **б)** куб від прямокутного паралелепіпеда?
13*. Суми площ протилежних бічних граней прямої чотирикутної призми рівні між собою. Яку властивість повинен мати багатокутник основи?
14°. Знайдіть площу поверхні прямої чотирикутної призми, бічне ребро якої дорівнює 5 см, а сторони основи дорівнюють 2 см, 3 см, 2,5 см, 4,5 см.
15. Знайдіть площу поверхні й об'єм прямої призми, в основі якої лежить ромб із довжиною сторони 5 см і гострим кутом 30°, а висота цієї призми дорівнює 10 см.
16°. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 10 дм, а висота – 8 дм. Знайдіть площу поверхні призми та її об'єм.
17. Чи можна з прямокутного аркуша картону розміром 52 × 22 см виготовити модель правильної чотирикутної призми, висота якої дорівнює 20 см, а сторона основи – 10 см?
18*. Чи можуть два нерівні прямі паралелепіпеди, висоти яких рівні, мати рівні бічні поверхні?
19. Усі ребра прямої трикутної призми однакові і дорівнюють 2 м. Знайдіть об'єм цієї призми.
20*. Усі бічні грані правильної шестикутної призми – квадрати зі стороною 10 дм. Знайдіть об'єм цієї призми.
21. Який приблизно об'єм вашої класної кімнати?
22*. Знайдіть площу поверхні й об'єм прямокутного паралелепіпеда, площі трьох граней якого дорівнюють 10 дм^2, 6 дм^2 і 15 дм^2.
23*. Дано правильну чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 5.43), у якої $B_1D = 5$ см, $AB_1 = 4$ см. Знайдіть довжину ребра основи призми та її об'єм.



Мал. 5.43

24. Мірою для видачі зерна зі складу на корм худобі є два прямокутні ящики з рівними основами. Один ящик уміщує 50 кг зерна. Скільки зерна вміщує другий ящик, якщо його висота в 1,5 раза перевищує висоту першого ящика?
25*. У квартирі дві кімнати. Кубатура однієї кімнати дорівнює 120 м^3. Знайдіть кубатуру другої кімнати, якщо вона в 1,5 раза ширша за першу і в 3 рази коротша за першу.
26**. У правильній шестикутній призмі бічні грані – рівні прямокутники. Сформулюйте обернене твердження і доведіть його хибність.

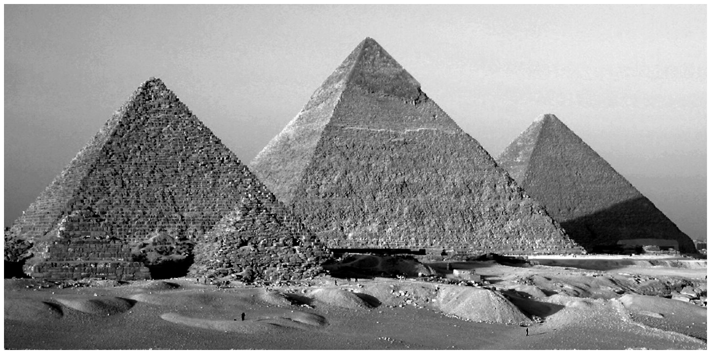
Для допитливих

Перша умова, якої треба дотримуватися в математиці, – це бути точним, друга – бути ясним і, наскільки можливо, простим.

Л. Карно

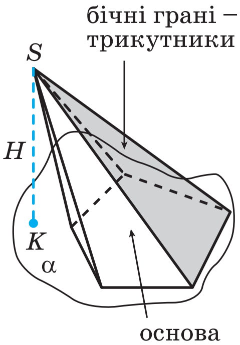
§ 32. Піраміди

Мабуть, усім відомі знамениті єгипетські піраміди. На малюнку 5.44 ви бачите піраміди в Гізі (Єгипет).



Мал. 5.44

ПІРАМІДА



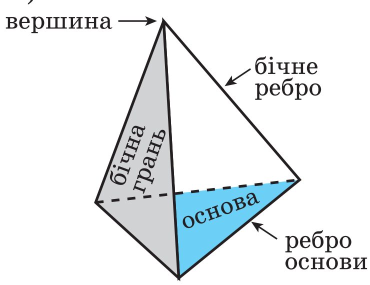
S – вершина

$SK = H$ – висота

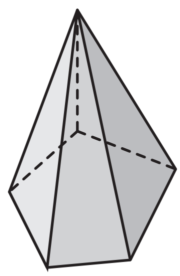
$SK \perp \alpha$

Бічну поверхню піраміди утворюють трикутники – *бічні грані*, що сходяться у певній точці – *вершині*, і мають по одній спільній стороні з деяким багатокутником, який називається *основою* (мал. 5.45).

Висота піраміди – це відстань від її вершини до її основи (перпендикуляр, що проведено з її вершини до її основи).



Мал. 5.45



Мал. 5.46

В основі – n-кутник

↓

піраміда n-кутна

Залежно від того, який багатокутник лежить в основі, піраміда може бути:

- трикутна (мал. 5.45),
- чотирикутна (див. мал. 5.47-а),
- п'ятикутна (мал. 5.46) і т. д.

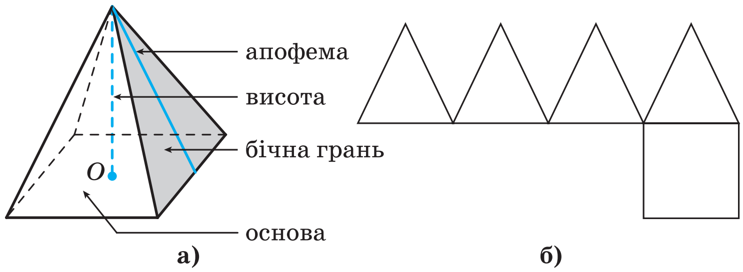
***n*-кутною пірамідою називається піраміда, основою якої є *n*-кутник.**

Піраміда називається *правильною*, якщо:

1) основою її є правильний багатокутник;

2) основою перпендикуляра, проведеного з вершини піраміди до її основи, є центр багатокутника основи.

Усі бічні ребра правильної піраміди рівні, усі бічні грані – рівні рівнобедрені трикутники. Висоту бічної грані, яку проведено до ребра основи у правильній піраміді, називають *апофемою* (мал. 5.47-а).



Мал. 5.47

На малюнку 5.47 зображено правильну чотирикутну піраміду та її розгортку.

Площею бічної поверхні піраміди називається сума площ усіх її бічних граней.

Щоб знайти площу поверхні піраміди, треба до площі її бічної поверхні додати площу основи:

$$S = S_б + S_о.$$

Якщо піраміда правильна *n*-кутна, то площа однієї бічної грані дорівнює півдобутку довжини ребра *a* основи на апофему h_a. Площа бічної поверхні буде у *n* разів більшою, тобто є добутком півпериметра основи на апофему:

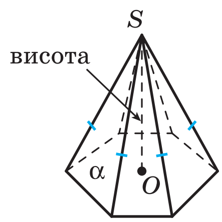
$$S_б = p h_a.$$

Об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі основи на висоту піраміди:

$$V = \frac{1}{3} S_о H.$$

Доводити цю формулу ви будете в старших класах, а зараз можна переконатися в її правильності експериментальним шляхом. Наприклад, якщо склеїти з картону пряму призму і піраміду з однаковими основами та висотами і наповнити їх піском (манною крупою), то з'ясується, що піску для наповнення призми потрібно втричі більше, ніж для піраміди.

ПІРАМІДА ПРАВИЛЬНА



основа – правильний багатокутник, O – його центр,

$SO \perp \alpha$,
↑
основа
$SO \equiv H$,
бічні ребра – рівні,
бічні грані – рівні.

Площа бічної поверхні:

$$S_б = p h_a$$

h_a – апофема,
p – півпериметр основи.

Піраміда:

$$S = S_б + S_о$$

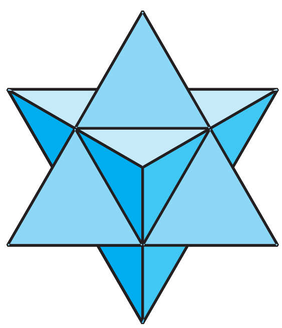
$S_о$ – площа основи.

$$V = \frac{1}{3} S_о H$$

Для допитливих

1. Чотиригранники ще називають тетраедрами, бо з грецької «тетра» означає «чотири», а «едра» – «грань». Чотиригранник можна скласти тільки з трикутників. (Чому?) Тому трикутні піраміди ще називають тетраедрами.

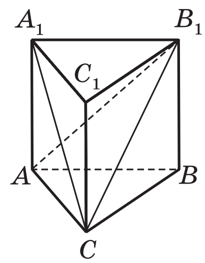
2. Фігура, зображена на малюнку, є сплетінням двох правильних тетраедрів, відкрив її Леонардо да Вінчі. Пізніше, через 100 років, її «перевідкрив» Кеплер і дав їй назву, що в перекладі означає «восьмикутна зірка».



Практична робота 43

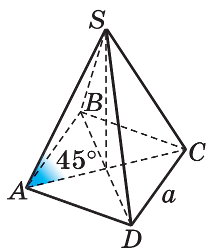
1. Склейте з картону пряму призму і піраміду з однаковими основами і висотами.
2. За допомогою манної крупи або піску порівняйте об'єми цих фігур.
3. Зробіть висновок.

Завдання 37



Мал. 5.48

1°. Яка піраміда називається правильною?
2°. Скільки бічних граней у правильній 3-кутній піраміді? А в 4-кутній?
3. На малюнку 5.48 знайдіть три трикутні піраміди.
4. Чому правильну чотирикутну піраміду не можна назвати правильним багатогранником?
5. Чи можна склеїти такий багатогранник, який, якщо його поставити на одну грань, був би призмою, а якщо на іншу, то – пірамідою?
6*. Визначте без малюнка: **а)** скільки вершин, ребер і граней має n-кутна піраміда; **б)** скільки всього плоских кутів має n-кутна піраміда?
7*. Чи буде правильною піраміда, якщо її бічні грані: **а)** рівні трикутники; **б)** рівні рівнобедрені трикутники?
8*. Доведіть, що число ребер піраміди – парне.
9*. Знайдіть суму всіх плоских кутів n-кутної піраміди.
10*. Чи існує піраміда, що має: **а)** 18 плоских кутів; **б)** 20 плоских кутів?
11°. У трикутній піраміді довжина кожного ребра дорівнює a. Знайдіть повну поверхню піраміди.
12. В основі правильної піраміди лежить шестикутник із стороною 2 дм. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо її апофема дорівнює 1 дм.
13. У правильній чотирикутній піраміді апофема дорівнює стороні основи і становить 10 см. Знайдіть площу поверхні піраміди.
14. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди вдвічі менша за бічне ребро і дорівнює 2 см. Знайдіть площу її бічної поверхні.
15. Знайдіть площу поверхні правильної чотирикутної піраміди, бічні грані якої правильні трикутники, а апофема дорівнює $\sqrt{3}$ дм.
16. Обчисліть об'єм правильної шестикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 3 см, а висота – 8 см.
17*. Як зміниться об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо сторону її основи збільшити у 3 рази, а висоту зменшити у 2 рази?
18*. Обчисліть об'єм правильної чотирикутної піраміди, зображеної на малюнку 5.49.

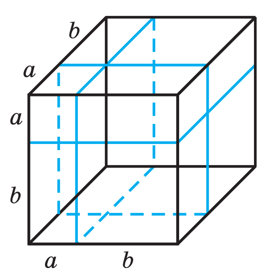


Мал. 5.49

Для допитливих

1. На малюнку подано геометричний зміст формули $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ для випадку $a > 0$, $b > 0$. Дайте пояснення.

2. Кожну грань куба поділено на чотири квадрати, кожний з утворених квадратів пофарбовано в один із трьох кольорів: синій, жовтий і червоний так, щоб квадрати, які мають спільну сторону, були різних кольорів. Доведіть, що тоді обов'язково буде 8 синіх, 8 жовтих і 8 червоних квадратів.



§ 33. Тіла обертання

Тілами обертання називаються просторові фігури, які утворюються внаслідок обертання плоскої фігури навколо деякої осі. Серед них виділяють: *кулю, конус, циліндр*.

Можна навести багато прикладів тіл обертання: тенісний м'яч має форму кулі, близька до цієї форми і наша Земля; у вітряку можна побачити циліндр і конус (мал. 5.50) тощо.

Мал. 5.50

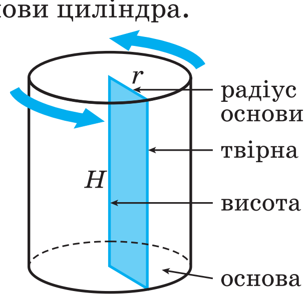
ЦИЛІНДР

Коли прямокутник обертається навколо прямої, якій належить одна з його сторін, – утворюється *прямий круговий циліндр* (мал. 5.51). Далі, говорячи про циліндр, будемо мати на увазі прямий круговий циліндр.

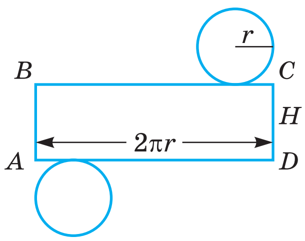
Пряма, навколо якої обертався прямокутник, називається *віссю циліндра*; паралельна їй протилежна сторона прямокутника – *твірною*; круги, описані двома іншими сторонами прямокутника, – *основами* циліндра.

Висота циліндра H – це відстань між його основами (перпендикуляр, проведений з довільної точки однієї основи до другої основи). Вона дорівнює твірній цього циліндра.

На малюнку 5.52 маємо розгортку циліндра. Прямокутник – розгортка бічної поверхні, два круги – це основи циліндра.

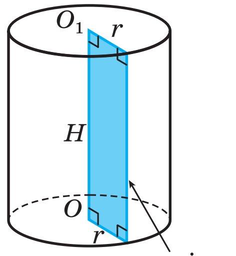


Мал. 5.51



Мал. 5.52

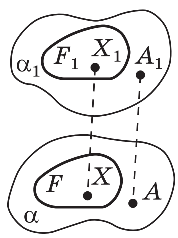
ЦИЛІНДР
прямий круговий



(OO_1) – вісь обертання, вісь циліндра;
$[OO_1] = H$ – висота;
r – радіус основи.

Для допитливих

Слово *циліндр* походить від грецького «киліндрос», що означає «вал», «коток». У шкільному курсі геометрії вивчають тільки *прямий круговий циліндр*, означення якого вам уже відоме. Взагалі *циліндр* в геометрії визначають так. Якщо у деякій площині α задати фігуру F, з деякої точки A площини α провести відрізок AA_1, який не належить площині α, і з кожної точки X фігури F провести відрізки XX_1, рівні і паралельні AA_1 (див. мал.), – отримаємо просторову фігуру, яка називається *циліндром*. (XX_1 – твірні, а F і F_1 – його основи.)



Площа бічної поверхні циліндра дорівнює площі прямокутника $ABCD$, одна сторона якого AB дорівнює висоті циліндра H, а друга AD – довжині кола його основи $2\pi r$ (див. мал. 5.52). Тобто

$$S_б = 2\pi rH.$$

Щоб отримати **площу повної поверхні циліндра**, треба до площі бічної поверхні додати площі основ – двох однакових кругів, радіуси яких дорівнюють r:

$$S = 2\pi rH + 2\pi r^2.$$

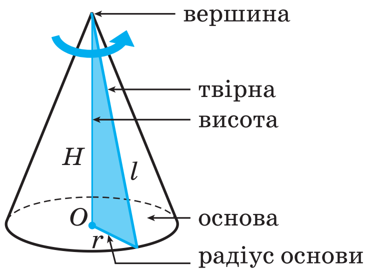
Якщо в циліндр вписати правильну n-кутну призму й уявити, що n прямує до нескінченності, то об'єм циліндра дорівнюватиме об'єму такої призми.

Тому **об'єм циліндра дорівнює добутку площі основи циліндра на його висоту:**

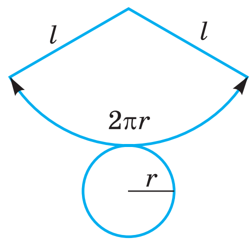
$$V = \pi r^2 H.$$

КОНУС

Прямий круговий конус утворюється при обертанні прямокутного трикутника навколо одного з його катетів (мал. 5.53). Катет, навколо якого обертається трикутник, називається *висотою конуса*; другий катет описує круг, який називається *основою конуса*; гіпотенуза трикутника описує бічну поверхню конуса і називається *твірною конуса*.



Мал. 5.53

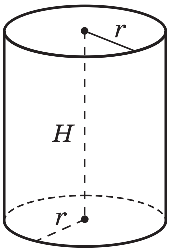


Мал. 5.54

Розгортку конуса зображено на малюнку 5.54. Бічна поверхня розгортається у сектор, радіус якого – твірна конуса l, а довжина дуги дорівнює довжині кола основи, радіус якого позначено через r.

Площа цього сектора S_1 є частиною площі круга $S_о$ радіуса l (їхнє відношення $\frac{S_1}{S_о} = \frac{2\pi r}{2\pi l}$). Тоді $S_1 = \pi l^2 \frac{2\pi r}{2\pi l} = \pi rl$.

ЦИЛІНДР

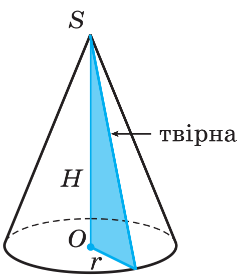


$S_б = 2\pi rH$

$S = 2\pi rH + 2\pi r^2$

$V = \pi r^2 H$

КОНУС
прямий круговий



(SO) – вісь конуса, вісь обертання;
$[SO] = H$ – висота;
r – радіус основи.

Нагадаємо:
(SO) – пряма SO;
$[SO]$ – відрізок SO.

Для допитливих

Цей футбольний м'яч складається з правильних п'ятикутників і шестикутників. Багатогранники, що складаються з різних правильних багатокутників, у кожній з вершин якого сходиться однакове число ребер, називають *напівправильними*. Тринадцять видів напівправильних багатогранників відкрив і описав Архімед у III ст. до н. е.

Щоб знайти площу повної поверхні конуса S, до площі бічної поверхні $S_б \equiv S_1$ треба додати площу круга-основи:

$$S = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r).$$

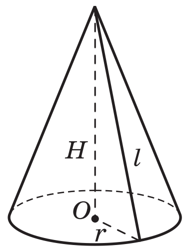
Отже, **площа бічної поверхні і площа повної поверхні конуса,** радіус основи якого r і твірна l, дорівнює відповідно:

$$S_б = \pi rl \quad \text{і} \quad S = \pi r(l + r).$$

Якщо в конус вписати правильну n-кутну піраміду й уявити, що n прямує до нескінченності, то об'єм конуса дорівнюватиме об'єму такої піраміди. Тому **об'єм конуса** дорівнює третині добутку площі основи конуса на його висоту:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H.$$

КОНУС



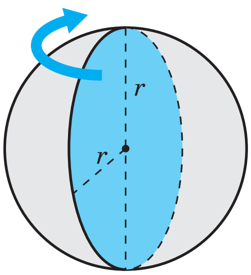
$S_б = \pi rl$

$S = \pi r(l + r)$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$

КУЛЯ

Куля – це фігура обертання, яка утворюється при обертанні круга навколо його діаметра (мал. 5.55). Поверхню кулі називають *сферою*. Діаметр круга буде *діаметром кулі*, радіус круга – *радіусом кулі*, а центр круга – *центром кулі*.



Мал. 5.55

Кулю не можна представити у вигляді розгортки на площині, тому вивести формулу для площі її поверхні важко. Математики довели, що площа поверхні кулі, тобто **площа сфери, у 4 рази більша за площу круга, обертанням якого її було утворено:**

$$S = 4\pi r^2.$$

Строге доведення показує, що об'єм кулі, радіус якої дорівнює r, у 4 рази більший за об'єм конуса, радіус основи і висота якого дорівнюють r:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

КУЛЯ

↑

обертанням круга навколо діаметра

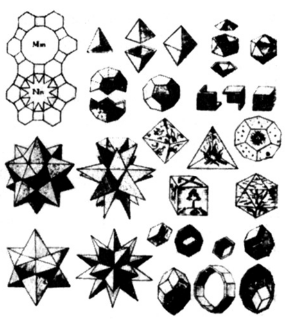
$S_б = 4\pi r^2$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Для допитливих

Кеплер вважав, що кожній планеті відповідає правильний багатогранник, у який вписано сферу орбіт планети. Правильних багатогранників існує тільки 5 – вони вже були використані ним як моделі Всесвіту. Тому Кеплер, шукаючи інші планети, шукав і інші гармонійні «правильні» форми. Він продовжував ребра і грані правильних багатогранників і отримував неопуклі, так звані «зірчасті» багатогранники.

Спробуйте слідом за Кеплером і французьким математиком Луї Пуансоном (1777–1859) пошукати такі фігури.



Практична робота 44

1. Накресліть прямокутник – розгортку бічної поверхні циліндра.
2. Накресліть круг, який буде основою цього циліндра. Які попередні розрахунки треба зробити для цього?
3. Склейте модель циліндра за отриманою розгорткою.
4. Накресліть сектор круга – розгортку бічної поверхні конуса.
5. Накресліть круг, який буде основою цього конуса. Які попередні розрахунки треба зробити для цього?
6. Склейте модель конуса за отриманою розгорткою.

Практична робота 45

Виконавши потрібні вимірювання, обчисліть об'єм у кубічних сантиметрах: **а)** хокейної шайби; **б)** каструлі циліндричної форми.

Завдання 38

1°. Прямокутний аркуш паперу розміром $a \times b$ можна згорнути двома способами так, що утвориться бічна поверхня циліндра. Визначте радіус основ циліндрів.

2. Обертаючи прямокутник $ABCD$ зі сторонами $AB = 2$ см і $CD = 4$ см спочатку навколо сторони AB, а потім навколо сторони CD, дістали два циліндри. В якому випадку площа бічної поверхні більша?

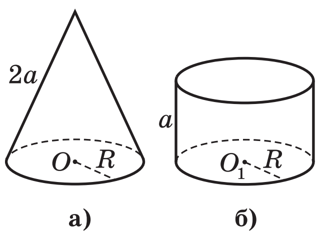
3. Радіус циліндра збільшили у 2 рази, а його висоту зменшили у 2 рази. Чи змінилася площа бічної поверхні? Чому?

4. Один циліндр у 3 рази товстіший за другий, але у 3 рази коротший за нього. Чи однакові їхні об'єми?

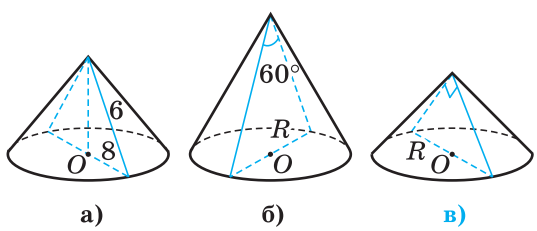
5. У циліндричній посудині рівень рідини досягає 16 см. На якій висоті буде рівень рідини, якщо її перелити у посудину, діаметр якої у 2 рази більший за діаметр першої?

6. Порівняйте бічні поверхні тіл, зображених на малюнку 5.56.

7*. Обчисліть бічну поверхню конусів, зображених на малюнку 5.57.



Мал. 5.56



Мал. 5.57

Для допитливих

1. Кавун розрізали на 4 частини і з'їли. Чи може при цьому залишитися 5 шкірок?

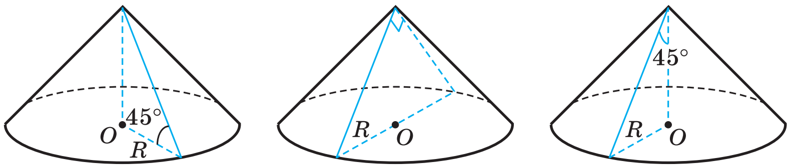
2. Наведіть приклад лінії, яка: **а)** з жодною із площин не має рівно однієї спільної точки; **б)** не належить жодній з площин.

3. Дано багатогранник. З одного боку – це правильна призма, з другого – неправильний багатогранник. Які властивості багатогранника випливають з того, що він правильна призма? Які властивості випливають з того, що це неправильний багатогранник?

4. Чи може багатогранник мати p ребер, де p – просте число, більше за 11?

П о р а д а. Якщо в багатогранника «зрізати кут», то число ребер збільшиться на 3.

8*. Знайдіть об'єми конусів, зображених на малюнку 5.58.



а) б) в)

Мал. 5.58

9*. Що являє собою тіло, яке складається з усіх точок, віддалених від даної точки O на відстань, не меншу за 3 см, але не більшу за 7 см?

10. Чи правильно, що сума площ двох сфер, радіуси яких R, дорівнює площі сфери, радіус якої $2R$?

11. Обчисліть площу поверхні півкулі, радіус якої дорівнює R.

12. Фарби вистачає, щоб пофарбувати поверхню кулі, радіус якої дорівнює R. На скільки куль, радіуси яких $\dfrac{R}{10}$, вистачить цієї фарби, якщо товщина шару фарби в обох випадках однакова?

13*. Чи існує така куля, об'єм і площа поверхні якої виражаються одним і тим самим числом?

14*. Що ви вибрали б: з'їсти кавун, радіус якого дорівнює 10 см, утрьох, чи з'їсти кавун, радіус якого 20 см, увісьмох?

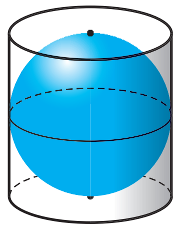
15. Є свинцеві кульки однакових розмірів. Треба переплавити їх на кулю, радіус якої у 5 разів більший. Скільки маленьких кульок для цього потрібно?

16. Виразіть радіус кулі через її об'єм.

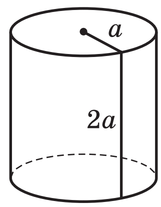
17*. У циліндр вписана куля, радіус якої – R, так, що вона дотикається до основ і бічної поверхні циліндра (мал. 5.59). Знайдіть відношення об'ємів цих тіл.

18*. Чи можна у циліндричну посудину, зображену на малюнку 5.60, помістити кулю, об'єм якої у 2 рази менший, ніж об'єм посудини?

19.** Три рівних конуси лежать на площині, причому кожні два з них мають спільну твірну довжиною 1. Чи можна в утворений проміжок між цими конусами вмістити такий самий конус?



Мал. 5.59



Мал. 5.60

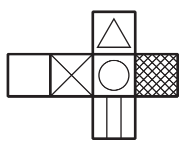
Для допитливих

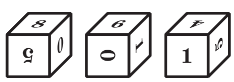
1. Які з кубиків на малюнку **А** відрізняються від першого тільки розміщенням у просторі?

2. На гранях куба написані цифри 0, 1, 4, 5, 6, 8. Визначте, які цифри написані на протилежних гранях куба за зображенням його в трьох положеннях у просторі на малюнку **Б**.

3. Чи є на малюнку **В** куб, який виготовлено за заданою розгорткою?

А





Б

В

Завдання для повторення розділу V

1. Які твердження називаються «аксіомами стереометрії»?
2. Яка логічна схема побудови стереометрії?
3. Скільки площин можна провести через пряму і точку поза нею? Чому?
4. Через пряму і точку провели 10 площин. У якому випадку це можливо?
5. Як можуть бути взаємно розміщені у просторі: **а)** дві прямі; **б)** пряма і площина; **в)** дві площини?
6. Яка пряма називається перпендикулярною до площини?
7. Поясніть, що таке: **а)** перпендикуляр до площини; **б)** похила до площини; **в)** проекція похилої на площину; **г)** відстань від точки до площини.
8. Яка ознака перпендикулярності прямої і площини?
9. Яка фігура називається: **а)** багатогранником; **б)** правильним багатогранником?
10. Поясніть на прикладі зміст понять: **а)** грані багатогранника; **б)** ребра багатогранника; **в)** вершини багатогранника; **г)** діагоналі багатогранника; **д)** площа поверхні багатогранника.
11. Поясніть, чим відрізняються опуклі багатогранники від неопуклих.
12. Поясніть, що таке: **а)** призма; **б)** паралелепіпед; **в)** пряма призма; **г)** правильна призма; **д)** прямокутний паралелепіпед.
13. Поясніть, що таке: **а)** піраміда; **б)** правильна піраміда; **в)** апофема у правильній піраміді.
14. Який відрізок називають висотою: **а)** призми; **б)** піраміди?
15. Які тіла називаються тілами обертання і чому?
16. Як знайти площу поверхні: **а)** циліндра; **б)** конуса; **в)** кулі?
17. За якою формулою обчислюють об'єм: **а)** призми; **б)** піраміди; **в)** циліндра; **г)** конуса; **д)** кулі?
18. Кожна з площин α і β проходить через точки A, B і C. Чи можна зробити висновок, що α і β – одна й та сама площина? Відповідь обґрунтуйте.
19. Через три точки провели 10 площин. Що це означає?
20. Задано три точки, через які можна провести площину, але не одну. Що з цього випливає?
21. Чому замкнені двері не можна відчинити, а незамкнені відчиняються легко?
22. Чи правильно, що геометричним місцем точок, спільним для двох площин, які перетинаються, є пряма? Чому?

23*. Дано дві прямі, але через них не можна провести площину. Доведіть, що ці прямі не перетинаються.

24. Чи можна стверджувати, що прямі мимобіжні, якщо вони не перетинаються? Чому?

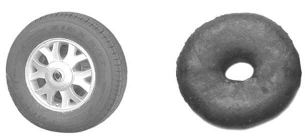
25. Чи треба доводити, що через дві паралельні прямі можна провести площину? Чому?

26°. Знайдіть навколо вас такі три прямі: **а)** дві прямі, що перетинаються, а третя є мимобіжною з кожною з них; **б)** дві прямі мимобіжні, а третя перетинає кожну з них; **в)** дві прямі паралельні, а третя є мимобіжною з кожною з них.

Для допитливих

Автомобільна покришка має *тороїдальну* форму. Пончики також мають тороїдальну форму (мал. **А**).

М'яч для гри в регбі за формою близький до еліпсоїда (див. мал. **Б**).



А

Б

27.** Назвіть яку-небудь ознаку прямих, що перетинаються.

28*. На одній із паралельних площин проведено пряму. Чи можна стверджувати, що ця пряма паралельна другій площині? Чому?

29*. Дві прямі паралельні одній площині. Чи завжди на площині знайдеться пряма, яка буде одночасно паралельна обом даним прямим? Чому?

30*. За допомогою прикладу з оточення доведіть, що: **а)** можна провести площину, перпендикулярну одночасно до двох прямих, які перетинаються; **б)** дві площини, перпендикулярні до третьої площини, не завжди паралельні між собою.

31*. Чи правильним є твердження: «Якщо пряма не паралельна площині, то на цій площині немає жодної прямої, паралельної даній»? Чому?

32*. Доведіть від супротивного: якщо чотири точки не належать одній площині, то ніякі три з них не лежать на одній прямій.

33. Що являє собою геометричне місце точок, рівновіддалених від однієї точки простору?

34. Зобразіть правильний тетраедр, його висоту й апофему.

35. Ребро одного куба в 2 рази менше за ребро другого. Порівняйте їхні: **а)** площі поверхонь; **б)** об'єми; **в)** діагоналі; **г)** діагоналі бічних граней.

36. Діагональ куба дорівнює 8 см. Знайдіть його: **а)** ребро; **б)** площу поверхні; **в)** об'єм.

37*. Багатогранник має 9 ребер. Скільки він має плоских кутів?

38. Зобразіть правильну чотирикутну піраміду, її висоту й апофему.

39. Обчисліть площу бічної поверхні правильного тетраедра, ребро якого дорівнює $\sqrt{3}a$ см.

40*. Щоб довести, що призма правильна, треба розглянути два пункти, а що вона неправильна – один. Про які пункти йдеться?

41*. Чи існує призма, яка має 16 ребер? Чому?

42*. У призми є всього 8 граней. Знайдіть суму внутрішніх кутів багатокутника основи.

43.** Чи можна розрізати трикутну призму на дві частини так, щоб кожна з частин була пірамідою?

44*. Зобразіть багатогранник, у якого всі грані – трикутники, який би не був трикутною пірамідою.

45. Порівняйте терміни: «правильна трикутна піраміда» і «правильний тетраедр». Чи можна стверджувати, що вони означають одну й ту саму фігуру?

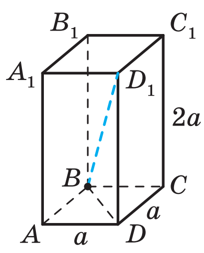
46*. Чи правильне міркування: «Оскільки всі бічні грані даної призми – квадрати, то ця призма – правильна»? Чому?

47.** В основі піраміди лежить рівнобедрений прямокутний трикутник з катетом 3 см. Висота піраміди має за основу вершину прямого кута цього трикутника і дорівнює 6 см. Знайдіть площу поверхні й об'єм піраміди.

48.** Знайдіть залежності, за якими, знаючи, скільки у призмі або піраміді вершин і граней, можна визначити, скільки у них ребер.

49.** Доведіть від супротивного: «Якщо в паралелепіпеді з ребрами a, b, c і діагоналлю d виконується $d^2 \neq a^2 + b^2 + c^2$, то цей паралелепіпед не прямокутний».

50*. У прямокутному паралелепіпеді, зображеному на малюнку 5.61, знайдіть довжину відрізка BD_1.



Мал. 5.61

Для допитливих

На кубі позначено всі вершини і центри граней, проведено діагоналі всіх граней. Чи можна по відрізках діагоналей обійти всі позначені точки, побувавши в кожній із них лише один раз?

51*. На малюнку 5.62 зображено тіло, що становить четверту частину циліндра, радіус якого дорівнює R, а висота – H. Знайдіть повну поверхню тіла та його об’єм.

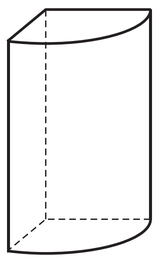
52*. Запишіть формули для обчислення об’єму і площі поверхні циліндра. Чи існує такий циліндр, у якого площа бічної поверхні містить стільки само квадратних одиниць, скільки у його об’ємі кубічних одиниць?

53. Циліндр і конус мають рівні основи, а висота конуса в 2 рази більша за висоту циліндра. Порівняйте: **а)** площі їхніх бічних поверхонь; **б)** їхні об’єми.

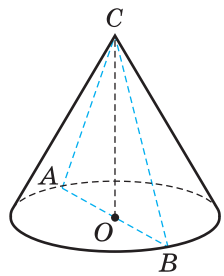
54. На малюнку 5.63 трикутник ABC – правильний, сторона його дорівнює a. Обчисліть об’єм конуса.

55*. Конус, висота якого дорівнює H, вилитий зі свинцю. Його треба переплавити на циліндр такого самого радіуса. Якою буде висота циліндра?

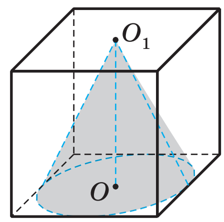
56*. На малюнку 5.64 у куб вписано конус. Знайдіть об’єм конуса.



Мал. 5.62



Мал. 5.63



Мал. 5.64

57*. Об’єм кулі зменшився у 27 разів. Як змінилася площа її поверхні?

58*. Матеріал для фарбування дитячого м’ячика коштує 50 коп. Скільки треба заплатити за матеріал для фарбування м’яча, об’єм якого у 8 разів більший?

59*. На базарі продають кавуни маленькі, а також великі, діаметри яких у 2 рази більші. Вартість маленьких кавунів – 2 грн., а великих – 6 грн. Що вигідніше купити: один великий чи три маленькі кавуни?

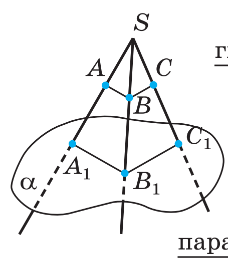
60*. Площа круга дорівнює S. Обертанням цього круга навколо його діаметра отримали кулю. Знайдіть площу поверхні кулі.

61*. Свинцеву кулю переплавили в кульки, радіус яких у 10 разів менший від початкового. Скільки таких кульок дістали?

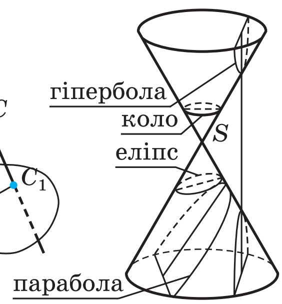
Для допитливих

Джерелом геометричних досліджень *Жерара Дезарга* (1591–1662), відставного військового інженера, була його професійна діяльність як архітектора та інженера. Дезаргу постійно доводилося мати справу з кресленнями, які виконувалися у перспективі.

Основою перспективи є центральне проектування, коли задано фіксовану точку S (центр проекцій) і фіксовану площину α (площину проекцій). Через довільну точку A простору проводять пряму SA (проектуюча пряма), що перетинає площину α у точці A_1, яка називається проекцією точки A (див. мал. **А**).



А



Б

Однією з найоригінальніших ідей Дезарга була пропозиція розглядати так звані конічні перерізи як центральні проекції кола (див. мал. **Б**).

Розділ VI
ЦІКАВІ ДОДАТКИ

Пропоновані у цьому розділі математичні мініатюри – розповіді про те, як геометрія допомагає алгебрі, і навпаки; про властивості золотого перерізу; гармонічні четвірки точок; про елементи проективної геометрії і що можна зробити за допомогою лінійки та нерухомого кола; про побудови Штейнера й інші дива інверсії тощо.

Мета цього розділу – зацікавити вас стародавньою, але вічно квітучою наукою – геометрією, повною розгаданих і нерозгаданих таємниць, вражаючих відкриттів.

Додаток 1

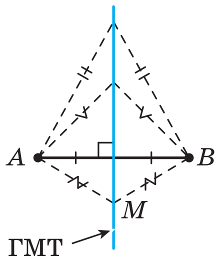
Про відкриття Декарта і пошуки геометричного місця точок площини

Як вам уже відомо, Декарт створив аналітичну геометрію – змусив алгебру працювати на геометрію, та й не лише на неї, а й на фізику, хімію, біологію, географію, кібернетику і т. д. Тепер важко навіть уявити якусь галузь знань, де б не застосовувалася в тій чи іншій формі аналітична геометрія. Координати кожної точки карти штурмана є деяка функція географічних координат (широти і довготи) відповідної точки земної поверхні. Графік температури хворого, кардіограма та інші дослідження стану здоров'я людини на медичному обладнанні також пов'язані з аналітичною геометрією.

Завдяки кібернетиці машина працює на людину, обробляючи подану інформацію за формальними законами.

Творець аналітичної геометрії по праву може бути названий предтечею математичної кібернетики. У випадках, які ми розглянемо, роль математичної машини виконує алгебра.

Наведемо кілька прикладів, як відкриття Декарта допомагає у завданнях на визначення геометричного місця точок площини.



ГМТ рівновіддалених від A і B.

Приклад 1. Що являє собою геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних точок?

На це запитання неважко відповісти і не знаючи аналітичної геометрії, проте метод, за допомогою якого ми розв'яжемо цю задачу (а саме – *метод координат*), корисний і в тих випадках, коли розв'язати задачу без аналітичної геометрії буде важко.

Користуючись методом аналітичної геометрії, міркуємо так: нехай $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ – дві дані точки, $M(x; y)$ – довільна точка шуканого геометричного місця точок. Тоді $|M_1M| = |M_2M|$:

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}.$$

Перше відкриття завжди таке – існують речі, які є сенс відкривати.

Д. Томсон

Піднесемо до квадрата обидві частини рівності та спростимо їх:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0.$$

Якщо позначити

$$-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1} = k \text{ і } \frac{x_2^2+y_2^2-x_1^2-y_1^2}{2(y_2-y_1)} = b,$$

то отримане рівняння набуде вигляду $y = kx + b$.

Очевидно, що k і b – сталі, що не залежать від x і y, тобто шукане геометричне місце точок – пряма.

ГМТ точок M: $\frac{|AM|}{|BM|} = \lambda \neq 1$ – ***коло Аполлонія***

Приклад 2. Що являє собою геометричне місце точок, відношення відстаней від яких до двох даних точок є величиною сталою?

Будь-яке коло є колом Аполлонія.

Дотримуючись загальної схеми, міркуємо так: нехай дано точки $A\,(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, а $M(x; y)$ – довільна точка шуканого геометричного місця точок. Тоді

$$\frac{|AM|}{|BM|} = \frac{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}} = \lambda,$$

де λ – значення цього відношення. Піднесемо обидві частини рівності до квадрата і виконаємо елементарні перетворення:

$$(1 - \lambda^2)(x^2 + y^2) - 2(x_1 - \lambda^2 x_2)x -$$
$$-2(y_1 - \lambda^2 y_2)y + x_1^2 + y_1^2 - \lambda^2(x_2^2 + y_2^2) = 0. \qquad (*)$$

Слід розрізняти два випадки:

1. $\lambda = 1$. Отримане рівняння перетворюється на рівняння прямої – серединного перпендикуляра до відрізка AB:

$$2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y - (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) = 0.$$

2. $\lambda \neq 1$. У цьому випадку, якщо поділити рівняння (*) на $1 - \lambda^2$ і позначити сталі, що не залежать від x і y, через a, b, і c, а саме

$$\frac{x_1 - \lambda^2 x_2}{1-\lambda^2} = a, \quad \frac{y_1 - \lambda^2 y_2}{1-\lambda^2} = b, \quad \frac{x_1^2 + y_1^2 - \lambda^2 (x_2^2 + y_2^2)}{1-\lambda^2} = c,$$

то матимемо рівняння

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

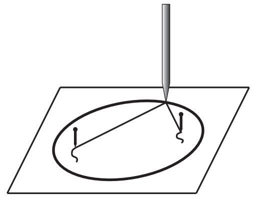
Позначивши $a^2 + b^2 - c = r^2$, дістанемо рівняння кола

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Отже, шуканим геометричним місцем точок є коло.

Наведене вище визначення кола дістало назву *кола Аполлонія Пергського*.

Очевидно, що **будь-яке коло є колом Аполлонія**.

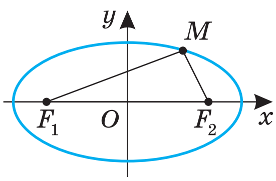


ЕЛІПС

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Приклад 3. *Рівняння еліпса*. ***Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох заданих точок є величиною сталою***. Цю величину позначають як $2a$. Дві дані точки називаються *фокусами еліпса*. Відстань між ними позначають через $2c$.

Візьмемо за вісь абсцис пряму, що проходить через фокуси, а за початок координат – середину відрізка між фокусами (мал. 6.1). Тоді фокуси матимуть координати $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$. Якщо $M(x; y)$ – довільна точка еліпса, то за означенням



Мал. 6.1

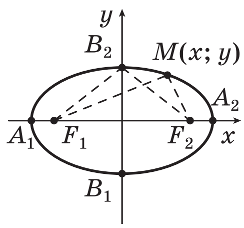
$$|F_1M| + |F_2M| = 2a,$$

або

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Введемо позначення $a^2 - c^2 = b^2$ і виконаємо нескладні перетворення. Тоді останнє рівняння можна звести до вигляду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



$|F_1M| + |F_2M| = 2a$

F_1, F_2 – фокуси;
A_1, A_2, B_1, B_2 – вершини.

Приклад 4. Що являє собою траєкторія точки відрізка сталої довжини, кінці якого переміщуються вздовж двох взаємно перпендикулярних прямих?

Візьмемо ці взаємно перпендикулярні прямі за осі координат. Нехай AB – відрізок, що рухається в певному напрямі, і $M(x; y)$ – точка шуканого геометричного місця точок (мал. 6.2).

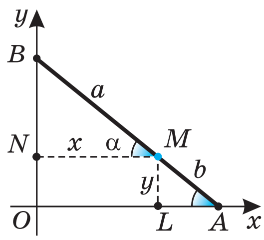
Для допитливих

Якби мені довелося знову почати своє навчання, то я, за порадою Платона, взявся б спершу за математику – науку, яка вимагає точності і приймає за правильне тільки те, що випливає як наслідок із доведеного.

Галілео Галілей

Проведемо $NM \parallel Ox$ і $LM \parallel Oy$. Очевидно, що $NM = x$ і $LM = y$.

Нехай $BM = a$, $MA = b$, $\angle BMN = \angle MAL = \alpha$. Зауважимо, що при заданому русі відрізка AB значення a і b не змінюються.



Мал. 6.2

З малюнка видно, що

$$x = a\cos\alpha \text{ і } y = b\sin\alpha.$$

Звідси:

$$\frac{x}{a} = \cos\alpha \text{ і } \frac{y}{b} = \sin\alpha.$$

Піднесемо до квадрата ліві й праві частини останніх рівнянь і додамо їх:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Маємо рівняння еліпса. Отже, *шукана траєкторія – еліпс.*

Розв'яжіть **самостійно** методом координат такі задачі.

1. Знайдіть геометричне місце точок M, для яких $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$, де ABC – прямокутний трикутник із прямим кутом C.

Відповідь: пряма, що проходить через середину гіпотенузи.

2. Уздовж радіуса патефонної платівки, що рівномірно обертається, рівномірно рухається муха. Знайдіть траєкторію руху мухи.

Відповідь: спіраль Архімеда $\rho = a\varphi \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} = \frac{y}{x}$.

3. Знайдіть геометричне місце точок, різниця відстаней від яких до двох заданих точок (фокусів) є величиною сталою.

Відповідь: гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від деякої точки (фокуса) і від деякої прямої (директриси).

Відповідь: парабола $y^2 = 2px$, p – відстань між фокусом і директрисою.

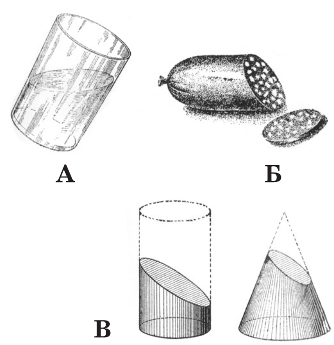
5. Знайдіть геометричне місце точок, відношення відстаней від яких до даної точки (фокуса) і до даної прямої (директриси) є величиною сталою. Покажіть: **а)** якщо відношення менше за 1, то крива є еліпсом; **б)** якщо відношення більше за 1, – гіперболою; **в)** якщо відношення дорівнює 1, – параболою. (Порада. Скористайтеся формулами паралельного перенесення.)

6. Точки перетину з віссю абсцис еліпса, гіперболи і параболи, якщо брати рівняння кривих у тому вигляді, як вони у нас записані, є вершинами кривих. Вер-

Для допитливих

Форму еліпса ми часто зустрічаємо в житті. Якщо, наприклад, нахилити склянку з водою, то форма поверхні води буде еліпсом (мал. **А**). Аналогічно, якщо від шматка ковбаси циліндричної форми відрізати скибки, ставлячи ніж навскіс, то вони матимуть форму еліпса (мал. **Б**).

Узагалі, якщо прямий циліндр або конус розрізати так, щоб не зачепити основи, то в розрізі будемо мати еліпс (мал. **В**).



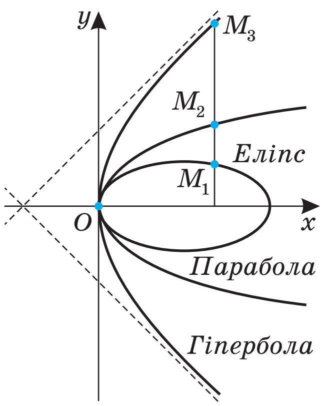
А Б В

шина параболи збігається з початком координат. Доведіть, що коли перенести в початок координат ліву вершину еліпса і праву вершину гіперболи, то рівняння кривих матимуть вигляд:

Для еліпса	Для гіперболи	Для параболи
$y^2 = 2px - \frac{b^2}{a^2}x^2$	$y^2 = 2px + \frac{b^2}{a^2}x^2$	$y^2 = 2px$

(У випадку еліпса й гіперболи введено позначення $p = \frac{b^2}{a}$.)

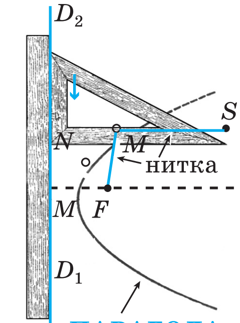
Виписані в останньому завданні рівняння є рівняннями кривих, віднесених до вершини (мал. 6.3). Такі рівняння були відомі ще Аполлонію Пергському (262–190 рр. до н. е.) – молодшому з трьох найвизначніших геометрів Стародавньої Греції (Евклід, Архімед, Аполлоній). Він відомий, у першу чергу, трактатами про конічні перерізи (еліпс, гіпербола, парабола), що складали вельми повний обсяг знань про ці криві. Тільки, зрозуміло, що ні про яку символіку на той час не йшлося.



Мал. 6.3

У ті часи властивості кривих, які ми записали за допомогою рівнянь, Аполлоній формулював незграбною мовою «геометричної алгебри»: добуток двох чисел греки називали площею прямокутника, довжини сторін якого дорівнюють цим числам, квадрат числа – площею відповідного квадрата.

Тоді (враховуючи, що вісь абсцис для всіх трьох кривих є віссю симетрії, або просто віссю) мовою геометричної алгебри останні рівняння читали б приблизно так: «Еліпс є геометричним місцем точок, для яких площа квадрата, побудованого на відрізку, опущеному з початку координат на вісь, менша за площу прямокутника, однією стороною якого є відрізок сталої довжини $2p$, а другою – відрізок від вершини до основи зазначеного перпендикуляра».



ПАРАБОЛА

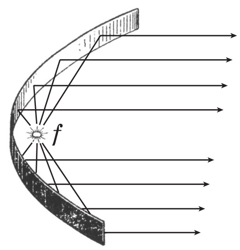
D_1D_2 – фіксована пряма

F – фіксована точка (фокус)

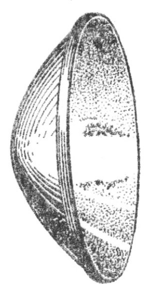
NS – довжина нитки

$FM = NM$

$FM + MS = NM + MS = \text{const}$



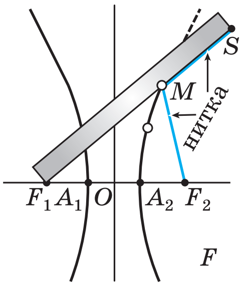
Параболічне дзеркало



Для допитливих

Цікаво, що, як ми не повертали б дуло гармати (в одній вертикальній площині), завжди при фіксованій швидкості вильоту снаряда зону, куди снаряд долетіти не може, обмежує парабола (див. мал.).

ГІПЕРБОЛА



F_1, F_2 – фіксовані точки (*фокуси*)

F_2S – довжина нитки

$MF_1 - MF_2 =$
$= (MF_1 + MS) -$
$- (MF_2 + MS) =$
$= F_1S - \underbrace{(MF_2 + MS)}$

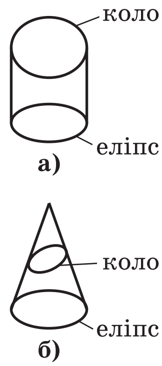
const

$MF_1 - MF_2 = \text{const}$

Якщо в наведеному порівнянні площі квадрата і прямокутника замінити слово «менше» на «більше», отримаємо опис гіперболи, а якщо на «дорівнює», – параболи.

До речі, назви «еліпс», «гіпербола», «парабола» дав саме Аполлоній. У перекладі з грецької вони приблизно означають: «еліпс» – *недостача*; «гіпербола» – *надлишок*; «парабола» – *рівність*.

Наприкінці зауважимо, що в результаті паралельного або центрального проектування кола завжди маємо еліпс (див. мал. 6.4). Ви вже ознайомлювалися з властивостями як паралельного, так і центрального проектування (с. 186, 208). Таке перетворення фігур ще називають *афінним*. Існує окремий розділ геометрії, що вивчає властивості афінних перетворень – афінна геометрія. Еліпсу можна дати й таке означення.



Мал. 6.4

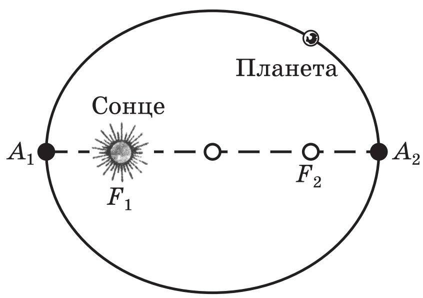
Еліпсом називається крива, яку можна отримати афінним перетворенням кола, або, що є тим самим, – *крива, яку афінним перетворенням можна відобразити у коло.*

Більше дізнатися з цієї теми можна в літературі:

1. *Берман Г. Н.* Циклоида. – М.: Наука, 1980.
2. *Гельфанд* и др. Метод координат. – М.: Наука, 1966.
3. *Дубнов Я. С.* Введение в аналитическую геометрию: Пособие для самообразования. – М.: Физматгиз, 1959.
4. *Маркушевич А. И.* Замечательные кривые. – М.: Наука, 1978.
5. *Никулин А. В., Кукуш А. Г., Татаренко Ю. С.* Геометрия на плоскости: Планиметрия. – Минск: ООО «Попурри», 1996.
6. *Терешин Н. А.* Прикладная направленность школьного курса математики. – М.: Просвещение, 1990.
7. *Шарыгин И. Ф.* Геометрия 7–9 кл. – М.: Дрофа, 2001.
8. *Яглом И.М., Ашкинузе В.Г.* Идеи аффинной и проэктивной геометрии. – М.: Учпедизд, 1962.

Для допитливих

Ще *Йоган Кеплер* (1571–1630) з'ясував, що планети обертаються навколо Сонця не вздовж кіл, як думали раніше, а по еліпсах, причому Сонце знаходиться в фокусі кожного еліпса (див. мал.). Один раз, протягом одного оберту навколо Сонця, планета буває у вершині еліпса A_1, найближчій до Сонця, – це так званий *перигелій*; один раз у вершині A_2, найбільше віддаленій від Сонця, – в *афелії*.



Взимку Земля знаходиться у перигелії, а влітку – в афелії (залежно від положення осі обертання Землі).

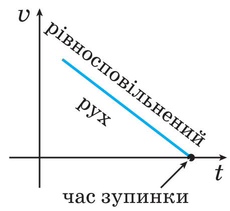
Еліпс, по якому рухається Земля, трохи «сплюснутий» – схожий на коло.

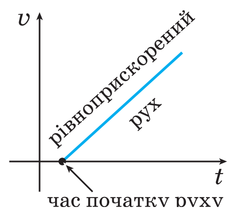
Ще раз про відкриття Декарта, завдяки якому геометрія може допомагати алгебрі

Задачі на складання рівнянь, або текстові алгебраїчні задачі, з одного боку, представляють собою традиційний розділ елементарної математики, а з іншого – їх умови є безпосереднім формулюванням життєвих завдань. Тому не дивно, що геометрія, яка вивчає властивості просторових форм, що нас оточують, їх взаємне розміщення, часто спрощує пошук розв'язування таких задач, особливо задач, пов'язаних із рухом тіл. І знову посередником між алгеброю і геометрією виступає відкриття Декарта. Розглянемо кілька прикладів.

Застосування діаграм і графіків до розв'язування задач може замінити або значно полегшити обрахунки.

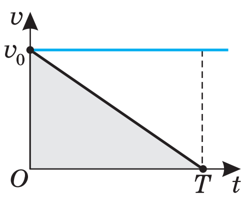
Приклад 1. Поїзд рухається прямолінійно і рівномірно зі швидкістю v_0 км/год. У деякий момент часу від нього відчепився останній вагон, який почав рухатися рівносповільнено. Знайдіть відношення шляхів, що пройшли поїзд і вагон за час від моменту відчеплення вагона до повної його зупинки.





Розв'язання

По осі абсцис будемо відкладати час, який минув від моменту відчеплення вагона, а по осі ординат – швидкість поїзда і вагона. Будуємо графіки (мал. 6.5).



Мал. 6.5

Шлях, який пройшов потяг за час T (від моменту відчеплення вагона до його зупинки), дорівнює площі прямокутника зі сторонами T і v_0.

Шлях, який пройшов вагон за час T, дорівнює половині площі цього прямокутника.

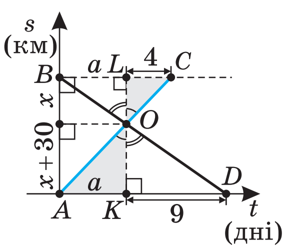
Відповідь: 2.

Важлива особливість *геометричної інтерпретації алгебраїчної задачі* в її наочності: видно зв'язки між величинами, які входять в умову задачі.

Це дає змогу розширити задачу – поставити і розв'язати й більш узагальнені питання, глибше зазирнути у суть задачі.

Приклад 2. Два туристи вийшли одночасно назустріч один одному з пунктів A і B. Коли вони зустрілися, з'ясувалося, що перший пройшов на 30 км більше, ніж другий, і що через 4 дні він буде в пункті B. Другий прийде в пункт A через 9 днів після зустрічі. Знайдіть відстань між пунктами A і B.

Розв'язання



Мал. 6.6

По осі абсцис відкладатимемо час, який минув із початку подорожі туристів, а по осі ординат – їхні відстані від пункту A (мал. 6.6).

Тоді пряма AC буде графіком руху першого туриста, пряма BD – графіком руху другого, а точка O – момент їх зустрічі.

Позначимо шлях, який пройшов другий турист до зустрічі, через x, а відповідний час – через a. Маємо: $OL = x$, $OK = x + 30$, $AK = a$, $LC = 4$, $KD = 9$.

Прямокутні трикутники AOK і COL – подібні ($\angle AOK = \angle COL$ як вертикальні); трикутники DOK і BOL – подібні ($\angle DOK = \angle BOL$ як вертикальні). Тоді

$$\frac{LC}{AK} = \frac{OL}{OK} = \frac{BL}{KD}, \ \frac{4}{a} = \frac{x}{x+30} = \frac{a}{9}.$$

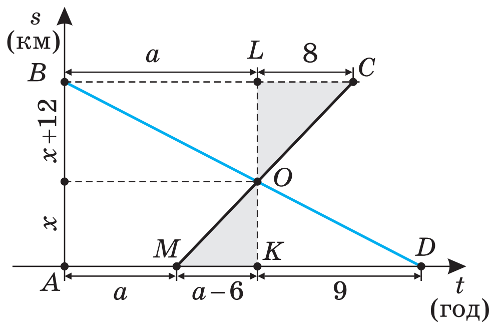
Звідси: $a = 6$, $x = 60$.

Відповідь: 60 км.

Приклад 3. Із пунктів A і B назустріч один одному йдуть два пішоходи. Перший вийшов із пункту A на 6 год пізніше, ніж другий із пункту B. Коли пішоходи зустрілися, з’ясувалося, що перший пройшов на 12 км менше, ніж другий. Після зустрічі перший прийшов у пункт B через 8 год, а другий у пункт A – через 9 год. Знайдіть швидкості пішоходів.

Розв’язання

По осі абсцис відкладатимемо час, який минув із моменту виходу другого пішохода з пункту B, а по осі ординат – відстань, яку проходили туристи (мал. 6.7). Точка M на осі абсцис відповідає моменту часу, коли вийшов перший пішохід, а точка O – моменту зустрічі пішоходів; пряма MC буде графіком руху першого пішохода, пряма BD – графіком руху другого.



Мал. 6.7

Шлях, який пройшов перший турист до зустрічі, позначимо через x, а час, який затратив другий турист на шлях до зустрічі, – через a.

З подібності трикутників OLC і OKM та OLB і OKD маємо:

$$\frac{LC}{MK} = \frac{OL}{OK} = \frac{BL}{KD}, \ \frac{8}{a-6} = \frac{x+12}{x} = \frac{a}{9}.$$

Звідси, враховуючи, що $a > 0$, отримаємо: $a = 12$, $x = 36$.

Шукані швидкості дорівнюють:

$$v_1 = \frac{x}{a-6} = 6, \ v_2 = \frac{x+12}{a} = 4.$$

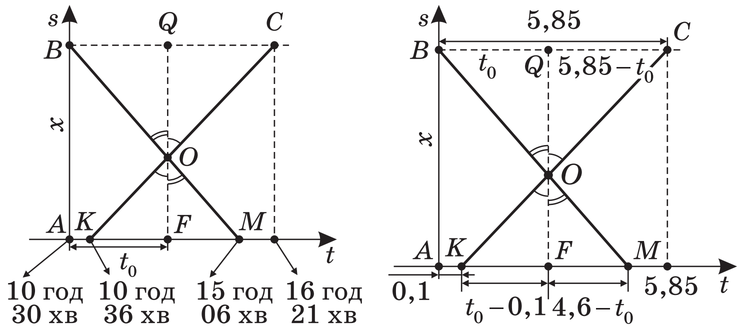
Відповідь: 6 км/год і 4 км/год.

Тепер, після ознайомлення з попередніми прикладами, розв’язування наступних задач про час зустрічі не викличе у вас труднощів.

Приклад 4. Два приятелі вийшли на прогулянку: перший із села A о 10 год 36 хв, а другий із села B о 10 год 30 хв. О котрій годині вони зустрілися, якщо перший прийшов у село B о 16 год 21 хв, а другий – у село A о 15 год 06 хв?

Розв'язання

Відкладатимемо по осі ординат відстань від села A, а по осі абсцис – час, починаючи з 10 год 30 хв (мал. 6.8-а). Позначимо як t_0 час, витрачений другим приятелем на шлях до зустрічі.



а) б)

Мал. 6.8

Як і раніше, маємо дві пари подібних трикутників. Тому

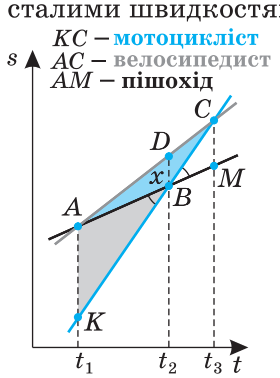
$$\frac{BQ}{FM}=\frac{QO}{OF}=\frac{QC}{KF},\quad BQ\cdot KF=QC\cdot FM.$$

Знайдемо довжини відрізків, які входять в останнє співвідношення (мал. 6.8-б). Після нескладних обчислень маємо $t_0 = 2{,}6$ год і час зустрічі приятелів:

$$(10{,}5+2{,}6)\text{ год} = 13{,}01\text{ год} = 13\text{ год } 6\text{ хв}.$$

Відповідь: о 13 год 6 хв.

Приклад 5. Пішохід, велосипедист і мотоцикліст рухаються прямолінійним шосе в одному напрямі зі сталими швидкостями. У момент, коли пішохід і велосипедист знаходилися в одній точці, мотоцикліст відставав від них на 6 км. Коли мотоцикліст наздогнав велосипедиста, пішохід відставав від них на 3 км. На скільки кілометрів велосипедист випереджав мотоцикліста, коли той наздогнав пішохода?

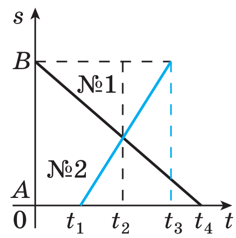


Мал. 6.9

Розв'язання

Побудуємо графіки руху мандрівників (мал. 6.9). У момент часу t_1 – велосипедист наздогнав пішохода, у момент t_2 – мото-

Рівномірний рух назустріч



$t = 0$ – час початку руху №1;

t_1 – час початку руху №2;

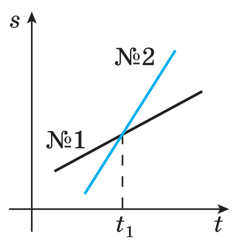
t_2 – час зустрічі;

t_3 – №2 закінчив рух $A \to B$;

t_4 – №1 закінчив рух $B \to A$.

Розв'язування задач виконується шляхом обчислень за *ескізами креслень*, але на підставі *точних геометричних співвідношень*.

Рівномірний рух в один бік



t_1 – час, коли №2 наздогнав №1

цикліст наздогнав пішохода, а в момент t_3 – мотоцикліст наздогнав велосипедиста. Тоді на малюнку 6.9 $AK = 6$ км, $CM = 3$ км, $DB = x$ – шукана відстань.

З подібності трикутників ABK і MBC маємо:

$$\frac{KB}{BC} = \frac{AK}{CM} = \frac{6}{3} = 2.$$

З подібності трикутників AKC і DBC маємо:

$$\frac{KB + BC}{BC} = \frac{AK}{DB} = \frac{6}{x} \text{ і } \frac{KB}{BC} = \frac{6}{x} - 1.$$

Тоді $\frac{KB}{BC} = 2 = \frac{6}{x} - 1$, звідси: $x = 2$.

Відповідь: 2 км.

Приклад 6. Із пункту O зі швидкістю 10 км/год виїхав вершник. Одночасно з ним із пункту Q виїхав велосипедист зі швидкістю 20 км/год. У момент початку руху вершника муха, яка сиділа на ньому, вилетіла назустріч велосипедисту, долетіла до нього, миттєво розвернулася і полетіла назад до вершника; прилетівши до нього, миттєво розвернулася і полетіла до велосипедиста і т. д. до моменту зустрічі вершника з велосипедистом. Скільки кілометрів пролетіла муха, якщо її швидкість дорівнює 60 км/год, а відстань між пунктами O і Q становить 90 км? Скільки кілометрів пролетить муха в напрямі з O в Q і скільки у зворотному напрямі?

Розв'язання

На перше запитання задачі знайти відповідь легко, якщо визначити час руху мухи – час, який їхали вершник і велосипедист до зустрічі:

$$t = \frac{90}{10 + 20} = 3 \text{ (год)}; \ s_0 = 60 \cdot 3 = 180 \text{ (км)}.$$

Знайти відповідь на друге запитання допоможе графічне зображення руху вершника, велосипедиста і мухи (мал. 6.10). Точка P – точка зустрічі вершника і велосипедиста.

Рух мухи зображено кольоровою ламаною: відрізок OA – рух мухи від вершника до велосипедиста, відрізок AB – повернення мухи до вершника і т. д. Сума вертикальних проекцій ламаної дорівнює загальному шляху, який пролетіла муха.

Через точки A, B, C, ..., що відповідають поворотам мухи, проведемо прямі, паралельні осі ординат. Відрізки OA і AB, AB і BC, ... перетинають ці вертикалі під одним і тим самим кутом, який позначимо через α.

Продовжимо відрізок OA до перетину з останньою вертикаллю, проведеною через точку P. Маємо:

$$AA_0 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1 \parallel \ldots,$$
$$\angle OAA_0 = \angle A_0AB = \angle ABB_1 = \angle B_1BC = \ldots = \alpha.$$

Тоді $AB = AB_1$ і CBB_1C_1 – паралелограм і $BC = B_1C_1$; DCC_1D_1 – рівнобічна трапеція і $CD = C_1D_1$; ... . Тобто довжина ламаної $OABCD...P$ дорівнює довжині відрізка OP_1. Довжина проекції цього відрізка на вісь Os дорівнює 180. Це і є відстань, яку пролетіла муха.

Якщо продовжити відрізки CD, EK, ... до перетину з прямою OA, то отримаємо: $OA + BC + DE + \ldots + = OP_2$ (бо всі ці відрізки паралельні OA).

Проекція цього відрізка на вертикаль дорівнює сумі відстаней, які муха пролетіла в напрямі від O.

Врахуємо, що $BA \parallel DC_2 \parallel \ldots \parallel PP_2$ і $\angle C_2CC_1 = \alpha$. Тоді $\angle P_2PP_1 = \alpha = \angle P_2P_1P$, трикутник PP_2P_1 – рівнобедрений і $P_2P_1 = P_2P$.

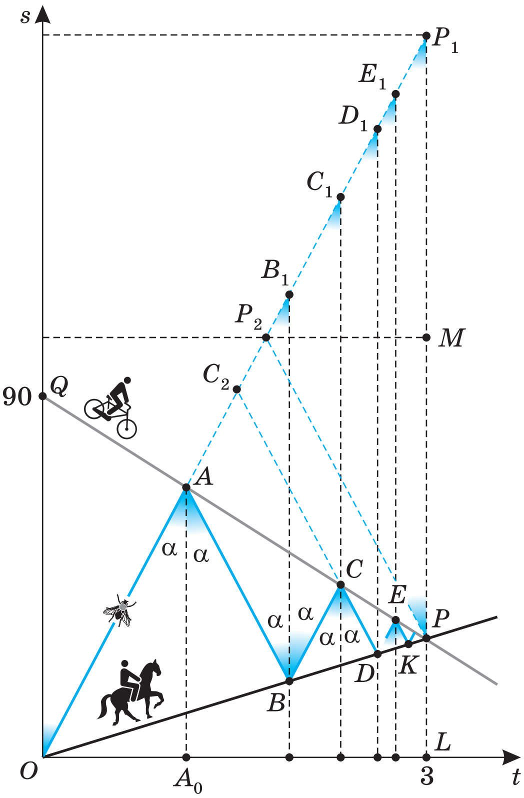
Звідси проекція відрізка OP_2 на вертикаль дорівнює

$$LM = LP + PP_1 : 2 = LP + (LP_1 - LP) : 2 = LP : 2 + LP_1 : 2.$$

Враховуючи, що LP – це відстань, яку проїхав вершник за 3 год, а $LP_1 = 180$ км, то $LM = 3 \cdot 10 : 2 + 90 = 105$.

Тоді відстань, яку пролетіла муха у напрямі з O в Q, дорівнює різниці $180 - 105 = 75$ км.

Відповідь: 75 км – у напрямі з O в Q і 105 км – у напрямі з Q в O.



Мал. 6.10

Особливо доцільно спиратися на геометричну інтерпретацію, коли рівномірно рухаються кілька об'єктів, коли учасники руху змінюють напрям свого руху на протилежний і відбувається кілька зустрічей (їм відповідають точки перетину графіків руху).

Приклад 7. Підприємство випускає вироби двох типів. Обробка кожного виробу першого типу триває 5 год у цеху A і 3 год у цеху B. Обробка кожного виробу другого типу триває 2 год у цеху A і 4 год у цеху B. Цех A може працювати не більше як 150 год на місяць, а цех B – не більше як 132 год на місяць. З кожного виробу першого і другого типів підприємство отримує прибуток у 300 грн. та 200 грн. відповідно. Визначте, скільки виробів кожного типу потрібно виготовляти щомісяця, щоб забезпечити підприємству найбільший прибуток. Знайдіть цей прибуток.

Розв'язання

Позначимо через x і y кількість виробів першого і другого типу відповідно, що виготовляються за місяць, а через F – прибуток підприємства.

Тоді

$$F(x; y) = 300x + 200y.$$

При цьому

$$\begin{cases} 5x + 2y \leqslant 150 \\ 3x + 4y \leqslant 132 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leqslant 75 - 2{,}5x \\ y \leqslant 33 - 0{,}75x \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0. \end{cases}$$

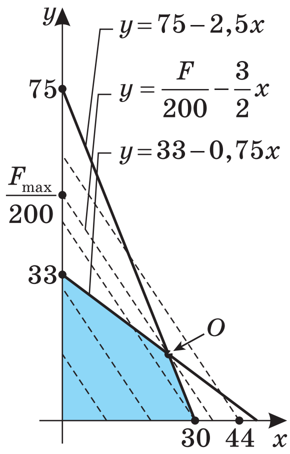
Побудуємо відповідне ГМТ на координатній площині (мал. 6.11).

Шукане $F_{max} \geqslant 300x + 200y$, звідси $y \leqslant \frac{F_{max}}{200} - \frac{3}{2}x$, де $(x; y)$ – точки побудованого ГМТ.

Рівняння $y = \frac{F}{200} - \frac{3}{2}x$ визначає систему паралельних прямих із кутовим коефіцієнтом k. Значення $k = -\frac{3}{2}F_{max}$ визначатиме положення прямої $y = \frac{F}{200} - \frac{3}{2}x$, коли вона проходить через точку O (24; 15) – точку перетину прямих $5x + 2y = 150$ і $3x + 4y = 132$.

Отже, $F_{max} = 300 \cdot 24 + 200 \cdot 15 = 10\,200$.

Відповідь: 24 і 15; 10 200 грн.



Мал. 6.11

Приклад 8. На шкільній олімпіаді було запропоновано для розв'язування 10 задач. За кожну правильно розв'язану задачу нараховувалося по 5 балів, а за кожну нерозв'язану – знімалося по 3 бали. Скільки задач було правильно розв'язано учнем, який у підсумку отримав: **а)** 34 бали; **б)** 10 балів?

Розв'язання

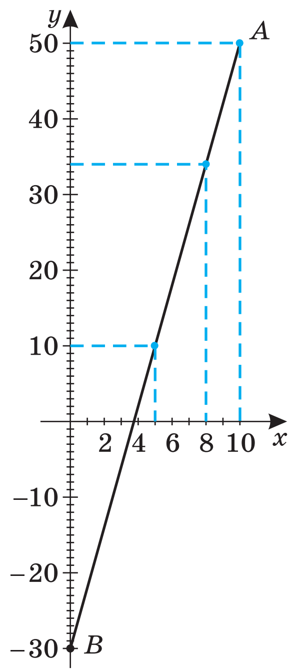
Будемо розглядати підсумкове число балів як функцію y аргументу x – числа розв'язаних задач. Причому, якщо бали знімають, вважатимемо це нарахуванням від'ємних балів.

Зрозуміло, що аргумент може набувати лише цілих значень від 0 до 10 – всього 11 значень. Тоді і функція y також може мати лише 11 цілих значень. Тобто графіком даної функції буде не лінія, а одинадцять окремих точок.

Якщо задача зарахована, число балів збільшується на 8 (не знято 3 бали і додали 5 балів). Зрозуміло, що рівним різницям між значеннями аргументу відповідають рівні різниці між значеннями функції. А це є ознакою лінійної залежності.

Побудуємо відповідну пряму за двома точками:

- за розв'язання всіх 10 задач нараховується $5 \cdot 10 = 50$ балів – позначаємо точку $A(10; 50)$;
- той, хто не розв'язав жодної задачі, отримує $(-3) \cdot 10 = -30$ балів – маємо точку $B(0; -30)$.



Мал. 6.12

Тепер треба провести пряму AB (мал. 6.12) і позначити на ній точки для значення аргументу від 0 до 10. Відповідні значення функції дають шукану відповідь.

Відповідь: **а)** 8 задач; **б)** 5 задач.

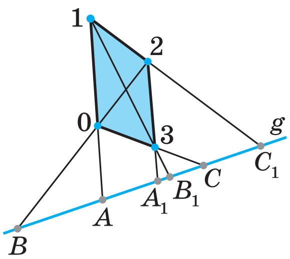
Більше дізнатися з цієї теми можна в літературі:

1. *Лурье Б. И.*, *Александров Б. И.* Задачи на составление уравнений. – М.: Наука, 1990.
2. *Островский А. И.*, *Кордемский Б. А.* Геометрия помогает арифметике. – М.: АО «Столетие», 1994.

Гармонічні четвірки точок

Гармонічні четвірки точок були відомі ще *Паппу Александрійському*. У «Геометрії–8» ми вже доводили одну з теорем Паппа. Продовжимо знайомство з цим видатним математиком минулого.

Папп був одним з останніх видатних представників Александрійської школи геометрів. Твори Паппа дійшли до нас лише частково. Але й зі збереженого можна пізнати багато цікавого про втрачені твори його попередників, наприклад Евкліда, Аполлонія, Зенодора.



Мал. 6.13

Розглянемо, за Паппом, у деякій площині чотири точки 0, 1, 2, 3 (три з яких не лежать на одній прямій) і пряму g, яка не проходить через жодну з цих точок (мал. 6.13). Позначимо точки перетину прямої g з прямими (01) і (23) через A і A_1, точки перетину g з прямими (02) і (31) як B і B_1, точки перетину g з прямими (03) і (12) – через C і C_1. При цьому, як довів Папп, відстані між цими шістьма точками прямої пов'язані таким співвідношенням:

$$\frac{AA_1}{AB} : \frac{CA_1}{CB} = \frac{A_1A}{A_1B_1} : \frac{C_1A}{C_1B_1}.$$

Вираз, що стоїть у лівій частині рівності, називається *подвійним, або складним, відношенням чотирьох точок* A, C, A_1, B, узятих у цій послідовності:

$$W(ACA_1B) = \frac{AA_1}{AB} : \frac{CA_1}{CB}.$$

При цьому вважається, якщо змінюється напрям відрізка на прямій, то знак довжини цього відрізка змінюється на протилежний. Тобто $AA_1 = -A_1A$.

Рівність Паппа означає збіг подвійних відношень

$$W(ACA_1B) = W(A_1C_1AB_1).$$

З усіх четвірок точок прямої *гармонічна четвірка* характеризується тим, що для неї подвійне відношення

$$W(ABCD) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$$

завжди дорівнює або –1, або 2, або $\frac{1}{2}$.

Про гармонічні четвірки точок можна було б розповісти дивні речі. Ми обмежимося викладом лише деяких фактів.

КОЛО АПОЛЛОНІЯ І ДОТИЧНА ДО КОЛА

Нагадаємо (див. додаток 1), що, *за Аполлонієм, коло є геометричним місцем точок, відношення відстаней від яких до двох даних точок є величиною сталою* (λ).

Будь-яке коло є колом Аполлонія. Відомо, що розв'язання задачі Аполлонія про побудову кола містив його твір «Про дотики», але він був загублений. Згодом ця задача піддалася багатьом математичним дослідженням, до неї зверталися такі видатні математики, як Л. Ейлер і І. Ламберт.

Нехай A і B – дані означенням кола, за Аполлонієм, точки, а C і D – точки перетину прямої AB з цим колом (мал. 6.14-а). Оскільки для кола виконуються рівності

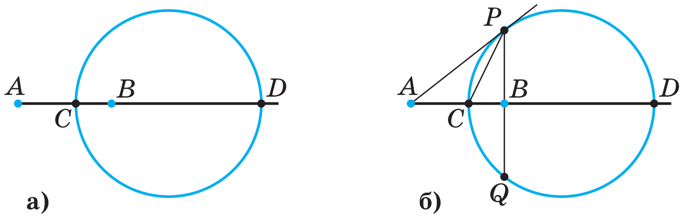
$$\frac{AC}{CB}=\lambda \text{ і } \frac{AD}{BD}=\lambda, \text{ то } \frac{AC}{CB}=\frac{AD}{BD}.$$

У цьому разі, якщо врахувати, що $BD=-DB$, маємо:

$$W(ABCD)=\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=-1,$$

а це означає, що четвірка точок A, B, C, D є гармонічною. Сформулюємо висновок.

Якщо коло Аполлонія задано відносно точок A і B, а пряма AB перетинає це коло в точках C і D (при чому: A – зовні кола, C – між A та B), то четвірка точок A, B, C, D є гармонічною, $W(ABCD) = -1$.



Мал. 6.14

Проведемо тепер із точки A дотичну AP до кола і точку P сполучимо з точкою B (мал. 6.14-б). З означення Аполлонія випливає, що

$$\frac{AP}{BP}=\frac{AC}{CB},$$

а це означає, що PC – бісектриса кута APB. Кут APC вимірюється половиною дуги CP, як кут між дотичною і хордою, проведеною в точку дотику, а кут CPB – половиною дуги CQ. Отже, дуги CP і CQ рівні і пряма PB перпендикулярна до AB. Сформулюємо висновок.

Якщо коло Аполлонія задано відносно точок A, B (A зовні кола) і AP – дотична до цього кола, то пряма PB перпендикулярна до AB.

БІСЕКТРИСИ ВНУТРІШНЬОГО І ЗОВНІШНЬОГО КУТІВ ТРИКУТНИКА

Нехай AOB – довільний трикутник (мал. 6.15), OC – бісектриса його кута, OD – бісектриса його зовнішнього кута. За властивістю бісектрис внутрішнього і зовнішнього кутів трикутника маємо:

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AO}{BO} \text{ і } \frac{AD}{BD}=\frac{AO}{BO}.$$

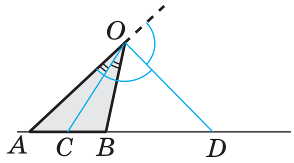
Для допитливих

Те, що знаєш у дитинстві, – знаєш на все життя, але й чого не знаєш у дитинстві, – не знаєш на все життя.

М. І. Цвєтаєва

Звідси:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD}.$$



Мал. 6.15

Знову, використовуючи рівність $BD = -DB$, дістанемо:

$$W(ABCD) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1.$$

Маємо, що $W(ABCD) = -1$. A, B, C, D – гармонічна четвірка точок. Звідси точки C і D належать колу Аполлонія, визначеному відносно точок A і B. Як відомо, бісектриси суміжних кутів взаємно перпендикулярні, тоді відрізок CD – діаметр цього кола. Сформулюємо висновок.

1. Якщо в трикутнику ABO відрізки OC і OD – бісектриси його внутрішнього і зовнішнього кутів відповідно, то четвірка точок A, B, C, D є гармонічною, $W(ABCD) = -1$.

2. Відрізок з кінцями в основах бісектрис внутрішнього і зовнішнього кутів трикутника при одній з його вершин є діаметром кола Аполлонія, визначеного відносно двох інших вершин цього трикутника.

ФОРМУЛА ТОНКОЇ ЗБИРАЛЬНОЇ ЛІНЗИ

Пригадаємо відому вам з фізики формулу тонкої лінзи

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

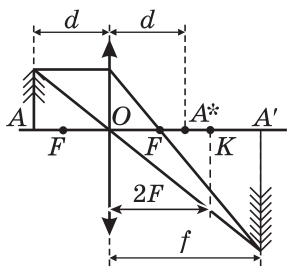
де d – відстань від центра лінзи O до предмета, f – відстань від точки O до зображення, F – фокусна відстань, тобто відстань від фокуса лінзи до її центра (мал. 6.16). Нехай K – точка, віддалена від центра лінзи на подвійну фокусну відстань. Перепишемо подану вище формулу у вигляді $Ff + Fd = fd$, помножимо останню рівність на 2 і згрупуємо так: $2Ff - fd = -2Fd + fd$.

Звідси маємо:

$$\frac{f}{2F - f} : \frac{d}{2F - d} = -1.$$

Тоді

$$\frac{OA'}{A'K} : \frac{OA^*}{A^*K} = -1,$$



Мал. 6.16

де A^*– точка, симетрична точці A відносно центра O.

Тобто четвірка точок O, K, A', A^* є гармонічною.

Більше дізнатися з цієї теми можна в літературі:

1. *Курант Р.*, *Роббинс Г.* Что такое математика. – М.: Просвещение, 1967.
2. Математична хрестоматія / За ред М. І. Кованцова. – К.: Рад. шк., 1970.

Для допитливих

Математика не тільки підготує учня до вивчення природничих наук, навчить його мислити правильно і послідовно; вона ще, крім того, виховає з нього безстрашного працівника, для якого праця і нудьга стануть несумісними поняттями.

Д. І. Писарев

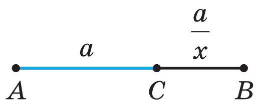
Знову про золотий переріз

Принцип золотого перерізу використовувався і використовується в архітектурі, живопису, графіці тощо, існує він і в природі – наприклад, пропорції фігури людини підпорядковані цьому принципу. Усе це ви вже знаєте з 7-го класу. Але тепер, коли ви володієте значно ширшим математичним інструментарієм, ніж у 7-му класі, пропонуємо повернутися до розгляду золотого перерізу.

Нагадаємо, що **золотий переріз – це такий поділ цілого на дві нерівні частини, при якому ціле відноситься до більшої частини так, як більша частина до меншої.**

Спробуємо знайти значення такого відношення.

Нехай маємо довільний відрізок AB і точку C на ньому (мал 6.17). Якщо точка C ділить цей відрізок за принципом золотого перерізу, то виконується співвідношення:



Мал. 6.17

$$AB : AC = AC : CB.$$

За такого розміщення точки C на відрізку AB кажуть, що точка C ділить відрізок AB у *крайньому і середньому відношенні*.

Позначимо шукане відношення через x, а довжину AC через a. Тоді

$$\frac{AB}{a}=\frac{a}{CB}=x \text{ і } CB=\frac{a}{x},\quad AB=ax=a+\frac{a}{x}.$$

Маємо рівняння

$$x=1+\frac{1}{x},\ x^2-x-1=0.$$

Це рівняння має два корені

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Геометричний зміст має тільки додатний корінь.

Таким чином, ми довели таке твердження: **точка заданого відрізка ділить його за принципом золотого перерізу (у крайньому і середньому відношенні) тоді і тільки тоді, коли відношення більшої його частини до меншої дорівнює** $\mathbf{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Саме це число називають *золотим перерізом* і позначають літерою φ. Це число ірраціональне і наближено дорівнює $\varphi \approx 1{,}61803398$.

Літера φ, якою позначають золотий переріз, – це перша літера імені давньогрецького скульптора Фідія (приблизно 430 р. до н. е.), який у своїх скульптурах часто застосовував золотий переріз.

Нагадаємо, що *прямокутник називають золотим, якщо відношення довжин його сторін дорівнює числу φ – золотому перерізу*. Доведемо вже

Для допитливих

Щирого геометра наділено уявою і відчуттям форми, краси геометричного факту. Цим він подібний до скульптора.

О. Д. Александров

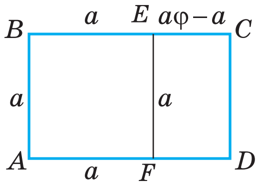
відому вам імперично (суто практично) властивість золотого прямокутника.

Т е о р е м а. **Якщо від золотого прямокутника відрізати квадрат, то прямокутник, який залишився, також буде золотим.**

Д о в е д е н н я

Нехай $ABCD$ – золотий прямокутник, $ABEF$ – квадрат (мал. 6.18). Позначимо сторону квадрата через a. Тоді

$$AB = BE = a,\ BC = \varphi a,\ EC = \varphi a - a = a(\varphi - 1).$$



Мал. 6.18

Знайдемо відношення сторін прямокутника $ECDF$:

$$\frac{EF}{EC} = \frac{a}{a(\varphi-1)} = \frac{1}{\varphi-1}.$$

Пригадаємо, що φ є коренем рівняння $x = 1 + \frac{1}{x}$, тому

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \text{ і } \frac{EF}{EC} = \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}-1} = \varphi.$$

Теорему доведено.

Розглянемо ще одну цікаву властивість золотого перерізу.

Т е о р е м а. **Відношення радіуса кола R до сторони a_{10} правильного десятикутника, вписаного в це коло, є золотим перерізом.**

Д о в е д е н н я

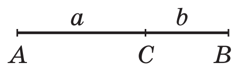
Сторона правильного десятикутника, вписаного в коло радіуса R, дорівнює $a_{10} = 2R \sin 18°$ (с. 89), тоді

$$\frac{R}{a_{10}} = \frac{1}{2\sin 18°} = \frac{1}{2\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1} = \frac{1}{\varphi-1} = \varphi.$$

Теорему доведено.

Рівнобедрений трикутник називають золотим, якщо відношення бічної сторони до основи цього трикутника дорівнює золотому перерізу.

Коли у 8-му класі ми виводили формулу для значення синуса 18°, то розглядали рівнобедрений трикутник із кутом 36° при вершині (див. «Геометрія–8»). Саме такі трикутники утворюються, якщо сполучити всі вершини правильного десятикутника з його центром. Ці трикутники і є золотими.



$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

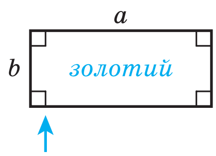
золотий переріз

або

***C* ділить *AB* у крайньому і середньому відношенні**

тоді і тільки тоді, коли:

$$\frac{a}{b} = x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



$\frac{a}{b} = \varphi$ – золотий переріз

φ – корінь рівняння

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62$$

Якщо від золотого прямокутника відрізати квадрат, залишиться золотий прямокутник.

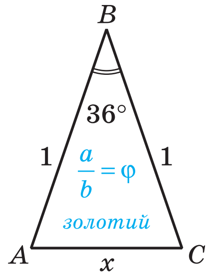
Для правильного 10-кутника:

$$\frac{R_{10}}{a_{10}} = \varphi$$

Теорема. Рівнобедрений трикутник із кутом 36° при вершині є золотим.

Доведення

Розглянемо рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$) з кутом при вершині 36° (мал. 6.19), бічну сторону якого приймемо за 1. Тоді основа цього трикутника $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ і відношення бічної сторони до основи дорівнює: $\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \varphi$.



Мал. 6.19

Теорему доведено.

Доведіть **самостійно** таку властивість золотого трикутника.

Теорема. Бісектриса кута при основі золотого трикутника поділяє його на два трикутники, один з яких є золотим, а саме той, що прилягає до основи даного трикутника.

Золоті трикутники з'являються і при вивченні властивостей правильних п'ятикутників.

Теорема. Відношення довжини діагоналі правильного п'ятикутника до довжини його сторони дорівнює золотому перерізу.

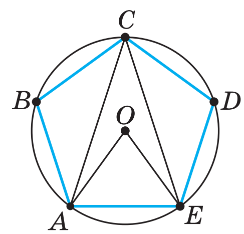
Доведення

Опишемо навколо правильного п'ятикутника $ABCDE$ коло (мал. 6.20).

У рівнобедреному трикутнику ACE кут при вершині C дорівнює половині міри дуги AE (як вписаний, що опирається на цю дугу). Тоді

$$\angle ACE = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{360°}{5}\right) = 36°.$$

Тобто трикутник ACE – золотий і $\frac{AC}{AE} = \varphi$.



Мал. 6.20

Теорему доведено.

Доведіть **самостійно** ще й такі властивості правильного п'ятикутника.

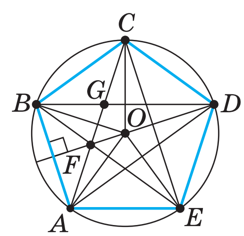
Теорема. Якщо $ABCDE$ – правильний п'ятикутник, а F і G – точки перетину його діагоналі AC відповідно з діагоналями BE і BD, то точка F ділить кожний із відрізків CA і AG у крайньому і середньому відношенні (мал. 6.21).

Порада. Проведіть пряму OD, яка є віссю симетрії даного п'ятикутника і проходить через точку F.

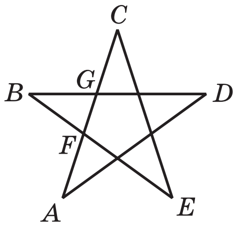
Зауваження. Ламана, яку утворюють діагоналі правильного п'ятикутника, буде зіркою (мал. 6.21). За останньою теоремою вона має таку чудову властивість: **довільний відрізок цієї фігури знаходиться у відношенні φ золотого перерізу до найменшого сусіднього відрізка.**

Наприклад, для п'ятикутника, зображеного на малюнку 6.22, маємо:

$$\frac{AF}{FG} = \frac{AG}{GC} = \frac{CF}{AF} = \varphi.$$



Мал. 6.21



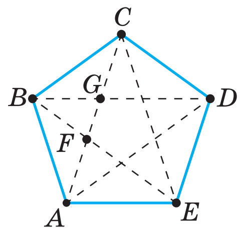
Мал. 6.22

Тобто ми довели співвідношення, яке нас вражало у 7-му класі і завдяки якому зірці, або пентаграмі, у давнину приписували таємничий філософський смисл, а в Стародавній Греції пентаграма стала символом школи славетного вченого Піфагора.

Для правильного 5-кутника:

$$\frac{d}{a_5} = \varphi$$

(d – діагональ)



$$\frac{AC}{AE} = \frac{AF}{FG} = \frac{AG}{GC} = \varphi$$

Побудуйте **самостійно** (за допомогою лише циркуля і лінійки) символ школи Піфагора – п'ятикутну зірку.

Більше дізнатися з цієї теми можна в літературі:

1. *Апостолова Г. В.* Геометрія–7. – К.: Генеза, 2004.
2. *Апостолова Г. В.* Геометрія–8. – К.: Генеза, 2008.
3. *Никулин А. В., Кукуш А. Г., Татаренко Ю. С.* Геометрия на плоскости: Планиметрия. – Минск: ООО «Попурри», 1996.
4. Хрестоматия по истории математики / Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1976–1977.

Додаток 5

Геометричні перетворення приходять на допомогу

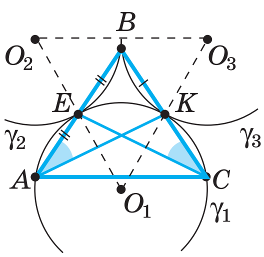
У підручнику для 7-го класу додатки 9 і 10 були присвячені симетрії відносно прямої та її використанню для розв'язування задач. Тепер ми могли б назвати їх «використанням перетворення симетрії відносно прямої».

Розглянемо приклади, коли й інші геометричні перетворення допомагають розв'язувати задачі.

Мистецтво розв'язувати геометричні задачі чимось нагадує трюки ілюзіоністів.

І. Д. Новиков

Приклад 1. У трикутнику ABC проведено медіани AK і CE, $\angle BAK = \angle BCE = 30°$ (мал. 6.23). Доведіть, що трикутник ABC – правильний.



Мал. 6.23

Доведення

1) $\angle BAK = \angle BCE$, тоді через точки C, A, E, K можна провести коло γ_1 із центром O_1 і радіусом R.

2) $\angle KO_1E = 2\angle EAK = 60°$, тоді $\triangle O_1EK$ – правильний.

3) Точки A і B симетричні відносно точки E, тоді через точки B і E проходить коло γ_2, симетричне γ_1 відносно точки E, і $O_1E = EO_2 = R$.

4) Аналогічно через точки K і B проходить коло γ_3, симетричне γ_1 відносно точки K, і $O_1K = KO_3 = R$.

5) $\triangle O_1O_2O_3$ – правильний, B – спільна точка кіл γ_2 і γ_3. Крім того, $\triangle KEB$ – правильний ($\angle O_1 = 60°$, $O_1O_2 = O_1O_3 = 2R$). Тоді $EB = R = KB$, $\angle EBK = 60°$. Звідси: $\triangle ABC$ – правильний ($\angle B = 60°$, $AE = EB = R = BK = KC$). Щ. в. д.

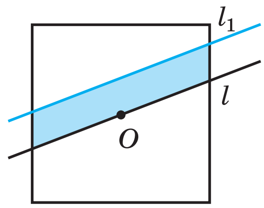
П р и к л а д 2. Пряма поділяє квадрат на дві частини, що мають рівні площі. Доведіть, що ця пряма проходить через центр квадрата.

Д о в е д е н н я

Довільна пряма, яка проходить через центр квадрата O, поділяє його на дві частини, симетричні відносно точки O. Отже, ці частини мають рівні площі.

Нехай існує деяка пряма l_1, яка не проходить через центр квадрата, але поділяє його на дві рівновеликі частини.

Проведемо через точку O пряму $l \parallel l_1$ (мал. 6.24). Пряма l поділяє квадрат на дві рівновеликі частини. Тоді l_1 поділяє квадрат на фігури, площі яких дорівнюють сумі і різниці площ півквадрата і зафарбованої його частини відповідно. Тобто площі цих фігур не рівні, що суперечить припущенню.



Мал. 6.24

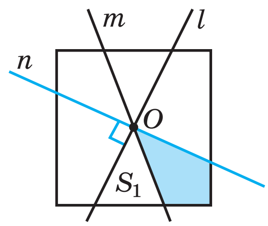
Твердження доведено.

П р и к л а д 3. Дві прямі l і m поділяють квадрат на чотири рівновеликі фігури. Доведіть, що ці прямі проходять через центр квадрата перпендикулярно одна до одної.

Д о в е д е н н я

За попередньою задачею обидві прямі l і m проходять через центр квадрата.

Нехай ці прямі не перпендикулярні одна до одної. Проведемо через точку O пряму $n \perp l$ (мал. 6.25). Оскільки прямі n і l збігаються при повороті на 90° відносно точки O, то вони поділяють квадрат на чотири рівні фігури (доведіть це самостійно). Тоді пряма m поділятиме фігуру, площа якої дорівнює половині площі квадрата, на дві частини. Площі цих частин дорівнюють сумі і різниці четвертини площі квадрата та зафарбованої частини. (На малюнку S_1 – одна з таких частин.) Наше припущення хибне і $m \perp l$.



Мал. 6.25

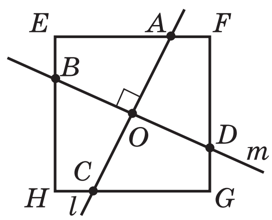
Твердження доведено.

П р и к л а д 4. Дві прямі l і m поділяють квадрат на чотири рівновеликі фігури. Доведіть, що точки перетину цих прямих зі сторонами квадрата є вершинами іншого квадрата.

Д о в е д е н н я

З попередньої задачі маємо, що задані прямі проходять через центр квадрата O перпендикулярно одна до одної. Нехай вони перетинають сторони заданого квадрата $HEFG$ у точках A, B, C і D, як показано на малюнку 6.26. Доведемо, що $ABCD$ – квадрат.

Розглянемо поворот квадрата навколо точки O на 90° проти годинникової стрілки. Сторона EF перейде у HE, а пряма l – у пряму m, яка перпендикулярна до неї. Тобто точка A переходить у B поворотом відносно O і $OA = OB$. Аналогічно маємо, що $OA = OB = OC = OD$. Тоді $ABCD$ – паралелограм, діагоналі якого рівні і взаємно перпендикулярні, тобто це квадрат.



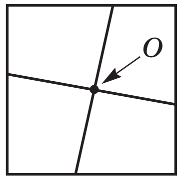
Мал. 6.26

Твердження доведено.

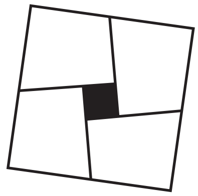
Завдання для самостійного розрізання
(задачі Мартіна Гарднера)

1. Розріжте квадрат на чотири частини однакових форм і розмірів так, щоб з них можна було скласти новий квадрат більшого розміру, всередині якого буде квадратний отвір. (Знайти розв'язок цієї задачі допоможуть уже розглянуті нами приклади 2–4 і малюнок 6.27.)

2. Чи можна розрізати квадрат на дві частини, щоб з них можна було знову скласти інший квадрат? Скільки способів розрізання ви можете запропонувати? (Розріз не обов'язково здійснювати вздовж прямої лінії.)



а)


б)

Мал. 6.27

Приклад 5. Доведіть, що в довільному трикутнику висота не більша за середнє геометричне півпериметра трикутника та його різниці з довжиною сторони, до якої проведено цю висоту.

Доведення

Нехай маємо трикутник ABC. Позначимо його сторони як a, b і c (відповідно до позначення вершин), а висоту до сторони a як h_a.

Треба довести, що $h_a \leqslant \sqrt{p(p-a)}$, де p – півпериметр трикутника ABC.

Через вершину A проведемо пряму $l \parallel BC$ і перетворенням симетрії трикутника ABC відносно l отримаємо трикутник AB_1C_1 (мал. 6.28).

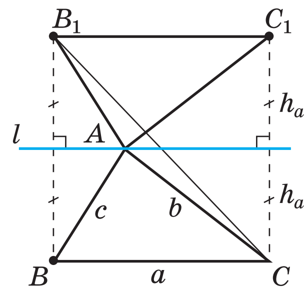
1) З властивості перетворення симетрії і нерівності для сторін трикутника AB_1C маємо:

$$AB + AC = AB_1 + AC \geqslant CB_1 = \sqrt{CB^2 + BB_1^2}.$$

2) З прямокутного трикутника B_1BC і п. 1 отримаємо: $c + b \geqslant \sqrt{a^2 + (2h_a)^2}$, тобто

$$(c+b)^2 - a^2 \geqslant 4h_a^2 \text{ і } h_a^2 \leqslant \frac{1}{4}(c+b+a)(c+b-a) = p(p-a),$$

де p – півпериметр трикутника. Щ. в. д.



Мал. 6.28

Приклад 6. Точка M лежить на діаметрі AB кола. Хорда CD цього кола проходить через точку M під кутом 45° до AB. Доведіть, що сума $CM^2 + DM^2$ не залежить від положення точки M на діаметрі AB.

Доведення

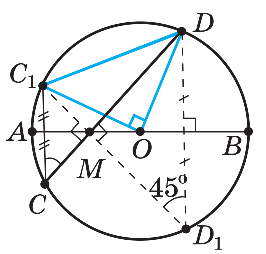
Нехай точки C_1 і D_1 – симетричні точкам C і D відносно діаметра AB (мал. 6.29).

1) За умовою $\angle DMB = 45°$. Тоді $\angle DMD_1 = 2 \cdot 45° = 90°$. Аналогічно $\angle CMC_1 = 90°$, і точки C_1, M, D_1 лежать на одній прямій, причому $CD \perp C_1D_1$.

2) $CM^2 + DM^2 = C_1M^2 + DM^2 = C_1D^2$.

3) Трикутник CMC_1 – прямокутний і рівнобедрений. Тоді $\angle C_1CM = 45°$.

4) Вписаний $\angle C_1CD = 45°$, тоді $\angle C_1OD = 90°$ і $C_1D^2 = C_1O^2 + OD^2 = 2R^2$.



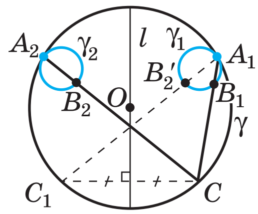
Мал. 6.29

Тобто $CM^2 + DM^2 = 2R^2$ і не залежить від розміщення точки M на діаметрі AB. Щ. в. д.

Приклад 7. Рівні кола γ_1 і γ_2 дотикаються до кола γ внутрішньо в точках A_1 і A_2 відповідно. Довільну точку C кола γ сполучили з точками A_1 і A_2. Відрізки CA_1 і CA_2 перетинають кола γ_1 і γ_2 у точках B_1 і B_2 відповідно. Доведіть, що $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ (мал. 6.30).

Доведення

Діаметр l кола γ, перпендикулярний до лінії центрів кіл γ_1 і γ_2, буде віссю симетрії цих кіл (мал. 6.30). Побудуємо точку C_1 симетричну C відносно l.



Мал. 6.30

1) Маємо пари точок, симетричних відносно l: A_1 і A_2, C і C_1, B_2' і B_2. Тоді $A_1A_2 \parallel B_2'B_2 \parallel CC_1$.

2) Коло γ_1 переходить у коло γ перетворенням гомотетії відносно точки A_1. Причому $B_1 \to C$, а $B_2' \to C_1$, тобто $B_1B_2' \parallel CC_1$.

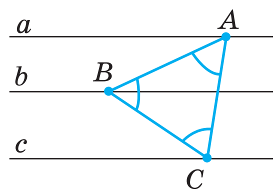
3) $B_2'B_2 \parallel CC_1$ і $B_2'B_1 \parallel CC_1$, тоді точки B_2', B_2 і B_1 належать одній прямій і $B_1B_2 \parallel A_1A_2$. Щ. в. д.

Приклад 8. Побудуйте правильний трикутник, вершини якого лежать на трьох заданих паралельних прямих.

Задано три прямі $a \parallel b \parallel c$. Треба побудувати правильний трикутник ABC так, щоб $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$ (мал. 6.31).

Аналіз

Нехай маємо шуканий трикутник. Тоді точка B перейде в точку C поворотом відносно точки A на 60°.



Мал. 6.31

План побудови

1) Позначимо на прямій a довільним чином точку A.
2) Будуємо перетворенням поворот відносно точки A на 60° образ b_1 прямої b.
3) Точку перетину прямих b_1 і b позначаємо як C і робимо засічку з центром у точці A і радіусом, рівним AC, до перетину з прямою b. Отримаємо точку B.

Трикутник ABC – шуканий.

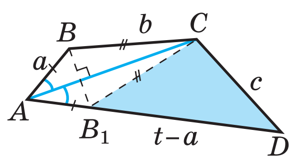
Доведення проведіть **самостійно.**

Приклад 9. Побудуйте чотирикутник $ABCD$ за його сторонами, щоб діагональ AC була бісектрисою внутрішнього кута цього чотирикутника.

Нехай дано чотири відрізки: a, b, c, t. Треба побудувати чотирикутник $ABCD$ такий, щоб $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = t$, $AC \equiv l_A$ (мал. 6.32).

Аналіз

Нехай $t > a$. Проведемо в чотирикутнику $ABCD$ з точки B перпендикуляр до діагоналі AC і продовжимо його до перетину зі стороною AD в точці B_1. Як відомо, бісектриса кута є віссю симетрії цього кута. Тоді: $d(B; AC) = d(B_1; AC)$ і $CB = CB_1$, $AB = AB_1$; $B_1D = AD - AB_1 = AD - AB$; $\triangle B_1CD$ – базовий.



Мал. 6.32

План побудови

1) Будуємо відрізок $t - a$.

2) Будуємо трикутник CDB_1 за трьома сторонами ($B_1C = b$, $CD = c$, $B_1D = t - a$).

3) Продовжимо відрізок B_1D на $B_1A = a$ і сполучимо точки A і C відрізком.

4) Будуємо точку B, симетричну B_1 відносно AC.

Чотирикутник $ABCD$ – шуканий.

Доведення проведіть **самостійно.**

Завдання для самостійного розв'язування

1. На бісектрисі зовнішнього кута C трикутника ABC взято точку M (яка не збігається з C). Доведіть, що $MA + MB > CA + CB$. (Порада. Побудуйте точки B_1 і A_1, симетричні точкам A і B відносно прямої CM.)
2. Дано пряму та точки A і B по один бік від цієї прямої. Знайдіть на заданій прямій таку точку X, щоб кут, який утворює промінь XB з цією прямою, був удвічі менший за кут, який утворює з нею промінь XA. (Порада. Побудуйте точку B_1, симетричну точці B відносно заданої прямої.)
3. На сторонах BC і CD квадрата $ABCD$ взято точки M і K відповідно. Причому $\angle BAM = \angle MAK$. Доведіть, що $BM + KD = AK$. (Порада. Скористайтеся перетворенням поворот на $90°$ відносно точки A.)
4. У паралелограм вписано квадрат. Доведіть, що перпендикуляри, проведені з вершин паралелограма до сторін квадрата, обмежують квадрат. (Порада. Скористайтеся перетворенням поворот відносно центра квадрата на $90°$.)
5. Дано гострий кут і точку всередині нього. Побудуйте трикутник, дві вершини якого лежать на сторонах кута, а третя збігається із заданою точкою, щоб периметр цього трикутника був найменшим. (Порада. При проведенні аналізу здійсніть перетворення симетрії заданої точки відносно сторін кута.)
6. Через точку перетину двох заданих кіл проведіть січну так, щоб довжини хорд, що відтинаються на цій січній колами, відносилися як: **а)** 2 : 1; **б)** $m : n$. (Порада. Скористайтеся перетворенням гомотетії і прикладом 2 на с. 127.)
7. Побудуйте рівносторонній трикутник, вершини якого лежать на трьох заданих концентричних колах. (Порада. Допоможе приклад 8 на с. 230.)

Більше дізнатися з цієї теми можна в літературі:

1. *Апостолова Г. В.* Геометрія–7. – К.: Генеза, 2004.
2. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. Ч. 1. – М.: Наука, 1991.
3. *Полонский В. Б., Рабинович Е. М., Якир М. С.* Учимся решать задачи по геометрии. – К.: Магистр-S, 1996.
4. *Бурда М. І.* Розв'язування задач на побудову. – К.: Рад. шк. 1986.

Для допитливих

Симетрією із стародавніх часів цікавилися геометри, художники і архітектори: геометри – тому, що вони взагалі цікавляться будь-якими властивостями форм, а художники і архітектори – задля краси. Проте в XX столітті симетрією зацікавилися і фізики – вони здогадалися, що симетрія багатьох предметів навколо нас обумовлена симетрією законів природи!

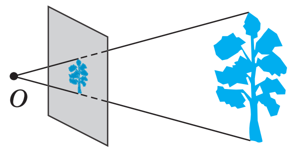
Тоді фізики почали шукати нові види симетрії і знайшли їх багато. Наприклад, у кожної елементарної частинки є двійник – античастинка. Відомі слова Галілея про те, що природа говорить з нами мовою математики, підтвердилися знову.

Елементи проективної геометрії, або що можна зробити за допомогою лінійки та нерухомого кола

> ...Знання законів перспективи є водночас і знанням проективної геометрії, принаймні її елементарних понять. Саме тому чудовими полотнами майстрів епохи Відродження ми захоплюємося й досі.
>
> *М. І. Кованцов*

Пригадайте, як ви збільшували малюнок. Аналогічно можна виконати і зменшення малюнка.

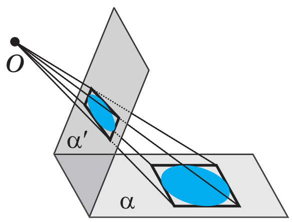
А якщо оригінал занадто великий або тривимірний? У таких випадках існує досить простий спосіб копіювання. Візьміть прозору пластину і, дивлячись крізь неї на предмет, обведіть лінії оригіналу (мал. 6.33).



Мал. 6.33

Геометрично маємо, що кожна точка предмета зображається точкою перетину площини картини з променем зору, який іде від вашого ока до точки, що зображається. Таке копіювання називається *центральним проектуванням*. Ваше око є *центром проекції*, малюнок – *проекцією*, а пластинка, на яку ви проектуєте, – *площиною проекції*.

На малюнку 6.34 зображено проектування квадрата і кола, накреслених у площині α, на другу площину α'. Малюнок, який утворюється на α', схожий з оригіналом, але є і відмінність. Пряма лінія зображається прямою лінією, точка – точкою, круг (коло) перетворюється на овал (еліпс), довжини відрізків змінюються. Таким чином, одні властивості фігури зберігаються, а інші ні.

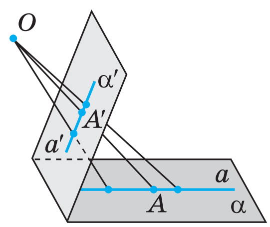


Мал. 6.34

Проектуючи, ми не відтворюємо оригінал, а перетворюємо його.

Властивості, які встановлюються вимірюванням, називають *метричними*; властивості, які не змінюються при проектуванні, називають *проективними*. Ось ними і займається *проективна геометрія*.

Назвемо прості *властивості центрального проектування* фігур (мал. 6.35):
- точка перетворюється на точку;
- пряма перетворюється на пряму;
- точка, що належить деякому відрізку, перетворюється на точку, яка лежить на зображенні цього відрізка;
- точки, розміщені на одній прямій, перетворюються на точки, які також лежать на одній прямій.

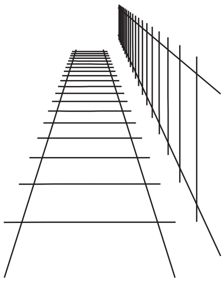


Мал. 6.35

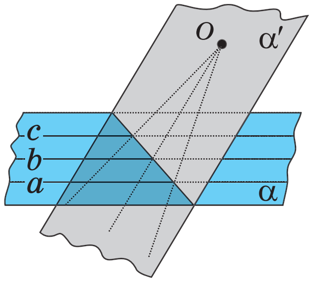
Для допитливих

Метод центральних проекцій дає наочне зображення, бо така побудова образу відтворюється процесом зору. Оку однаково – розглядати оригінал чи його центральну проекцію на площину. (Проте у наведеному ми дещо спростили: оригінал людина розглядає двома очима.)

До речі, при проектуванні паралельні прямі можуть перетворюватися на непаралельні (мал. 6.36 і 6.37). Спробуйте **самостійно** знайти відповідь, чому на малюнку 6.34 паралельні прямі спроектувалися в паралельні прямі, а на малюнках 6.36 і 6.37 паралельні прямі перетворюються на непаралельні?



Мал. 6.36

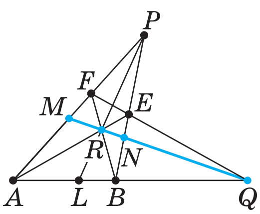


Мал. 6.37

Ми почали розгляд проективної геометрії з проектування однієї площини на другу. **Далі ми будемо «працювати» у площині**, тобто розглядати центральне проектування одного прямолінійного ряду точок (сукупності точок, що лежать на одній прямій) на другий. Зрозуміло, що за таких умов і оригінал, і центр проекції, і зображення лежать в одній площині (малюнок на полі).

Таке проектування має важливу властивість. **Якщо з якого-небудь центра спроектувати один прямолінійний ряд на другий, то складні відношення будь-якої четвірки точок не змінюються.**

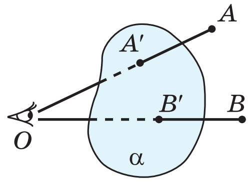
Тоді *гармонічні четвірки точок* (с. 221) *завжди проектуються в гармонічні четвірки*.



Мал. 6.38

Проектування гармонічної четвірки точок має ще одну цікаву властивість. Нехай на прямій маємо гармонічну четвірку точок M, R, N, Q (мал. 6.38). З точки P спроектуємо цю четвірку на пряму AQ – дістанемо також гармонічну четвірку точок A, B, L, Q. Якщо продовжити відрізки RB і AR до перетину з прямими PA і PB у точках F і E відповідно, то **точка перетину діагоналей чотирикутника $AFEB$ збіжиться з точкою R.**

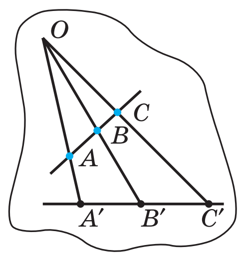
Спробуйте довести це **самостійно**.



A, B – оригінали
A', B' – проекції A, B на α
α – площина проекції
O – центр проекції

Властивості центрального проектування:

- точка → точку;
- пряма → пряму;
- $A \in [a] \to A' \in [a']$;
- $\{A; B; \ldots\} \in n \to \{A'; B'; \ldots\} \in n'$.



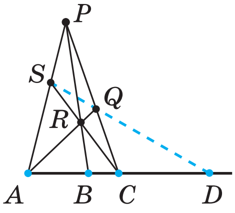
Центральне проектування у площині

Для допитливих

Уперше правильним зображенням перспективи серйозно зацікавилися художники епохи Відродження, особливо *Альбрехт Дюрер* (1471–1528) і *Леонардо да Вінчі* (1452–1519). Потім до розв'язування цієї задачі взялися математики і створили красиву науку – *проективну геометрію*. Її основи було закладено *Жераром Дезаргом* (1593–1661) і *Блезом Паскалем* (1623–1662).

Отже, коли дано на прямій будь-які три точки A, B і C, то *для того, щоб побудувати точку D так, щоб четвірка точок A, C, B, D була гармонічною, треба* (мал. 6.39):

1) узяти якусь точку P поза даною прямою і сполучити її з даними точками A, B і C;
2) узяти на відрізку PC довільну точку Q і сполучити її з A;
3) через точку R (точка перетину PB з AQ) та точку C провести пряму до перетину з AP у точці S;
4) пряма SQ перетне пряму AC у шуканій точці D.



Мал. 6.39

Зауваження. У випадку, коли точка B є серединою відрізка AC, чотирикутник $ASQC$ буде трапецією (доведіть це **самостійно**). Тому кажуть, що *нескінченно віддалена точка прямої гармонічно поділяє середину будь-якого відрізка прямої відносно кінців цього відрізка і навпаки*.

А тепер розв'яжіть такі задачі самостійно.

1. На прямій l дано три точки A, B і C, причому відомо, що точка B – середина відрізка AC. Користуючись тільки лінійкою, проведіть через точку S, що не лежить на прямій l, пряму, паралельну прямій l.

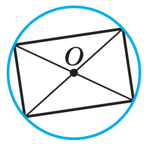
2. Дано дві паралельні прямі l та m і на одній з них відрізок AC. Користуючись тільки лінійкою, поділіть цей відрізок навпіл.

3. На площині дано паралелограм, точку і пряму, що не проходить через цю точку. Користуючись тільки лінійкою, проведіть через задану точку пряму, паралельну даній прямій.

4. На площині дано паралелограм і деякий відрізок. Користуючись тільки лінійкою, поділіть цей відрізок навпіл.

Швейцарський математик *Якоб Штейнер* довів таке. **Якщо на площині дано коло, причому зазначено його центр, то всі побудови, які виконуються за допомогою циркуля і лінійки, можна виконати за допомогою лише лінійки.**

Справді, якщо дано коло з центром O (мал. 6.40), то, провівши два довільних діаметри, дістанемо прямокутник, а тому і паралелограм. Тоді, якщо попередні чотири задачі розв'язані, то можна за допомогою лінійки: проводити паралельні прямі; ділити навпіл будь-які відрізки; проводити взаємно перпендикулярні прямі (побудувати вписаний у дане коло прямокутник і провести прямі, паралельні його сторонам).



Мал. 6.40

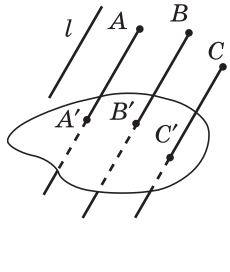
Більше дізнатися з цієї теми можна в літературі:

1. *Бляшке Б.* Математическое просвещение. – М.: Изд-во техн. лит., 1958.
2. *Вольберг О. А.* Основные идеи проективной геометрии. – М.: Физматгиз, 1949.
3. *Игнациус Г. И.* Проективная геометрия. – М.: Знание, 1966.
4. *Кованцов М. І.* Геометричні перетворення. – К.: Вища шк., 1972.
5. Математична хрестоматія: Геометрія. – К.: Рад. шк., 1970.

Для допитливих

Художники користуються тільки методом центральних проекцій.

Проте існує ще й *метод паралельних проекцій*. Він відрізняється від методу центральних проекцій тільки тим, що проектуючі прямі не проходять через фіксовану точку, а паралельні фіксованому напряму (див. мал.).



Інверсія в дивертисменті* геометричних побудов

Геометричні побудови можна виконувати, взагалі кажучи, чим завгодно і як завгодно. У математиці існує окрема галузь, яка називається *геометрографією*. Це теорія геометричних побудов, які виконуються за допомогою заздалегідь визначених тих чи інших інструментів.

Ми вже говорили про так звані *побудови Штейнера* (с. 234). Ці побудови виконуються за допомогою лише лінійки за умови, що на площині дано деяке коло з визначеним центром. У цьому випадку за допомогою лише лінійки можна виконати будь-яку побудову, яка виконується за допомогою циркуля і лінійки.

Розглянемо інший приклад: *побудову за допомогою циркуля – побудову Мора–Маскероні.*

Слід зауважити, що **будь-яку задачу на побудову, яка розв'язується за допомогою циркуля і лінійки, можна розв'язати за допомогою лише циркуля**. Зауважимо, що при побудовах за допомогою тільки циркуля визначають лише кінці відрізків.

Це твердження було вперше опубліковане в книжці датського математика *Георга Мора* «Датський Евклід» (1672), а потім у праці італійського інженера *Георга Лоренцо Маскероні* «Геометрія циркуля» (1797).

Для доведення теореми Мора–Маскероні достатньо переконатися, що за допомогою лише одного циркуля можна визначити точку перетину двох прямих (кожну з яких задано двома точками); точку перетину заданих прямої і кола. З цією метою скористаємося перетворенням *інверсії*.

Усі геометричні побудови, які ми вивчали в шкільному курсі планіметрії, переводили прямі в прямі, а кола в кола. *Інверсія – це перетворення* іншого типу, *яке може зберігати клас прямих і кіл, а може перевести пряму в коло, а коло в пряму*. На цьому та інших чудових властивостях інверсії базується її вражаюча ефективність при розв'язуванні геометричних задач.

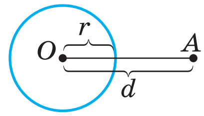
Однією з найцікавіших задач на геометричну побудову є задача видатного геометра Стародавньої Греції Аполлонія з Перги. Вона формулюється так: **побудувати коло, яке дотикається до трьох даних кіл.**

У наш час існує багато різних способів розв'язування цієї задачі. Один з них – розв'язування за допомогою перетворення інверсії. Розглянемо його після того (с. 241), як ознайомимося з перетворенням інверсії і його властивостями.

Спочатку розглянемо дві теореми, які корисно пам'ятати, зокрема і при розв'язуванні задач на побудову.

Нехай маємо коло γ з центром O і точку A, що лежить на відстані d від точки O (мал. 6.41). Радіус кола дорівнює r.

Величина $\sigma = d^2 - r^2$ *називається степенем точки* A *відносно кола* γ.



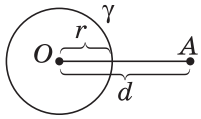
Мал. 6.41

Можливі такі *випадки розміщення точки і кола*.

1. <u>Точка A лежить поза колом</u> (мал. 6.42). Тоді $\sigma > 0$ і дорівнює квадрату дотичної, проведеної з точки A до даного кола.

---

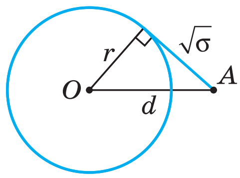
* Дивертисмент – концертна програма в естрадних театрах.



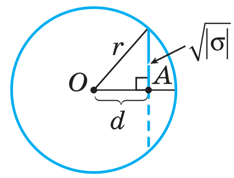
$\sigma = d^2 - r^2$ ***степінь точки А відносно кола*** γ.

2. <u>Точка A лежить на колі</u>, тоді $d = r$, $\sigma = 0$.

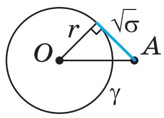
3. <u>Точка A лежить усередині кола</u> (мал. 6.43). Тоді $\sigma < 0$ і $|\sigma|$ дорівнює квадрату половині хорди, яка проведена через точку A перпендикулярно до OA.



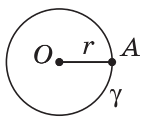
Мал. 6.42



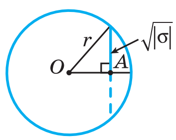
Мал. 6.43



$\sigma > 0$



$\sigma = 0$



$\sigma < 0$

Теорема 1. Геометричним місцем точок, різниця квадратів відстаней від яких до двох заданих точок A і B є величиною сталою, – буде пряма, перпендикулярна до AB.

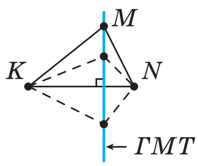
Доведення цієї теореми, яке виконати неважко, якщо скористатися формулою Архімеда (Геометрія–8, с. 215) або методом координат, пропонуємо провести **самостійно**.

Теорема 2. Геометричним місцем точок, степені яких відносно двох даних неконцентричних кіл рівні між собою, є пряма, перпендикулярна до лінії центрів цих кіл.

Нехай r_1 і r_2 – радіуси даних кіл, d_1 і d_2 – відстані від точок, що належать шуканому ГМТ, до центрів цих кіл. За умовою $d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2$ і $d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2 = \text{const}$.

Тоді за теоремою 1 твердження теореми 2 виконується.

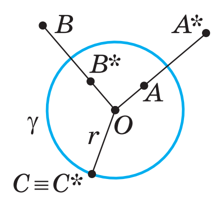
Розглянуте геометричне місце точок називається *радикальною віссю двох даних кіл*.



$KM^2 - MN^2 = \text{const}$

Повернемося тепер до розгляду *інверсії*. Нехай дано коло γ з центром у точці O, радіус якого дорівнює r.

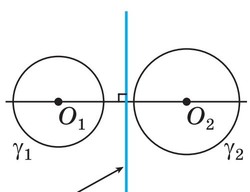
Інверсією відносно кола γ називається перетворення, яке переводить довільну точку $A \neq O$ у точку A^*, що лежить на промені OA на відстані $OA^* = \dfrac{r^2}{OA}$ від центра кола (мал. 6.44).



Мал. 6.44

Інверсію відносно такого кола ще називають *інверсією з центром O* (*степенем* r^2), а коло γ – *колом інверсії*.

Можливі три випадки розміщення точки і кола (мал. 6.44).



ГМТ – степені яких відносно γ_1 і γ_2 рівні.

Для допитливих

У давні часи за довжину кола брали потроєний діаметр. Про це писала, зокрема, Біблія, так робили й вавилоняни.

ВЛАСТИВОСТІ ІНВЕРСІЇ

1. Образом точки, що належить колу інверсії, є сама ця точка.

2. Пряма, що проходить через центр інверсії, має за образ саму себе.

3. Пряма l, що не проходить через центр інверсії O, має за образ коло, яке проходить через точку O і центром якого буде образ точки, яка симетрична точці O відносно l.

4. Коло з центром C, яке проходить через центр інверсії O, переходить у пряму, перпендикулярну до OC.

5. Коло, яке не проходить через центр інверсії O, переходить у коло, що не проходить через точку O.

6. При інверсії дотик кіл і прямих зберігається, якщо їх точка дотику не збігається з центром інверсії. В останньому випадку за образ маємо пару паралельних прямих.

Властивість 1. Доведіть **самостійно**.

Властивість 2. Доведення

Нехай l – дана пряма, O – центр інверсії і $O \in l$, A – довільна точка даної прямої l. Тоді $l \equiv (OA)$. За означенням інверсії точка A^* лежить на прямій OA, тобто на l.

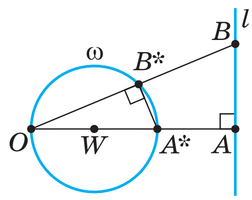
Твердження 2 доведено.

Властивість 3. Доведення

Нехай l – дана пряма, O – центр інверсії і $O \notin l$. Проведемо $OA \perp l$. Образ A^* належить прямій OA (мал. 6.45).

1) Доведемо, що для довільної точки $B \in l$ образ B^* лежить на колі ω, діаметр якого дорівнює OA^*.

За означенням інверсії $OB \cdot OB^* = r^2 = OA \cdot OA^*$ і $OB^* : OA^* = OA : OB$. Точка перетину променя OB з колом ω задовольняє цю умову, бо $\triangle OAB \sim \triangle OB^*A^*$ як прямокутні трикутники зі спільним кутом O.



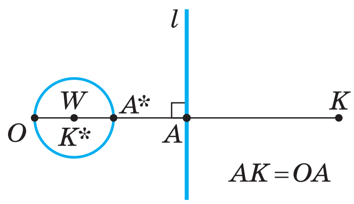
Мал. 6.45

Для точки B: $OB^* = \dfrac{r^2}{OB}$ – фіксоване число, і на промені OB існує тільки одна точка B^*, яка задовольняє цю умову.

2) Доведемо, що центр W кола ω є образом точки, симетричної точці O відносно l.

Точка K, симетрична точці O відносно l, лежить на прямій OA і віддалена від неї на відстань $AK = OA$ (мал. 6.46). Тоді точка K^*, образ точки K, за властивістю 2 також лежить на прямій OA і

$$OK^* = \frac{r^2}{OK} = \frac{OA^* \cdot OA}{2 \cdot OA} = OA^* : 2.$$



Мал. 6.46

Тобто $K^* \equiv W$.

Твердження 3 доведено.

Властивість 4. Доведення

Властивість 4 є наслідком властивості 3. Пропонуємо провести доведення **самостійно**. (Порада. Скористайтеся властивістю 1.)

Властивість 5. Доведіть **самостійно**. (Порада. Скористайтеся методом від супротивного.)

Властивість 6. Доведення

1) Якщо точка дотику не збігається з центром інверсії, то після інверсії коло і пряма, як і раніше, матимуть одну спільну точку – дотик зберігається.

2) Якщо два кола з центрами в точках A і B дотикаються одне до одного в центрі інверсії O, то після інверсії, відповідно до властивості 4, отримаємо за їх образ дві прямі, перпендикулярні до лінії центрів AB (бо $O \in AB$), – маємо дві паралельні прямі.

3) Якщо пряма l дотикається до кола в точці O з центром A, то після інверсії пряма l переходить сама в себе, а коло – в пряму, перпендикулярну до OA. Знову маємо дві паралельні прямі.

Твердження 6 доведено.

Інверсія відносно кола γ:

$A \to A^*$

$OA^* = \dfrac{r^2}{OA}$

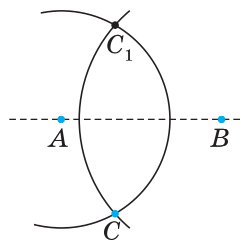
$(A \neq O)$

Тепер повернемося до **теореми Мора–Маскероні** (с. 235). Її доведення проведемо у вигляді розв'язування задач. Нагадаємо, що при розв'язуванні *можна користуватися тільки циркулем*.

Задача 1. **Дано три точки A, B, C. Побудуйте точку C_1, симетричну точці C відносно прямої AB.**

План побудови

Проводимо дві дуги, радіуси яких AC і BC, з центрами в точках A і B відповідно (мал. 6.47). Їх перетин визначає шукану точку C_1.



Мал. 6.47

Доведення

Пряма AB – це лінія центрів двох кіл, які перетинаються в точках C і C_1. Тоді точки C і C_1 симетричні відносно AB. Щ. в. д.

ВЛАСТИВОСТІ ІНВЕРСІЇ:

1) якщо $A \in \gamma$, то $A \to A^* \equiv A$;

2) якщо $O \in n$, то $n \to n^* \equiv n$.

3) якщо $O \notin l$, то $l \to \to \omega$ – коло з центром W, симетричним O відносно l;

4) якщо $O \in \omega$, колу з центром C, то $\omega \to n \perp OC$;

5) якщо $O \notin \omega$ – колу, то $\omega \to \omega^*$ – коло і $O \notin \omega^*$;

6) дотик кіл і прямих зберігається, якщо точка дотику $K \neq O$.

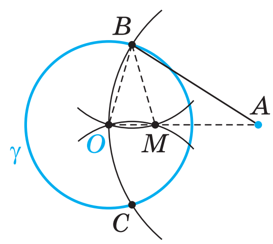
Якщо $K \equiv O$, то образом дотичних кіл, або кола і прямої, будуть паралельні прямі.

Задача 2. **Дано коло γ, його центр O і довільна точка A. Побудуйте точку A^*, в яку переходить точка A при інверсії відносно кола γ.**

План побудови

1) Через точку O проводимо коло з центром у точці A. Точки перетину цього кола з γ позначаємо як B і C (мал. 6.48).

2) Через точку O проводимо два кола з центрами B і C, радіуси яких дорівнюють радіусу заданого кола γ. M – точка перетину останніх кіл – шукана.



Мал. 6.48

Доведення

Рівнобедрені трикутники OBM і OBA подібні (кут O – спільний), тоді $\dfrac{OB}{OM} = \dfrac{OA}{OB}$. Звідси: $OA \cdot OM = OB^2 = r^2$ і $M \equiv A^*$.

Що й вимагалося довести.

З а д а ч а 3. **Дано коло γ, його центр O і довільні точки A і B. Побудуйте центр кола, в яке переходить пряма AB при інверсії відносно γ.**

П л а н п о б у д о в и

1) Знайдемо точку C, симетричну точці O відносно прямої AB (задача 1).
2) Знайдемо точку M, в яку переходить точка C при інверсії відносно кола γ (задача 2). Точка M – шукана.

Д о в е д е н н я проведіть **самостійно**. (П о р а д а. Скористайтеся другим пунктом доведення властивості 3.)

З а д а ч а 4. **Дано три точки A, B і C. Знайдіть центр кола, що проходить через ці точки.**

П л а н п о б у д о в и

1) Проведемо довільне коло γ з центром у точці A.
2) Знаходимо точки M і N, у які переходять точки B і C інверсією відносно побудованого кола (задача 2).
3) Знаходимо центр кола, в яке переходить пряма MN при інверсії відносно кола γ (задача 3). Він є шуканою точкою.

Д о в е д е н н я проведіть **самостійно**. (П о р а д а. Доведіть, що коло, яке проходить через точки A, B і C, перейде при інверсії відносно кола γ у пряму MN.)

З а д а ч а 5. **Знайдіть точку перетину даного кола γ з даною прямою MN.**

П л а н п о б у д о в и

1) Знаходимо центр кола γ (задача 4). Позначимо його як A.
2) Знаходимо центр O кола, в яке переходить пряма MN при інверсії відносно кола γ (задача 4).
3) Проводимо коло з центром O, що проходить через точку A (тобто коло, в яке при інверсії переходить пряма MN).

Точки P і Q, в яких останнє коло перетинає коло γ, – шукані.

Д о в е д е н н я проведіть **самостійно**. (П о р а д а. Зверніть увагу на коментар до пункту 3 побудови.)

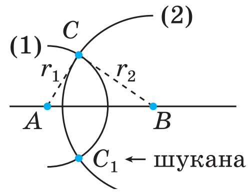
З а д а ч а 6. **Дано чотири точки A, B, C і D. Знайдіть точку перетину прямих AB і CD.**

П л а н п о б у д о в и

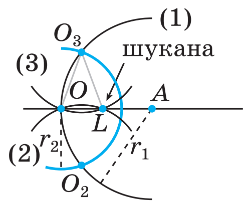
1) Проведемо довільне коло γ з центром у точці A.

ПОБУДОВА
Мора–Маскероні

1. **Дано:** A; B; C.
Побудувати: C_1 – *симетричну* C *відносно* (AB).



2. **Дано:** *коло* γ *з центром* O; A.
Побудувати: A^* *інверсією* A *відносно кола* γ.



3. **Дано:** *коло* γ *із центром* O; A; B.
Побудувати: *центр* W *кола* ω, *в яке переходить* (AB) *інверсією відносно кола* γ.
1) C – симетрична O відносно (AB);
2) M, в яку переходить C інверсією відносно кола γ;
M – шукана
(далі див. поле на с. 240).

Для допитливих

Кутом між двома колами називається кут між дотичними до цих кіл, що проведені через спільну точку цих кіл. Аналогічно визначається кут між прямою і колом. Доведіть таку властивість інверсії. **При інверсії зберігаються кути: між прямими; між прямою і колом; між колами.**

4. **Дано:** A; B; C.
Побудувати: *центр кола, що містить* A, B, C.
1) Довільне коло γ з центром A;
2) M і N – інверсією B і C відносно кола γ (задача 2);
3) W – центр кола, в яке переходить інверсією пряма MN відносно γ;
W – шукана.

5. **Дано:** γ; M; N.
Побудувати: $\gamma \cap (MN)$.
1) A – центр кола γ (задача 4);
2) ω – інверсією MN відносно γ;
3) O – центр ω (задача 4);
4) $\{P;\ Q\} = \gamma \cap \omega$ – шукані.

6. **Дано:** A; B; C; D.
Побудувати: $(AB) \cap (CD)$.
1) Довільне коло γ з центром A;
2) ω – інверсією CD відносно γ;
3) W – центр ω (задача 3);
4) $\{A;\ P\} = \omega \cap (AB)$;
5) шукана Q – інверсією P відносно γ.

2) При інверсії відносно кола γ пряма AB перейде в себе, а пряма CD – в деяке коло ω, що проходить через точку A.
3) Знайдемо центр кола ω (задача 3).
4) Знайдемо точку P (відмінну від A) перетину кола ω і прямої AB (задача 5).
5) Знайдемо точку Q, в яку переходить точка P при інверсії відносно кола γ.

Точка Q – шукана точка перетину прямих AB і CD.

Доведення проведіть самостійно. (Порада. Зверніть увагу на пункт 2 побудови).

Очевидно, що *з розв'язування задач 5 і 6 (за допомогою циркуля) і випливає теорема Мора–Маскероні*.

Знання про інверсію стануть у пригоді і при розв'язуванні задач на традиційну побудову (з використанням циркуля і лінійки). Наприклад, тепер можемо легко розв'язати *задачі Аполлонія Пергського*.

Задача 7. **Побудуйте коло, яке проходить через дві задані точки A і B та дотикається до даного кола γ.**

Аналіз

При інверсії з центром A шукане коло перейде в пряму, яка проходить через точку B^* і дотикається до кола γ^*.

План побудови

1) Виконуємо інверсію з центром A відносно довільного кола.
2) Проводимо через точку B^* дотичну l до кола γ^*.
3) Ще раз виконуємо інверсію. Пряма l перейде в шукане коло.

Доведення і дослідження виконайте самостійно. Наводимо результат, до якого ви повинні прийти.

Якщо обидві точки A і B належать даному колу або лежать усередині цього кола або одна з точок міститься всередині кола – задача розв'язків не має.

Для допитливих

Застосуйте інверсію

1. У сегмент вписують пари кіл, що дотикаються одне до одного. Знайдіть множину точок їх дотику.
2. Доведіть, що інверсія з центром у вершині A рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) і степенем AB^2 переводить основу BC трикутника в дугу BC кола, описаного навколо цього трикутника.
3. Знайдіть множину точок дотику пар кіл, що дотикаються до сторін заданого кута в даних точках A і B.
4. Ніякі три з чотирьох точок A, B, C, D не лежать на одній прямій. Доведіть, що кут між колами (див. с. 239), описаними навколо трикутників ABC і ABD, дорівнює куту між колами, описаними навколо трикутників ACD і BCD.
5. У сегмент вписують довільні пари кіл, що перетинаються. Через точки перетину кожної пари кіл проводять пряму. Доведіть, що всі отримані прямі проходять через одну точку.

Якщо даному колу належить тільки одна з даних точок – маємо один розв'язок.

Якщо обидві точки лежать поза колом – маємо два розв'язки.

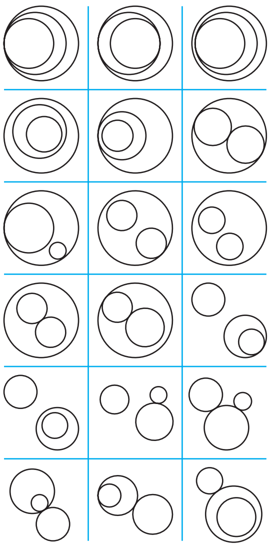
Пропонуємо для **самостійного** розв'язування *дві інші задачі Аполлонія*.

Побудуйте коло, яке:
1) проходить через задану точку і дотикається до двох заданих кіл;
2) дотикається до двох заданих кіл і заданої прямої.

Тепер повернемося до **задачі Аполлонія про побудову кола, дотичного до трьох заданих кіл.**

ЗАДАЧА АПОЛЛОНІЯ ПЕРГСЬКОГО
(бл. 262–190 рр. до н. е.)

Дано три фігури, кожна з яких може бути точкою, прямою або колом. Побудуйте коло, яке проходить через кожну з даних точок і дотикається до кожної з даних прямих і кіл.



Мал. 6.49

Нехай на площині маємо три кола. Випадків їх розміщення може бути багато. На малюнку 6.49 наведено далеко не всі з них – наприклад, не розглянуто випадок з перетином кіл. Невже для розв'язування задачі Аполлонія потрібно розглядати кожний з таких випадків окремо? Зовсім ні, – каже інверсія!

Розглянемо спочатку всі випадки, коли хоча б два із заданих кіл дотикаються (неважливо, зовнішньо чи внутрішньо). Застосуємо інверсію відносно допоміжного кола довільного радіуса з центром у точці дотику заданих кіл. Тоді за шостою властивістю перетворення інверсії дотичні кола перейдуть у паралельні прямі, а третє із заданих кіл – у коло або пряму. Тоді наші задачі зводяться до однієї: *побудувати коло, дотичне до двох заданих паралельних прямих і кола (прямої)*. Її легко розв'язати за допомогою циркуля і лінійки. Зробіть це **самостійно**.

Зауваження. За допомогою циркуля і лінійки можна легко побудувати те коло або пряму, в які перетворюється коло (пряма) при інверсії відносно якого-небудь заданого кола. Для цього треба на колі (прямій), що є прообразом, взяти три точки, побудувати відповідні їм точки-образи (див. задачу 2 на с. 238), а після цього через отримані три точки провести коло (пряму).

Для допитливих

Здійсніть побудову тільки циркулем. (Відрізок вважається побудованим, якщо побудовано його кінці.)

1. Побудуйте відрізок, який удвічі довший за даний.
2. Побудуйте відрізок, який у n разів довший за даний.
3. Побудуйте середину відрізка із заданими кінцями.
4. Побудуйте коло, яке проходить через три задані точки.
5. Побудуйте коло, в яке переходить дана пряма AB при інверсії відносно заданого кола із заданим центром O.

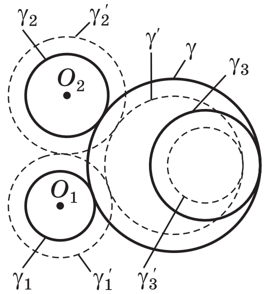
Таким чином, ПЛАН ПОБУДОВИ *кола в задачі Аполлонія для випадку, коли два із заданих кіл дотикаються*, має такий вигляд:

1) *будуємо паралельні прямі і коло (пряму), в які перетворюються задані кола інверсією відносно довільного допоміжного кола з центром у точці дотику;*
2) *будуємо кола (розв'язків може бути кілька), дотичні до отриманих прямих і кола (прямої);*
3) *відмічаємо точки дотику і по кожній із цих трійок відновлюємо шукані кола.*

Випадок дотику двох кіл розглянуто. У всіх інших випадках задача або не має розв'язку, або зводиться до вищерозглянутої.

Проілюструємо останнє на прикладі трьох кіл, що не мають спільних точок. Нехай це кола γ_1, γ_2, γ_3 (мал. 6.50), і треба побудувати коло γ, дотичне до кіл γ_1 і γ_2 зовнішньо, а до кола γ_3 – внутрішньо.

Розглянемо кола γ'_1 і γ'_2, концентричні з колами γ_1 і γ_2, радіуси яких збільшено на $\dfrac{a-r_1-r_2}{2}$ (де $a = O_1O_2$ – відстань між центрами O_1 і O_2 кіл γ_1 і γ_2). Розглянемо також кола γ'_3 і γ', концентричні з колами γ_3 і γ, радіуси яких зменшено на $\dfrac{a-r_1-r_2}{2}$. На малюнку 6.50 кола γ'_1, γ'_2, γ'_3, γ' зображено пунктиром.



Мал. 6.50

Якщо коло γ дотикається до кіл γ_1, γ_2, γ_3, то і коло γ' дотикається до кіл γ'_1, γ'_2, γ'_3 і навпаки (доведіть це **самостійно**).

Кола γ'_1 і γ'_2 дотикаються одне до одного. Ми вміємо розв'язувати задачу для цього випадку – отримаємо коло γ'. Шуканим буде коло γ, концентричне з побудованим γ', яке має радіус, на $\dfrac{a-r_1-r_2}{2}$ більший за радіус кола γ'.

У випадку, якщо кола γ_1 і γ_2 перетинаються, їхні радіуси треба зменшити.

Якщо при відповідному зменшенні радіус кола дорівнює нулю, отримаємо точку (кажуть: коло вироджується в точку). «Дотик кола і точки» будемо розуміти як «коло проходить через точку».

Якщо відповідний радіус матиме від'ємне значення, будуємо коло, радіус якого дорівнює модулю отриманого числа, причому змінюється вид дотику кіл (зовнішній на внутрішній або навпаки).

Якщо приєднати до множини кіл ще й точки (кола нульового радіуса) та прямі (кола нескінченно великого радіуса), то можна узагальнити задачу Аполлонія, яку ми розв'язали, на прямі та точки.

Для допитливих

Як спіймати лева в пустелі?

Пригадайте чудову властивість інверсії: якщо на площині взяти коло і виконати інверсію відносно цього кола, то все, що містилося всередині кола, виявиться поза ним, а все, що було поза ним, потрапить усередину цього кола. У такому разі, досить узяти клітку круглої форми і посадити в неї мисливця; виконати інверсію, і мисливець опиниться поза кліткою, а все, що було поза нею, у тому числі й лев, – у клітці!

Задачу Аполлонія можна сформулювати так. **Треба побудувати коло або пряму, дотичну до:**

1) трьох даних кіл;
2) даної прямої і двох даних кіл;
3) двох даних прямих і даного кола;
4) трьох даних прямих;
5) даної точки і двох даних прямих;
6) даної точки, даної прямої і даного кола;
7) даної точки і двох даних прямих;
8) двох даних точок і даного кола;
9) двох даних точок і даної прямої;
10) трьох даних точок.

Таким чином, ми розв'язали 10 різних задач (з них четверта і десята вам добре відомі зі шкільного курсу).

Задача Аполлонія, яку ми розглянули, – *одна з найвідоміших задач давнини*.

А чи чули ви про так звані **три знамениті задачі давнини**? Ось вони.

1. ЗАДАЧА ПРО КВАДРАТУРУ КРУГА. Треба побудувати квадрат, площа якого дорівнює площі даного круга.

2. ЗАДАЧА ПРО ПОДВОЄННЯ КУБА (інакше – *делійська задача*). Треба побудувати ребро куба, об'єм якого вдвічі більший за об'єм данного куба.

3. ЗАДАЧА ПРО ТРИСЕКЦІЮ КУТА. Треба даний довільний кут, поділити на три рівні частини.

Саме ці три задачі мають назву «*Знамениті геометричні задачі давнини*».

Ці задачі легко розв'язуються, і розв'язання їх були вже відомі на той час. Проте треба не просто розв'язати ці задачі, а здійснити розв'язування так, щоб не використовувати ніяких інших інструментів, крім циркуля і лінійки (без метричних позначок). Тут і починаються труднощі.

Виявляється, що жодної з цих задач за таких умов розв'язати неможливо.

Застосування інверсії дає змогу узагальнити задачу Аполлонія про три заданих кола, два з яких дотикаються одне до одного (неважливо – зовнішньо чи внутрішньо).

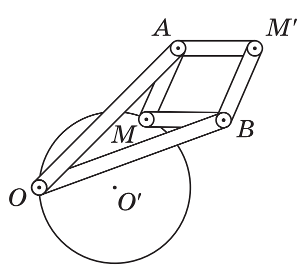
У всіх інших випадках розміщення трьох заданих кіл задача Аполлонія або не має розв'язку, або зводиться до вищезгаданої задачі.

Якщо «дотик кола і точки» розуміти як «коло проходить через точку», а пряму розглядати як коло нескінченно великого радіуса, то розв'язування задачі Аполлонія про три заданих кола методом інверсії узагальнюється на задачі про прямі і точки.

Для допитливих

Описаний вище спосіб побудови кіл за допомогою циркуля і лінійки, в які переходять при інверсії задані кола, громіздкий. А якщо треба побудувати образ більш складної фігури, ніж пряма чи коло? Для цього люди створили прилади – їх називають *інверсорами*.

На малюнку зображено *інверсор Посельє*, який складається із шести шарнірно закріплених планок, причому: $OA = OB$, $AM = AM' = BM = BM'$. Цей інверсор працює так: точка O фіксується; якщо точка M описує певну лінію, то точка M' – описує лінію, отриману з першої інверсією з центром у точці O та коефіцієнтом інверсії $AO^2 - AM^2$. Спробуйте зробити такий інверсор (це зовсім нескладно) і виконати за його допомогою відповідні побудови.



Перша задача ПРО КВАДРАТУРУ КРУГА є найдавнішою. Її історія починається ще чотири тисячі років тому. Цю задачу, крім греків, намагалися розв'язати мудреці Вавилона і Єгипту. Незалежно від них спроби щодо розв'язання цієї задачі робили китайці та індійці. Протягом багатьох століть учені прагнули розв'язати цю задачу, однак – марно. Остаточного «удару» по всіх ілюзіях щодо розв'язування задачі про квадратуру круга за допомогою циркуля і лінійки було завдано в другій половині XIX ст. Німецький математик *Ф. Ліндеман* у 1882 р. *довів, що задача про квадратуру круга є нерозв'язною за допомогою циркуля і лінійки*. Цей історичний факт є наслідком того, що, за доведенням Ф. Ліндемана, – π є числом ірраціональним. Розглянемо доведення цього наслідку.

Нехай дано круг, радіус якого дорівнює R, і треба побудувати квадрат, рівновеликий цьому кругу. Позначимо сторону квадрата через x. Тоді $x^2 = \pi R^2$, звідси: $x = R\sqrt{\pi}$. Отже, побудова квадрата, рівновеликого даному кругу, зводиться до побудови добутку даного відрізка R на відрізок $\sqrt{\pi}$. Причому цю побудову треба зробити за допомогою циркуля і лінійки, тобто шляхом побудови скінченного числа кіл і прямих.

У теорії геометричних побудов встановлено, що за допомогою циркуля й лінійки можна побудувати відрізок, що відрізняється від заданого множенням на дійсне число лише в тому разі, коли це число є раціональним (числом, яке можна представити як відношення двох цілих чисел).

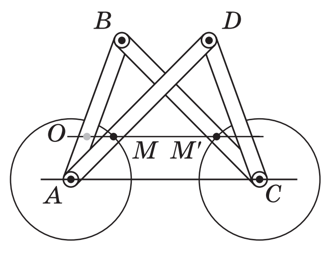
Оскільки Ф. Ліндеман першим довів, що число π є ірраціональним, його називають «переможцем числа π», а інколи «переможцем у розв'язанні задачі про квадратуру круга».

Походження другої задачі ПРО ПОДВОЄННЯ КУБА пов'язане з природним прагненням стародавніх учених узагальнити задачу про подвоєння квадрата, тобто про побудову квадрата, площа якого перевищувала б площу даного квадрата вдвічі.

Стародавні греки порівняно легко розв'язували задачу про подвоєння квадрата. Для цього треба було вміти будувати за допомогою циркуля і лінійки відрізок $\sqrt{2}$. Розв'язання ж задачі про подвоєння куба зводилося до геометричної побудови відрізка $\sqrt[3]{2}$. Однак усі спроби побудувати відрізок $\sqrt[3]{2}$ циркулем і лінійкою були безуспішними протягом багатьох століть. І лише

Для допитливих

Простіший за інверсор Поселье – *інверсор Гарта* (див. мал.). Він складається лише з чотирьох шарнірно з'єднаних планок, причому $AB = CD$, $BC = AD$. Фігура, яку утворюють ці планки, називається *антипаралелограм*. Якщо деяку точку O відрізка AB закріпити на площині і позначити точки M і M' на планках AD і BC, що лежать на спільній прямій, яка проходить через точку O паралельно AC, то руху точки M по певній фігурі буде відповідати рух точки M' по фігурі-образу, отриманому інверсією з центром у точці O і коефіцієнтом інверсії



$$\frac{AO \cdot BO}{AB^2}\left(AD^2 - DC^2\right).$$

у першій половині XIX ст. було доведено, що за допомогою циркуля і лінійки таку побудову здійснити неможливо, а отже, неможливо розв’язати й задачу про подвоєння куба. Беззаперечне доведення нерозв’язності цієї задачі за допомогою циркуля і лінійки висунув французький математик *П. Вантцель* у 1837 р.

Третя знаменита геометрична задача – ПРО ТРИСЕКЦІЮ КУТА, тобто про поділ довільного кута на три рівні частини. Ця задача виникла внаслідок потреб архітектури і будівництва. Користуючись циркулем і лінійкою, стародавні греки вміли ділити довільний кут навпіл, а також ділити прямий кут на три рівні частини. Однак виконати трисекцію довільного кута не вдавалося.

Р. Декарт був першим, хто висловив припущення, що трисекцію довільного кута неможливо виконати за допомогою циркуля і лінійки. Строге доведення нерозв’язності цієї задачі зробив П. Вантцель у 1837 р.

Таким чином, стало відомо остаточно про *неможливість розв’язання трьох знаменитих задач давнини*.

Однак дехто й досі продовжує пошуки такого розв’язання. Що ж, позитивний момент подібного процесу – це завжди можливість «паралельного» відкриття чогось важливого і цікавого.

Більше дізнатися з цієї теми можна в літературі:

1. Энциклопедия элементарной математики: Т. 4. – М.: Физматгиз, 1963.
2. *Конфорович А. Г.* Визначні математичні задачі. – К.: Рад. шк., 1981.
3. *Костовский А. Н.* Геометрические построения одним циркулем. – М.: Наука, 1989.
4. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии: Ч. 2. – М.: Наука, 1991.
5. *Савин А. В.* Математические миниатюры. – М.: Детская литература, 1991.
6. *Тесленко І. Ф.* Метод інверсії та його застосування. – К.: Рад. шк., 1958.
7. *Чистяков В. Д.* Три знаменитые задачи древности. – М.: Учпедгиз, 1963.

ТРИ ЗНАМЕНИТІ ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ ДАВНИНИ

1. ***Задача про квадратуру круга.***
2. ***Задача про подвоєння куба (делійська задача).***
3. ***Задача про трисекцію кута.***

Німецький математик Ф. Ліндеман у 1882 р. довів:
1) π – число ірраціональне;
2) задача про квадратуру круга є нерозв’язною за допомогою циркуля і лінійки.

Відрізок $x = R\sqrt{\pi}$ побудувати неможливо, бо π – число ірраціональне.

Французький математик П. Вантцель у 1837 р. довів, що задачі про подвоєння куба і трисекції кута є нерозв’язними за допомогою циркуля і лінійки.

Для допитливих

1. Через дві точки проведено три кола, кожне з яких проходить через ці дві точки. У яку фігуру перейдуть задані кола при інверсії з центром в одній з цих точок?

2. У яку фігуру при інверсії перейдуть три паралельні прямі?

3. Побудуйте коло, що проходить через дві задані точки і дотикається до заданої прямої.

4. Доведіть, що інверсори Посельє і Гарта справді виконують перетворення інверсії.

Індукція в геометрії

...Розуміння і вміння правильно застосовувати принцип математичної індукції – це вагомий критерій зрілості, що необхідно для математика.

А. М. Колмогоров

Здавна відомий *рекурентний спосіб задання числових послідовностей, за яким кожен наступний член послідовності визначається через попередній за допомогою певної формули*. Зокрема, цим способом користувався ще Архімед при наближенні до площі круга площ вписаних багатокутників. Саме такі формули називаються *рекурентними* (від латинського *recurro* – «біжу назад»).

Наприклад, послідовність непарних чисел 1, 3, 5, ... можна задати рекурентною формулою:

$$a_{n+1} = a_n + 2, \text{ при } a_1 = 1.$$

Справді, другий член послідовності $a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$, третій $a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5$ і т. д.

Аналогічно можна задати послідовність парних чисел, арифметичну та геометричну прогресії тощо.

У XVII ст. виникла ідея застосувати аналогічний принцип для доведення математичних тверджень, які подібно до нескінченних послідовностей мають нескінченну кількість окремих тверджень: T_1, T_2, T_3, ... Міркуємо так.

Нехай ми вміємо доводити, що:

1. ***(Б) перше твердження є правильним;***
2. ***(П) з правильності будь-якого з тверджень ряду $\{T_k\}$ випливає правильність наступного твердження T_{k+1}.***

Тоді ми довели всі твердження ряду T_1, T_2, T_3, ..., бо отримали ланцюг теорем:

$$T_1 \to T_2 \to T_3 \to T_4 \to \ldots \to T_k \to T_{k+1} \to \ldots .$$

Ми описали схему методу *математичної індукції* (ММІ). Теорему (Б) називають *базою індукції*, а теорему (П) – *індукційним переходом*. Завдяки індукційному переходу ми отримали «хвилю» доведень від першого, правильного твердження, до другого і т. д.

Зрозуміло, що методом математичної індукції можна доводити тільки твердження, які містять натуральний параметр n.

Схема метода ММІ:

1. **База індукції** (Б).
   Доводимо правильність першого твердження (при $n = 1$).
2. **Індукційний перехід** (П).
   Доводимо, що з правильності твердження при $n = k$ випливає правильність твердження при $n = k + 1$.

Розглянемо кілька прикладів на доведення тверджень методом математичної індукції.

Приклад 1. Доведіть, що квадрат $2^n \times 2^n$ без однієї клітинки можна розрізати на «кутики» з трьох клітинок.

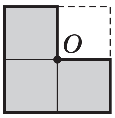
Розв’язання

У твердженні, яке треба довести, є натуральна змінна n. Маємо:

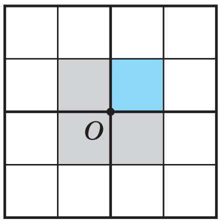
T_1 – твердження про квадрат 2×2;
T_2 – твердження про квадрат 4×4;
T_3 – твердження про квадрат 8×8;
… … … … … … … … … … … … … …
T_{10} – твердження про квадрат $2^{10} \times 2^{10}$.
… … … … … … … … … … … … … …

1) Твердження T_1 очевидно виконується, бо після вирізання довільної клітинки залишається саме заданий «кутик» (мал. 6.51).

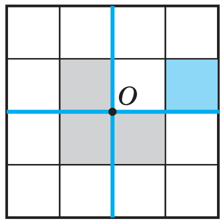
2) Спробуємо довести твердження T_2. Квадрат 4×4 можна поділити на чотири квадрати розміром 2×2. З тим квадратом, який містить вирізану клітинку, все зрозуміло (твердження T_1). Якщо вирізати «кутик» так, щоб його точка O збігалася із центром квадрата (мал. 6.52, 6.53), отримаємо три «кутики».



Мал. 6.51



Мал. 6.52



Мал. 6.53

3) Тепер припустимо правильність твердження T_k і доведемо крок індукції $T_k \to T_{k+1}$, тобто що з твердження «квадрат $2^k\times2^k$ без однієї клітинки можна розрізати на кутики» випливає – «квадрат $2^{k+1}\times2^{k+1}$ без однієї клітинки можна розрізати на кутики».

Доведення

Поділимо квадрат розміром $2^{k+1}\times2^{k+1}$ на чотири квадрати $2^k\times2^k$.

В одному з них відсутня клітинка. Його за твердженням можна поділити на «кутики».

У трьох інших заберемо по одній клітинці так, щоб із цих клітинок утворився «кутик», точка O якого збігається з центром даного квадрата $2^{k+1}\times2^{k+1}$ (аналогічно тому, як це ми зробили при доведенні T_2). Скористаємося твердженням T_k.

Твердження T_{k+1} доведено.

Ми довели T_1 – базу індукції і $T_k \to T_{k+1}$ – індукційний перехід. Тоді виконується будь-яке твердження T_n і задачу розв’язано.

Для допитливих

Можливо, перший, хто висловив і втілив ідею математичної індукції, був французький учений *Блез Паскаль* (1623–1662).

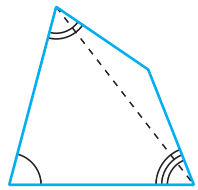
Пізніше цю ідею почали називати принципом (тобто правилом, законом) математичної індукції (від латинського *inductio* – «наведення»).

У 1838 р. в Британській енциклопедії за підписом відомого шотландського математика, першого президента Лондонського математичного товариства *Августа де Моргана* (1806–1871) була опублікована стаття під назвою «Математична індукція».

Приклад 2. Доведіть, що для кожного натурального $n \geqslant 4$ існує опуклий n-кутник, який має тільки 3 гострі кути.

Розв'язання

1) *База індукції* – справедливість твердження при $n = 4$ доводимо прямою побудовою (мал. 6.54).
2) *Індукційний перехід* доводимо «відрізанням» одного з тупих кутів – число сторін зменшиться на один, а гострі кути збережуться.
3) Тоді для довільного $n \geqslant 4$ існує опуклий n-кутник, який має 3 гострі кути.



Мал. 6.54

Що вимагалося довести.

Приклад 3. На скільки частин n прямих ділять площину, якщо серед них немає паралельних і ніякі три з них не перетинаються в одній точці.

Розв'язання

Скористаємося *методом математичної індукції*.

1) Тепер замість послідовності тверджень маємо послідовність запитань: на скільки частин ділить площину одна пряма? На скільки частин ділять площину дві прямі? На скільки частин ділять площину три прямі? і т. д. Якщо дамо відповідь на ці запитання, отримаємо послідовність тверджень:

$$T_1 = 2,\ T_2 = 4 = 2 + 2,\ T_3 = 7 = 4 + 3,\ T_4 = 11 = 7 + 4,\ \ldots .$$

2) *База індукції* $T_1 = 2$ доведена побудовою.

3) Для того щоб довести індукційний перехід, треба записати T_n через n. Використовуючи знайдені значення T_1, T_2, T_3, T_4, маємо висновок, що $T_n = T_{n-1} + n$.

Зауваження. Ми вгадали останню залежність, проте **вгадане – це ще не доведене.**

Індукційний перехід. Нехай правильним є твердження $T_k = T_{k-1} + k$. Доведемо, що тоді $T_{k+1} = T_k + (k + 1)$.

Доведення

Пряма перетинає k прямих у k точках, тобто ділить $k + 1$ старі частини площини на дві частини. Тоді $T_{k+1} = T_k + (k + 1)$ і індукційний перехід доведено.

Відповідь: n прямих, серед яких немає паралельних і ніякі три з них не перетинаються в одній точці, ділять площину на $T_n = 2 + 3 + 4 + \ldots + n$ частин.

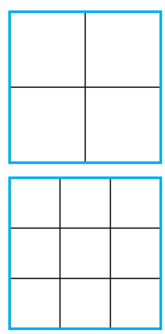
Для допитливих

1. Аркуш можна розрізати на 4 або на 6 частин. Доведіть, що за цим правилом його можна розрізати на довільне число частин, починаючи з дев'яти.

Порада. Якщо ми ділимо аркуш на 4 або 6 частин, то частин стає більше на 3 або на 5. Доведіть індукційний перехід: якщо можна поділити аркуш на k, $k + 1$, $k + 2$ частини, то можна це зробити і для $k + 3$, $k + 4$, $k + 5$ частин.

2. Доведіть, що квадрат можна поділити на n квадратів (для довільного n), починаючи із шести.

Порада. Врахуйте, що квадрат можна поділити як на 4, так і на 9 квадратів (див. мал.), і зверніть увагу на задачу № 1.



Приклад 4. Площину поділено на частини кількома прямими. Доведіть, що ці частини площини можна пофарбувати в два кольори так, що довільні дві суміжні (за стороною) частини матимуть різні кольори.

Доведення

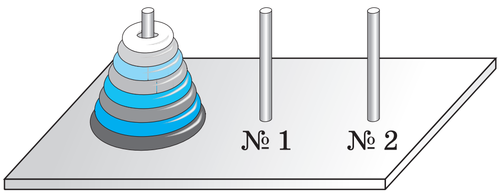
1) Для того щоб скористатися методом математичної індукції, переформулюємо умову задачі: «На площині проведено n прямих ...».

2) Тепер можна розглянути *базу індукції* – випадок, коли $n = 1$. Очевидно, що відповідне пофарбування можна здійснити.

3) *Індукційний перехід.* Якщо маємо k прямих, то площина розфарбована так, що дві довільні суміжні частини мають різні кольори. Проводимо $k + 1$ пряму і перефарбовуємо в протилежний колір усі області з одного боку від неї. Маємо шукане пофарбування.

Тоді *твердження задачі є правильним для довільного числа прямих*.

Приклад 5. (Гра «Ханойська башта»). Маємо дитячу пірамідку з n кільцями і два стержні такої самої висоти (мал. 6.55). Можна перекладати кільця з одного стержня на інший, але не можна при цьому класти більше кільце на менше. Доведіть: **а)** можна перекласти всі кільця на один із вільних стержнів і **б)** це можна зробити за $(2^n - 1)$ перекладання.



Мал. 6.55

Доведення

1) *База індукції*. Верхнє кільце кладемо на один із стержнів (№ 1), а друге – на інший (№ 2). Потім менше кільце знімаємо зі стержня № 1 і кладемо на стержень № 2. Маємо, що менше кільце знаходиться поверх більшого, а загальне число перекладань для $n = 2$ становить $3 = 2^2 - 1$.

2) *Індукційний перехід*. Маємо k кілець на одному зі стержнів. Зроблено це за $(2^k - 1)$ кроків. Треба довести: **а)** можна $k + 1$ кільце перекласти на один стержень і **б)** зробити притому $2^{k+1} - 1$ перекладання. Доведемо це.

2-а) За $(2^k - 1)$ кроків перекладемо всі кільця, крім останнього $(k + 1)$-го, на один стержень. **2-б)** Останнє $(k + 1)$-е кільце перекладемо на вільний стержень. **2-в)** Потім за $2^k - 1$ кроків перекладемо всі інші кільця на нього (можна зробити за умовою).

Маємо загальну кількість кроків

$$(2^k - 1) + 1 + (2^k - 1) = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Індукційний перехід доведено.

Тоді: **а)** *можна перекласти всі n кілець на один із вільних стержнів відповідно до умови*; **б)** *це можна зробити за* $(2^n - 1)$ *перекладання.*

Завдання для самостійного розв'язування

1. На скільки трикутників можна поділити n-кутник (не обов'язково опуклий) його діагоналями, що не перетинаються?

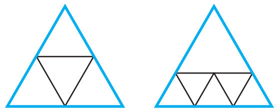
Геометрія немовби символізує все, пов'язане з практикою, а поезія – все, пов'язане з мрією. Але в царстві уяви вони споріднені і повинні йти в парі, як дорогоцінна спадщина кожної молодої людини.

Флоренс Мілнер

2. Визначте число діагоналей, що не перетинаються і поділяють n-кутник на трикутники.

3. На скільки частин опуклий n-кутник поділяється всіма його діагоналями, якщо будь-які три з них не перетинаються в одній точці?

4. Доведіть, що правильний трикутник можна поділити на n правильних трикутників, починаючи із чотирьох.
(Порада. Див. мал. 6.56.)



Мал. 6.56

5. Укажіть усі значення n, для яких не можна квадрат розрізати на n менших квадратів.

6. Дано n довільних квадратів. Доведіть, що їх можна розрізати на частини так, що з отриманих частин можна скласти новий квадрат.

7. Площину поділено на частини кількома колами. Доведіть, що ці частини площини можна розфарбувати в два кольори так, що довільні дві суміжні (за стороною) частини матимуть різні кольори.

8. На площині дано кілька кіл. У кожному з них проведена хорда. Доведіть, що отриману «карту» можна розфарбувати трьома кольорами так, що дві суміжні (за стороною) області матимуть різні кольори.

9. На площині m точок розмістили так, що на кожній прямій, яка сполучає дві з цих точок, міститься хоча б ще одна з них. Доведіть, що всі ці m точок лежать на одній прямій.

Більше дізнатися з цієї теми можна в літературі:

1. *Генкин С. А.*, *Итенберг И. В.*, *Фомин Д. В.* Ленинградские математические кружки. – Киров: «АСК», 1994.
2. *Спивак А. В.* Математический кружок. – М.: Посев, 2003.
3. *Тадеєв В. О.* Неформальна математика. 6–9 класи. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003.
4. *Шустеф Ф. М.* Сборник олимпиадных задач по математике. – Минск: Вышэйш. шк., 1977.

Той, хто не знає математики, не може пізнати ніякої іншої науки, не може навіть збагнути свого невігластва, а тому не шукає й ліків від нього.

Роджер Бекон

Здоров'я вам і талану, любі друзі!

ПЕРЕВІР СЕБЕ
ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДСУМКОВОГО ПОВТОРЕННЯ КУРСУ ПЛАНІМЕТРІЇ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Недостатньо мати хороший розум,
Головне – уміти його використовувати.

Рене Декарт

Пропоновані завдання в тестовій формі дадуть вам змогу швидко отримати інформацію про те, чи дійсно ви засвоїли програму з геометрії для загальноосвітніх навчальних закладів з певної теми та підготуватися до підсумкової атестації після закінчення 9-го класу і навіть випускного зовнішнього оцінювання (по темах планіметрії).

Зауваження. Пропоновані завдання за складністю орієнтовані на середній і підвищений рівень (друга частина зовнішнього оцінювання та випускного оцінювання за курс школи II ступеня). Зірочкою позначено завдання, дещо складніші за інші або такі, що вимагають знання фактів, які відповідають програмі класів з поглибленим вивченням математики. Перевірити правильність виконання завдань вам допоможуть відповіді, наведені в розділі «Відповіді і поради».

У завданнях 1–38 треба обрати з пропонованих відповідей ОДНУ, яка є, на вашу думку, правильною.

1. Уздовж прямої вулиці завдовжки 800 м від одного її кінця до іншого (по прямій) потрібно посадити дерева. **Скільки для цього треба викопати квадратних ям** (периметр кожної 2 м), щоб відстань між деревами дорівнювала 5 м?

А	Б	В	Г	Д
160	158	200	Інша відповідь	159

2. У якому відношенні потрібно поділити відрізок на дві частини так, щоб середина меншої з них поділяла відрізок у відношенні 1 : 3?

А	Б	В	Г	Д
1 : 3	1 : 2	1 : 4	2 : 1	2 : 3

3. Третина кута α дорівнює п’ятій частині кута, суміжного з α. **Який кут більший: α, чи суміжний з ним?**

А	Б	В	Г	Д
α	Ці кути рівні	Порівняти не можна	Суміжний з α	Інша відповідь

4. Кут між бісектрисою одного із суміжних кутів і їхньою спільною стороною дорівнює третині кута між бісектрисами цих суміжних кутів. **Знайдіть ці суміжні кути.**

А	Б	В	Г	Д
60° і 120°	90° і 90°	40° і 120°	30° і 150°	Інша відповідь

5. Після побудови бісектрис заданих суміжних кутів отримали три прямі кути. **Якими були задані суміжні кути?**

А	Б	В	Г	Д
45° і 135°	60° і 120°	30° і 90°	90° і 90°	Інша відповідь

6. Сторони двох кутів взаємно перпендикулярні. **Чи рівні** дані кути?

А	Б	В	Г	Д
Так, завжди	Ні	Не завжди	Порівняти не можна	Інша відповідь

7. Укажіть, скільки з наведених тверджень є правильними.
1) Не можна побудувати вертикальний кут для кута, більшого за розгорнутий.
2) Бісектриси суміжних кутів взаємно перпендикулярні.
3) Для кутів, утворених перетином двох прямих, сума двох суміжних кутів може дорівнювати сумі двох вертикальних кутів.
4) Градусні міри двох суміжних кутів можуть бути чисельно представлені парними числами.
5) Градусні міри двох суміжних кутів можуть бути чисельно представлені тільки непарними числами.

А	Б	В	Г	Д
Одне	Три	Два	Чотири	Інша відповідь

8*. Укажіть, скільки з наведених тверджень є правильними.
1) Якщо серединні перпендикуляри до всіх сторін трикутника проходять через вершини цього трикутника, то такий трикутник рівносторонній.
2) У довільному трикутнику сума довжин трьох його висот більша за периметр цього трикутника.
3) У будь-якому нерівнобедреному трикутнику основа бісектриси трикутника міститься між основами медіани і висоти, проведеними з тієї самої вершини.
4) Якщо сторони двох кутів взаємно перпендикулярні, то такі кути рівні.
5) Якщо сторони одного кута відповідно паралельні сторонам другого кута, то такі кути або рівні, або їх сума дорівнює 180°.

А	Б	В	Г	Д
Одне	Два	Три	Чотири	П'ять

9. Один з кутів трикутника дорівнює 48°. **Знайдіть гострий кут**, утворений бісектрисами двох інших кутів цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
114°	96°	74°	66°	Інша відповідь

10*. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника утворює з його бічною стороною кут, що дорівнює куту при основі. **Знайдіть кути трикутника.**

А	Б	В	Г	Д
36°, 72°, 72°	30°, 30°, 120°	Інша відповідь	42°, 42°, 96°	Визначити неможливо

11*. Бісектриси двох внутрішніх кутів гострокутного трикутника перетинають сторони цього трикутника під кутами 63° і 81°. **Знайдіть кути трикутника.**

А	Б	В	Г	Д
36°, 54°, 90°	82°, 80°, 18°	60°, 72°, 48°	30°, 66°, 84°	Інша відповідь

12*. Трикутник ABC – прямокутний, BP і CE – бісектриси його гострих кутів, відрізки PK і EM – перпендикулярні до BC. **Знайдіть кут KAM.**

А	Б	В	Г	Д
90°	60°	Інша відповідь	135°	45°

13. Сторони AB і A_1B_1 трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ належать одній прямій, а вершини C і C_1 – прямій, яка паралельна першій. **Знайдіть відношення площ трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, якщо $AB : A_1B_1 = 2$.**

А	Б	В	Г	Д
1/2	4	2	1/4	Інша відповідь

14. Точка M ділить сторону BC паралелограма $ABCD$ у відношенні 2 : 3, рахуючи від вершини B. **Знайдіть відношення площі трикутника ABM до площі чотирикутника $AMCD$.**

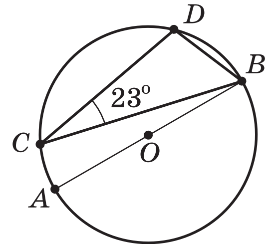
А	Б	В	Г	Д
4	4 : 9	1 : 4	2 : 3	Інша відповідь

15. **Укажіть, скільки з наведених тверджень є правильними.**
1) Існує трикутник з відношенням сторін 2 : 3 : 6.
2) Існує трикутник з відношенням кутів 150 : 120 : 35.
3) Довжини бічних сторін рівнобедреного трикутника можуть дорівнювати по 10 м, а основа – 20,01 м.
4) Довжина одного відрізка на 1 см більша за довжину другого і на 4 см більша за довжину третього. З цих відрізків можна скласти трикутник, периметр якого дорівнює 10 см.
5) Існує вписаний чотирикутник з відношенням мір кутів (узятих послідовно) 1 : 2 : 4 : 3.
6) Існує описаний чотирикутник з відношенням довжин сторін (узятих послідовно) 1: 6 : 4 : 3.

А	Б	В	Г	Д
Одне	Три	Жодного	Чотири	Інша відповідь

16. За малюнком Т-1 **знайдіть градусну міру кута DBA** (точка O – центр кола).

А	Б	В	Г	Д
90°	87°	46°	67°	Інша відповідь



Мал. Т-1

17. Один з кутів трикутника дорівнює 55°. Сторони трикутника, що утворюють цей кут, можна бачити з центра кола, описаного навколо цього трикутника, під кутами, міри яких відносяться як 2 : 3. **Знайдіть ці кути.**

А	Б	В	Г	Д
100° і 150°	50° і 75°	Визначити не можна	80° і 30°	Інша відповідь

18*. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 20°. На одній з його бічних сторін як на діаметрі побудовано коло. **Знайдіть градусні міри дуг**, що відтинаються на цьому колі іншими сторонами трикутника.

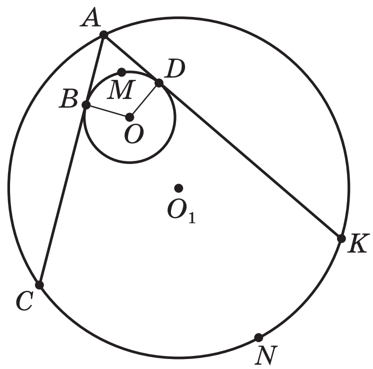
А	Б	В	Г	Д
40°, 60°, 80°	40°, 40°, 100°	20°, 20°, 120°	Інша відповідь	20°, 20°, 140°

19*. Із спільної точки до кола провели дві дотичні. **Визначте кут між цими дотичними**, якщо міра однієї з дуг, обмеженої точками дотику, дорівнює 120° 36′.

А	Б	В	Г	Д
60° 18′	59° 24′	239° 24′	60° 36′	Інша відповідь

20*. На малюнку Т-2 зображено два кола (з центрами O і O_1). **Знайдіть градусну міру дуги CNK**, якщо $\cup BMD = 130°$, а AB і AD – дотичні до меншого кола.

А	Б	В	Г	Д
Визначити неможливо	260°	100°	50°	Інша відповідь



Мал. Т-2

21. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 16 м. **Знайдіть відстань між ортоцентром** (точкою перетину висот) **і центром кола, описаного навколо трикутника.**

А	Б	В	Г	Д
16 м	4 м	Інша відповідь	8 м	2 м

22*. Довжини сторін трикутника 13 см, 14 см і 15 см. **Знайдіть радіус кола** з центром на середній за довжиною стороні трикутника, що дотикається до двох інших його сторін.

А	Б	В	Г	Д
6 см	$5\sqrt{2}$ см	Визначити неможливо	7 см	3 см

23*. Сторони трикутника відносяться як 2 : 3 : 4. У нього вписано півколо з діаметром, що лежить на більшій стороні. **Знайдіть відношення площі півкруга, обмеженого півколом, до площі трикутника.**

А	Б	В	Г	Д
$3\pi\sqrt{15}:50$	$3\sqrt{3}\pi:\sqrt{5}$	3 : 5	Інша відповідь	$\pi\sqrt{15}:12$

24. У рівнобічній трапеції середня лінія дорівнює 5 см, а діагоналі взаємно перпендикулярні. **Знайдіть площу трапеції.**

А	Б	В	Г	Д
125 см²	25 см²	$\frac{1}{2}\cdot 25$ см²	50 см²	Інша відповідь

25. У рівнобедрену трапецію вписано коло. **Порівняйте відношення** довжини цього кола до периметра трапеції з відношенням площі круга, обмеженого даним колом, до площі трапеції.

А	Б	В	Г	Д
1 : 2	2 : 1	1 : 4	1 : 1	Інша відповідь

26. **Знайдіть кути двох подібних трикутників**, якщо кожна сторона одного з них на 5 см більша за відповідну сторону іншого.

А	Б	В	Г	Д
Інша відповідь	60° , 30°, 90°	36°, 72°, 72°	45°, 45°, 90°	60°, 60°, 60°

27. У трикутнику через середину однієї із сторін провели прямі, паралельні двом іншим сторонам трикутника. **Знайдіть суму площ двох утворених трикутників**, якщо площа заданого трикутника дорівнює 24 см².

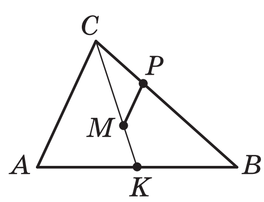
А	Б	В	Г	Д
6 см²	12 см²	18 см²	20 см²	Інша відповідь

28*. У прямокутному трикутнику довжини катетів дорівнюють 6 см і 8 см. Через точку перетину його бісектрис провели прямі паралельно його катетам. **Знайдіть відношення** площі утвореного прямокутника до площі заданого трикутника.

А	Б	В	Г	Д
Інша відповідь	6 : 1	1 : 6	1 : 4	1 : 12

29*. У трикутнику ABC через точку перетину його медіан M провели відрізок MP паралельно стороні AC (мал. Т-3). **Знайдіть площу трикутника CPM**, якщо площа трикутника ABC дорівнює S.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{9}S$	$\frac{2}{3}S$	$\frac{2}{9}S$	Інша відповідь	$\frac{1}{6}S$



Мал. Т-3

30*. У прямокутному трикутнику з точки перетину медіан провели перпендикуляри до катетів. **Знайдіть площу утвореного прямокутника**, якщо площа заданого трикутника дорівнює S.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}S$	$\frac{2}{3}S$	$\frac{4}{9}S$	$\frac{2}{9}S$	Інша відповідь

31. Кути трапеції відносяться як 3 : 4 : 5 : 6. **Який кут утворюється продовженням бічних сторін цієї трапеції?**

А	Б	В	Г	Д
Задана трапеція не існує	$90°$	$40°$	$60°$	Інша відповідь

32. Одна з діагоналей ромба дорівнює 4 м, а друга утворює зі стороною ромба кут $30°$. **Знайдіть площу ромба.**

А	Б	В	Г	Д
32 м²	$16\sqrt{3}$ м²	16 м²	$8\sqrt{3}$ м²	Інша відповідь

33. **Знайдіть на осі абсцис точку,** рівновіддалену від точок A (4; 1) і B (1; 4).

А	Б	В	Г	Д
(1; 0)	(0; 0)	(0; 1)	(1; 1)	Інша відповідь

34. **Знайдіть відстань** між точкою $A(2; -1)$ і центром кола, заданого рівнянням $x^2 - 2x + y^2 + 2y = -1$.

А	Б	В	Г	Д
Коло не існує	$\sqrt{3}$	1	7	Інша відповідь

35. **Укажіть, скільки з наведених тверджень є правильними.**
1) Центр кола є його центром симетрії.
2) Прямокутник має один центр симетрії – точку перетину діагоналей.
3) Паралелограм не має центра симетрії.
4) Середина відрізка є його центром симетрії.
5) Промінь має безліч центрів симетрії.

А	Б	В	Г	Д
Чотири	Одне	Два	Три	Інша відповідь

36*. **Укажіть, скільки з наведених тверджень є правильними.**
1) Сума довжин діагоналей опуклого чотирикутника більша за його півпериметр.
2) Серединні перпендикуляри до двох сторін правильного багатокутника не можуть бути паралельними.
3) Прямі, що містять бісектриси двох кутів правильного багатокутника, можуть бути паралельними.
4) Градусна міра зовнішнього кута правильного n-кутника дорівнює $360° : n$.
5) Сума довжин діагоналей опуклого чотирикутника більша за його периметр.

А	Б	В	Г	Д
Одне	Два	Три	Чотири	П'ять

37. Сторони правильного трикутника, квадрата і правильного шестикутника рівні. **Знайдіть відношення площ цих фігур.**

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3}:4:6\sqrt{3}$	$2:3:6$	Інша відповідь	$1:4:6$	$\frac{\sqrt{3}}{4}:1:6$

38. **Знайдіть довжину кола**, вписаного в ромб, довжини діагоналей якого 6 см і 8 см.

А	Б	В	Г	Д
9,6 см	$9{,}6\pi$ см	$(2{,}4\pi)^2$ см	Інша відповідь	$4{,}8\pi$ см

39. Знайдіть суму тангенсів гострих кутів прямокутного трикутника, якщо відношення площі цього трикутника до площі квадрата, побудованого на його гіпотенузі, дорівнює k.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{k}$	$\frac{1}{k}$	k	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	Інша відповідь

У завданнях 40–51 оберіть правильну, на вашу думку, відповідь. ЇХ МОЖЕ БУТИ КІЛЬКА.

40. З точки O виходять три промені: OA, OB, OC. Відомо, що $\angle AOB = 35°$, $\angle BOC = 50°$. **Якою може бути градусна міра кута AOC?**

А	Б	В	Г	Д
85°	325°	15°	275°	345°

41. Промені a і b утворюють кут 120°, а прямі a і c перетинаються під кутом 30°. **Якою може бути градусна міра кута,** сторони якого належать прямим b і c, якщо всі три прямі a, b, c перетинаються в одній точці?

А	Б	В	Г	Д
150°	90°	270°	210°	300°

42. Точки A, B, C розміщено на одній прямій. Причому $AB = 5{,}7$ м, $BC = 730$ см. **Якою може бути довжина відрізка AC** в дециметрах?

А	Б	В	Г	Д
16 дм	18 дм	130 дм	148 дм	Інша відповідь

43. На прямій позначено точки A, B і C. Причому $AC > AB$ і $CB = 2AB$. Від точки C відклали відрізок CM так, що $CM = MB$. **Порівняйте відрізки MC і AB.**

А	Б	В	Г	Д
$MC = AB$	$MC \leqslant AB$	$MC < AB$	Порівняти неможливо	$MC > AB$

44*. На прямій позначено точки A, B і C. Причому $AB < AC < 1{,}89AB$. **Порівняйте відрізки BC і AB.**

А	Б	В	Г	Д
$AB > BC$	$AB < BC$	$BC < 0{,}89\,AB$	$BC < 2{,}89\,AB$	Порівняти неможливо

45. Дві сторони прямокутного трикутника дорівнюють 3 см і 6 см. **Знайдіть третю сторону трикутника.**

А	Б	В	Г	Д
$3\sqrt{5}$ м	$\sqrt{3}$ см	$3\sqrt{3}$ см	Інша відповідь	$3\sqrt{5}$ см

46. Сума квадратів медіан прямокутного трикутника дорівнює 150 см^2. **Знайдіть найбільшу із сторін цього трикутника.**

А	Б	В	Г	Д
Інша відповідь	$15\sqrt{10}$ см	10 дм	10 см	$\frac{\sqrt{10}}{10}$ дм

47. З точки M проведено до кола січну і дотичну. Точку дотику позначили як D, а січна перетинає коло по діаметру AB. **Знайдіть градусну міру дуги *BD***, якщо $\angle ADM = 24°$.

А	Б	В	Г	Д
24°	132°	156°	48°	228°

48. **Знайдіть суму двох кутів**, один з яких є кутом паралелограма, а другий – кутом між висотами паралелограма, проведеними з вершини першого кута.

А	Б	В	Г	Д
90° або 270°	135°	180°	У загальному випадку визначити неможливо	Інша відповідь

49. **Запишіть рівняння прямої, що дотикається** до кола $x^2 + y^2 = 9$ у точці його перетину з віссю абсцис.

А	Б	В	Г	Д
$y = 3$	$x = 3$	$y = x$	$x = -3$	$y = -3$

50*. **Запишіть рівняння прямої,** що проходить через точку $M(1;\,2)$ і дотикається до кола $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

А	Б	В	Г	Д
$2x + \sqrt{5}y -$ $- 2 - 2\sqrt{5} = 0$	$y = \sqrt{2}x + 3$	$y = -\sqrt{2}x + 3$	$2x - \sqrt{5}y -$ $- 2 + 2\sqrt{5} = 0$	Інша відповідь

51*. У площині прямокутника $ABCD$ взято точку M. **Знайдіть $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$,** якщо $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 3$.

А	Б	В	Г	Д
–3	3	Визначити неможливо	Інша відповідь	0

52*. Дано паралелограм $ABCD$. Пряма l перетинає прямі AB, AC і AD відповідно в точках B_1, C_1 і D_1. Причому $\overrightarrow{AD_1} = \alpha\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB_1} = \beta\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC_1} = \gamma\overrightarrow{AC}$. **Знайдіть значення γ,** якщо $\alpha = 2$, а $\beta = 3$.

А	Б	В	Г	Д
Визначити неможливо	5	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{6}$

У завданнях 53–60 підберіть з правого стовпчика продовження до виразів лівого так, щоб (разом із заданими кольором словосполученнями) утворилися правильні твердження. УВАГА:

• одному виразу лівого стовпчика можуть відповідати кілька виразів правого;

• деякі твердження правого стовпчика можуть бути використані кілька разів, а деякі залишаться незадіяними.

53. Сформуйте правильні твердження.

Якщо послідовно сполучити	**А)** кінці двох діаметрів кола, **Б)** кінці двох нерівних відрізків, що перетинаються під прямим кутом і діляться точкою перетину навпіл, **В)** кінці двох рівних відрізків, що діляться точкою їхнього перетину навпіл, **Г)** через одну середини сторін правильного восьмикутника, **Д)** середини сторін рівнобедреної трапеції, діагоналі якої перетинаються під прямим кутом,	**то утвориться**	**1)** трапеція. **2)** прямокутник. **3)** паралелограм. **4)** квадрат. **5)** ромб. **6)** вписаний чотирикутник. **7)** точка.

54*. Сформуйте правильні твердження.

При перетині бісектрис кутів	**А)** паралелограма **Б)** ромба **В)** трапеції **Г)** прямокутника **Д)** вписаного чотирикутника **Е)** рівнобічної трапеції	**утворюється**	**1)** трапеція. **2)** прямокутник. **3)** паралелограм. **4)** квадрат. **5)** ромб. **6)** вписаний чотирикутник. **7)** точка.

55. Сформуйте правильні твердження.

Якщо трапеція	**А)** вписана, **Б)** описана, **В)** рівнобедрена, **Г)** за бісектриси кутів при одній основі має діагоналі, **Д)** має діагоналі, перпендикулярні до бічних сторін,	**то вона**	**1)** прямокутна. **2)** рівнобедрена. **3)** має однакові суми довжин основ і довжин бічних сторін. **4)** вписана.

56*. Сформуйте правильні твердження.

Якщо послідовно сполучити середини сторін	**А)** опуклого чотирикутника, **Б)** ромба, **В)** трапеції, **Г)** прямокутника, **Д)** рівнобічної трапеції, **Е)** паралелограма, **Є)** вписаного чотирикутника,	**то утвориться**	**1)** трапеція. **2)** прямокутник. **3)** паралелограм. **4)** квадрат. **5)** ромб. **6)** вписаний чотирикутник. **7)** прямокутна трапеція. **8)** рівнобедрена трапеція.

57. Сформуйте правильні твердження.

Якщо	**А)** пряма паралельна осі абсцис, **Б)** пряма паралельна осі ординат, **В)** пряма утворює кут α з додатним напрямом осі абсцис, **Г)** пряма утворює кут α з додатним напрямом осі ординат, **Д)** пряма утворює кут α з від'ємним напрямом осі ординат,	**то**	**1)** її кутовий коефіцієнт не існує. **2)** її кутовий коефіцієнт дорівнює $(-\mathrm{ctg}\,\alpha)$. **3)** її кутовий коефіцієнт дорівнює нулю. **4)** її кутовий коефіцієнт дорівнює $\mathrm{tg}\,\alpha$. **5)** її кутовий коефіцієнт дорівнює $(-\mathrm{tg}\,\alpha)$. **6)** її кутовий коефіцієнт дорівнює $\mathrm{ctg}\,\alpha$.

58*. Сформуйте правильні твердження.

Якщо	**А)** прямі перетинаються, **Б)** прямі паралельні, **В)** прямі збігаються, **Г)** прямі перпендикулярні, **Д)** прямі паралельні бісектрисі III координатної чверті, **Е)** прямі перпендикулярні до бісектриси I координатної чверті,	**то**	**1)** їхні кутові коефіцієнти дорівнюють -1. **2)** їхні кутові коефіцієнти за модулем рівні. **3)** у рівнянні прямих вільні члени однакові. **4)** їхні кутові коефіцієнти рівні. **5)** їхні кутові коефіцієнти дорівнюють 1. **6)** прямі мають вигляд $x = \mathrm{const}$. **7)** кутовий коефіцієнт однієї дорівнює оберненому значенню кутового коефіцієнта другої прямої, взятого з протилежним знаком. **8)** їхні кутові коефіцієнти не можуть бути рівними.

59*. Укажіть, скориставшись твердженнями правого стовпчика, як пов'язані градусні міри кутів α і β, якщо виконується твердження лівого стовпчика (сума $\alpha + \beta$ не перевищує $180°$).

Якщо	**А)** $\sin\alpha = \sin\beta$, **Б)** $\cos\alpha = \cos\beta$, **В)** $\sin\alpha = \cos\beta$, **Г)** $\sin\beta = \cos\alpha$, **Д)** $\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1$,	**то**	**1)** $\alpha + \beta = 45°$. **2)** $\alpha + \beta = 90°$. **3)** $\alpha + \beta = 180°$. **4)** $\alpha + \beta = 60°$. **5)** $\alpha = \beta$. **6)** $\alpha + \beta = 30°$.

60. Сформулюйте правильні твердження.

Якщо	**А)** $\vec{a} \parallel \vec{b}$, **Б)** $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, **В)** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ і $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$, **Г)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, **Д)** $\vec{a} + 2\vec{b} = 0$, **Е)** $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{b} \nparallel \vec{c}$,	то	**1)** вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не завжди рівні, але мають рівні модулі. **2)** вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні. **3)** вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні. **4)** вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. **5)** вектор $\vec{a}$ є нуль-вектором. **6)** вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ протилежно напрямлені. **7)** вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ співнапрямлені. **8)** $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

У завданнях 61–64 потрібно заповнити порожні клітинки таблиці так, щоб по горизонталях отримати правильні твердження.

61. Заповніть таблицю так, щоб утворилися правильні твердження.

1) ГМТ	середин рівних хорд даного кола	є	
2) ГМТ	вершин прямокутних трикутників зі спільною гіпотенузою	є	
3) ГМТ	центрів кіл, що проходять через задані дві точки,	є	
4) ГМТ	центрів рівних кіл, що проходять через задану точку,	є	
5) ГМТ	центрів кіл, що дотикаються до двох даних паралельних прямих,	є	
6) ГМТ	центрів кіл, дотичних до двох даних прямих, що перетинаються,	є	

62*. Заповніть таблицю, щоб утворилися правильні твердження.

1) Середини сторін чотирикутника послідовно сполучили – отримали прямокутник.	Тоді заданий чотирикутник відрізняє те, що	
2) Середини сторін чотирикутника послідовно сполучили – отримали ромб.		
3) У чотирикутник можна вписати коло, а дві суміжні його сторони рівні.		
4) Середини сторін чотирикутника послідовно сполучили – отримали квадрат.		
5) Навколо чотирикутника можна описати коло, а один з його кутів – прямий.		

63*. Заповніть таблицю.

ФІГУРА	Осі симетрії (вказати кількість і які саме прямі)
1) Рівносторонній трикутник	
2) Коло	
3) Дві прямі, що перетинаються	
4) Квадрат	
5) Правильний шестикутник	

64. Заповніть порожні клітинки таблиці.

Міра зовнішнього кута правильного багатокутника	$18°$	$40°$	$72°$	$60°$
Кількість сторін правильного багатокутника				

У завданнях 65–85 допишіть умову так, щоб задача була коректно сформульована і мала розв'язок або щоб утворене твердження було правильним.

65. Доведіть, що перпендикуляри, проведені до сторін кута в точках, що рівновіддалені від його вершини, перетинаються на ....

66. Доведіть, що бісектриси двох рівних кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, ...

67. Доведіть, що бісектриси двох нерівних кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, ...

68. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ висоти CK і CK_1 рівні. Доведіть, що ці трикутники рівні, якщо ....

69*. Якщо бісектриса зовнішнього кута трикутника паралельна його стороні, то такий трикутник ....

70. Якщо сума двох кутів трикутника більша за його інший кут, то такий трикутник ....

71*. Два трикутники рівні за двома сторонами і кутом не між ними, якщо заданий кут ....

72*. У рівнобічній трапеції висота дорівнює середній лінії. Доведіть, що її діагоналі ....

73*. Доведіть, якщо в трикутнику різниця двох кутів дорівнює прямому куту, довжини бісектрис внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині третього кута ....

74*. Два кола дотикаються одне до одного у точці K. Через точку K провели пряму, що перетинає ці кола в точках A і B. Тоді діаметри цих кіл AM і BP у випадку: **а)** зовнішнього дотику ....; **б)** внутрішнього дотику ....

75. Продовження висоти BK трикутника ABC перетинає коло, описане навколо цього трикутника, у точці P; BM – діаметр цього кола. Доведіть, що PM і AC ....

76*. Два кола перетинаються в точках A і B, AK і AM – діаметри цих кіл. Тоді відрізки KB і BM ....

77*. Радіуси AO і OB взаємно перпендикулярні й обмежують чверть кола. На відрізках AO і OB як на діаметрах побудовано два кола. Точку їхнього перетину, що міститься в заданій чверті кола, позначено через C. Доведіть, що точки A, C і B ....

78. Висота трапеції, проведена з вершини меншої основи, ділить більшу основу на відрізки, що дорівнюють півсумі і піврізниці основ цієї трапеції. Тоді дана трапеція ....

79*. Два трикутники подібні. Кожна із сторін одного з них відрізняється від відповідної сторони другого на одне й те саме число. Доведіть, що ці трикутники ....

80. Рівняння $x^2+y^2+ax+by=c$ буде рівнянням кола (ненульового радіуса) за умови ....

81. Рівняння $ax^2+by^2+mx+ny=c$ буде рівнянням кола (ненульового радіуса) за умови ....

82. З однієї вершини опуклого 16-кутника можна провести не більше як .. .. діагоналей.

83*. Опуклий n-кутник має .... діагоналей.

84*. Пряма $ax+by+c=0$ дотикається до кола $x^2+y^2=R^2$ тоді й тільки тоді, коли виконується співвідношення ....

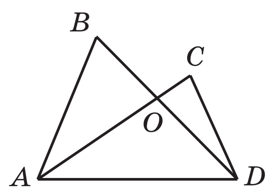
85. Якщо вектор колінеарний довільному вектору площини, то ....

У завданнях 86–128 запишіть тільки відповідь.

86. Дві бісектриси трикутника утворюють з його сторонами кути 99° і 117°. Знайдіть кути трикутника.

87. На стороні AC трикутника ABC позначено точку M так, що площа трикутника ABM в 2 рази більша за площу трикутника BCM. Порівняйте довжини відрізків AM і MC.

88. Площа трикутника ABD на малюнку Т-4 більша за площу трикутника ACD. Порівняйте площі трикутників ABO і CDO.



Мал. Т-4

89*. Висота і медіана, проведені з однієї вершини трикутника, поділяють його кут на три рівні частини. Знайдіть кути трикутника.

90. У рівнобедреному трикутнику: бічна сторона більша за висоту, проведену до основи на 4 см; відстань від точки перетину медіан до основи – 2 см. Обчисліть площу трикутника.

91. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 120 мм, а одна з його сторін – 28 мм. Якої довжини можуть бути інші сторони цього трикутника?

92. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 60°, а різниця гіпотенузи і меншого з катетів – 4 см. Знайдіть ці сторони трикутника.

93*. Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, поділяє гіпотенузу цього трикутника на відрізки завдовжки 3 см і 2 см. Знайдіть площу заданого трикутника.

94*. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 8 см, а середина основи віддалена від бічної сторони на 2 см.

95. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB=AC$) серединний перпендикуляр до сторони AC перетинає сторону BC в точці M. Знайдіть кут BAM, якщо $\angle ABC=43°$.

96*. У рівнобедреному трикутнику ABC основа AC = 1 м, $\angle A=15°$. У яких межах міститься довжина сторони AB?

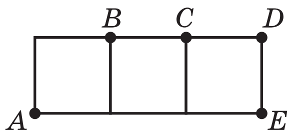
97*. У рівнобедреному трикутнику один з кутів 120°, а основа – 10 см. Знайдіть висоту, проведену до бічної сторони.

98*. У рівнобедреному трикутнику один із зовнішніх кутів 60°, а висота, проведена до бічної сторони, – 17 см. Знайдіть основу трикутника.

99*. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) кут при основі дорівнює 75°, AM – бісектриса, $BM = 10$ см. Знайдіть відстань від точки M до основи трикутника.

100*. До кола, описаного навколо трикутника ABC, провели дотичну в точці C та січну через точку B. Причому січна проходить поза трикутником ABC і перетинає дотичну в точці D. Знайдіть $\angle CDB$, якщо $\angle CAD = 36°$, $\angle CBD = 24°$.

101*. Точки A, B, C, D – вершини трьох рівних квадратів (мал. Т-5). Знайдіть $\angle BAE + \angle CAE + \angle DAE$.



Мал. Т-5

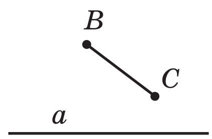
102*. У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює α, а радіус вписаного в нього кола r. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

103. Дано пряму a і відрізок BC (мал. Т-6). Знайдіть на прямій a таку точку A, щоб трикутник ABC (з основою BC) був рівнобедрений.

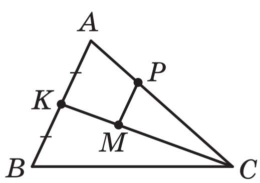
104. Порівняйте площі квадратів, побудованих на катеті рівнобедреного прямокутного трикутника і на висоті цього трикутника, проведеній до гіпотенузи.

105*. У трикутнику ABC через точку перетину медіан M провели відрізок MP паралельно стороні AB (мал. Т-7). Знайдіть площу трапеції $APMK$, якщо площа трикутника ABC дорівнює S, а точка K – середина AB.

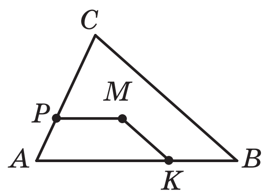
106*. У трикутнику ABC через точку перетину медіан M провели відрізки MP і MK паралельно сторонам AB і CB (мал. Т-8). Знайдіть площу трапеції $APMK$, якщо площа трикутника ABC дорівнює S.



Мал. Т-6



Мал. Т-7



Мал. Т-8

107. Діагоналі трапеції з основами 12 см і 20 см поділяють її середню лінію на три частини. Знайдіть довжини цих частин.

108*. Кут між висотами паралелограма, проведеними з однієї вершини, дорівнює 30°. Знайдіть площу паралелограма, якщо довжини вказаних висот 4 см і 10 см.

109*. Сума довжин діагоналей ромба дорівнює 14 см, а довжина сторони – 5 см. Знайдіть площу ромба.

110. Висота, проведена з тупого кута рівнобічної трапеції, поділяє її сторону на відрізки 4 см і 8 см. Радіус кола, вписаного в трапецію, дорівнює 2 см. Знайдіть кути і меншу основу трапеції.

111*. Висота, проведена з вершини A вписаної трапеції $ABCD$, поділяє її сторону на відрізки 4 см і 9 см, діагональ AC перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть площу трапеції.

112. Висота, проведена з тупого кута вписаної трапеції, поділяє її сторону на відрізки 4 см і 8 см. Знайдіть довжини всіх її сторін, якщо відомо, що в задану трапецію можна вписати коло.

113. Площа рівнобедреної трапеції 117 см^2, довжина меншої основи – 4 см, міра гострого кута – 45°. Знайдіть довжину бічної сторони трапеції.

114*. Точки E і F, G і H, K і L, N і M ділять відповідно кожну зі сторін AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ на три рівні частини. Відрізки EH і MK перетинають відрізок GL у точках Q і R відповідно. Обчисліть площу п'ятикутника $AEQRM$, якщо $AB = 2\sqrt{7}$ см.

115*. Середня лінія трапеції з основами a і b ($a < b$) ділить її на дві трапеції. Знайдіть відношення площ цих трапецій.

116. Коло, вписане в рівнобічну трапецію, поділяє точкою дотику бічну сторону цієї трапеції на відрізки 2 см і 18 см. Знайдіть висоту трапеції.

117. Точка перетину діагоналей ромба віддалена від однієї з його сторін на $\sqrt{3}$ см. Знайдіть діагоналі ромба, якщо сторона ромба дорівнює 4 м.

118. Визначте, чи лежать 3 точки $A(4; -1)$, $B(-8; -1)$ і $C(5; 1)$ на одній прямій.

119*. Визначте, чи лежать 3 точки $A(4; -1)$, $B(-8; 8)$ і $C(-4; 5)$ на одній прямій.

120. Запишіть рівняння кола, що дотикається до осей координат, міститься в IV координатній чверті і радіус якого дорівнює 5.

121. Запишіть рівняння дотичної до кола $(x-1)^2+(y+2)^2=1$, що проходить через точку $(1; -1)$.

122. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(-11; 5)$ паралельно прямій $x = 3$.

123. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(-1; 2)$ паралельно прямій $2x+y=1$.

124*. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(-1; 2)$ перпендикулярно до прямої $2x+y=1$.

125*. Складіть рівняння кола, що має за центр точку $(-1; 3)$ і дотикається до прямої $y=2x-1$.

126*. Вершини трикутника мають координати: $(0; 0)$, $(a; 0)$, $(b; c)$. Запишіть координати: **а)** центра O описаного навколо цього трикутника кола; **б)** ортоцентра трикутника H; **в)** центроїда трикутника M.

127. Де розміститься центр кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо: **а)** $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} < 0$; **б)** $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB} > 0$?

128*. У рівнобедреному трикутнику ABC кут B прямий, $AC = 2\sqrt{2}$, BD – медіана. Обчисліть скалярні добутки: **а)** $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}$; **б)** $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}$; **в)** $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BD}$.

129*. У трикутник ABC вписано коло з центром O, що дотикається до сторін трикутника в точках P, T і E. Знайдіть модуль вектора $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{OP}$, якщо $AB = 5$, $BC = 12$, $CA = 13$.

130*. Визначте тип геометричного перетворення, при якому точка $A(x; y)$ переходить у точку $A_1(x_1; y_1)$, якщо $x_1 = 0{,}2(2 + 3x + 4y)$, $y_1 = 0{,}2(-4 - 4x + 3y)$.

131*. Діагоналі трапеції перетинаються в точці O, S – точка перетину продовжень її бічних сторін, M і N – середини основ. Знайдіть відношення меншої основи трапеції до більшої, якщо $5\overrightarrow{OS} = 12\overrightarrow{MN}$.

132*. Точка $A(x; y)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{q}(a; b)$ та гомотетії відносно точки $O(x_o; y_o)$ з коефіцієнтом k переходить у точку $A_1(x_1; y_1)$. Знайдіть формули взаємозв'язку між координатами точок A і A_1.

ПІДСУМКОВЕ ПОВТОРЕННЯ КУРСУ ПЛАНІМЕТРІЇ

Повторення курсу планіметрії радимо почати, ще раз звернувшись до «Завдань для повторення розділу», котрі містяться наприкінці кожного розділу. Нагадаємо, що питання обов'язкового (мінімального) рівня знань виділено кольоровою рискою. Доцільно спочатку звернутись до завдань в тестовій формі (с. 251), а потім – до завдань, наведених нижче.

Дана підбірка завдань містить задачі на перевірку знань, набутих у попередні роки навчання, готуючи вас до подальших загальних атестацій та випробувань.

Пропоновані завдання поділено на два рівні складності: середній і підвищений. За потреби опрацювання завдань обов'язкового (мінімального) рівня звертайтеся до задач з нуликами наприкінці параграфів та наприкінці розділів.

Середній рівень складності

Трикутники

1. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$: $\angle A = \angle A_1 = 45°$, $\angle C = \angle C_1 = 105°$, $A_1C_1 = 6$ см, $AC = 12$ см, MN – середня лінія трикутника ABC ($M \in AB$, $N \in BC$). За даними задачі: **а)** доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$; **б)** доведіть, що $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle MBN$; **в)** порівняйте BN і A_1B_1; **г)** знайдіть BC; **д)** обчисліть площу трикутника ABC.

2. Два відрізки AB і CD однакової довжини перетинаються в точці O так, що прямі AD і BC паралельні, $OD = a$, $OC = b$. За даними задачі: **а)** доведіть, що $OA = a$, $OB = b$; **б)** знайдіть відношення периметрів трикутників OAC і ODB; **в)** знайдіть довжини відрізків CB і AD; **г)** знайдіть площу трикутника ACD; **д)** знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник AOD; **е)** радіус кола, описаного навколо трикутника BOC, якщо $\angle ADO = \alpha$.

3. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює b, кут при основі – α. Знайдіть: **а)** периметр трикутника; **б)** площу трикутника; **в)** радіус описаного кола; **г)** радіус вписаного кола; **д)** медіану і висоту, що проведені до бічної сторони.

4. Дві сторони трикутника дорівнюють 4 см і 6 см, кут між ними – 60°. Знайдіть: **а)** площу трикутника; **б)** периметр трикутника; **в)** висоту, проведену до третьої сторони; **г)** радіус описаного кола; **д)** радіус вписаного кола.

Чотирикутники

5. Через середину діагоналі BD паралелограма $ABCD$ перпендикулярно до неї проведена пряма, що перетинає сторони BC і AD в точках M і T відповідно. За даними задачі: **а)** доведіть, що $BMDT$ – ромб; **б)** знайдіть радіус кола, вписаного в чотирикутник $BMDT$, якщо $BD = 8$ см, $TM = 6$ см.

6. Бічну сторону трапеції поділено на n рівних частин і через точки поділу проведено прямі паралельно основам трапеції. Знайдіть довжину відрізків цих прямих, які лежать між бічними сторонами трапеції, якщо основи трапеції дорівнюють 23 см та 15 см і: **а)** $n = 2$; **б)** $n = 4$.

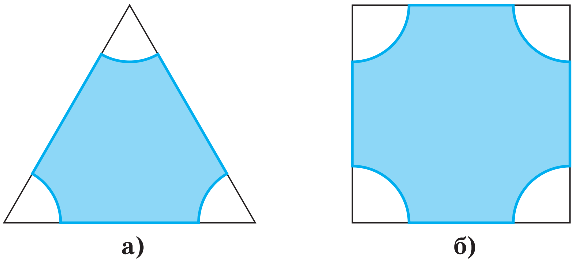
7. Діагональ прямокутника дорівнює 40 см. Перпендикуляр, проведений з вершини прямого кута прямокутника до діагоналі, ділить її у відношенні 2 : 3. Визначте: **а)** довжини сторін прямокутника; **б)** тангенс кута, утвореного стороною і діагоналлю.

8. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 м і 4 м. Через середину його гіпотенузи проведено прямі, паралельні катетам. Визначте вид утвореного чотирикутника і знайдіть його діагоналі.

Коло. Багатокутники

9. Трикутник з кутами 30°, 60°, 90° описано навколо кола. Знайдіть градусні міри дуг, на які коло ділиться точками дотику.

10. У кут ABC вписано коло. Точки дотику ділять коло на дві частини, які відносяться як 5 : 4. Визначте кут ABC.
11. Через кінці хорди, яка ділить коло у відношенні 2 : 7, проведено дві дотичні. Визначте кути утвореного трикутника.
12. Круг вписано у трикутник. Радіуси, проведені в точки дотику, поділили площу круга на частини, що відносяться як 13 : 12 : 11. Знайдіть кути трикутника.
13. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 6 см, основа – 4 см. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл.
14. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл.
15. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 5 см, основи – 4 см і 10 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.
16. Діаметр ведучого колеса електровоза дорівнює 2 м. Визначте швидкість електровоза, якщо ведуче колесо робить за 1 хв 100 обертів.
17. Знайдіть діаметр круга, площа якого дорівнює: **а)** різниці площ двох кругів, радіуси яких дорівнюють 10 см і 8 см; **б)** сумі площ двох кругів, радіуси яких дорівнюють 3 см і 4 см.
18. Навколо правильного n-кутника зі стороною 6 см описано коло. Крім того, у цей n-кутник вписане коло. Знайдіть площу кільця, утвореного двома колами, якщо: **а)** $n = 3$; **б)** $n = 4$; **в)** $n = 6$.
19. Сторона правильного n-кутника дорівнює a. Від його вершин відрізали кругові сектори з центрами у вершинах, радіусів b. Знайдіть площі утворених фігур, якщо: **а)** $n = 3$ (мал. П.1-а); **б)** $n = 4$ (мал. П.1-б); **в)** $n = 6$.



Мал. П.1

Метод координат. Вектори

20. Вершини трикутника розміщено в точках: $A(-5; 5)$, $B(8; 8)$, $C(5; -5)$; BD – бісектриса його внутрішнього кута. За умовою задачі: **а)** доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений; **б)** виразіть вектор $\overrightarrow{BD}$ через $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$; **в)** напишіть рівняння кола, діаметром якого є сторона AC; **г)** складіть рівняння прямих, на яких лежать сторони трикутника; **д)** обчисліть довжину медіани, проведеної до сторони BC; **е)** знайдіть косинуси кутів трикутника ABC; **є)** обчисліть площу трикутника ABC.
21. Трикутник ABC заданий координатами своїх вершин $A(0; 12)$, $B(9; 0)$, $C(0; -12)$; K – центр вписаного в трикутник кола, M – середина сторони AB. За умовою задачі: **а)** знайдіть довжину медіани CM; **б)** запишіть рівняння вписаного в трикутник кола; **в)** запишіть рівняння описаного навколо трикутника кола; **г)** виразіть вектор $\overrightarrow{KB}$ через $\overrightarrow{KA}$ і $\overrightarrow{KC}$; **д)** знайдіть косинус кута між векторами $\overrightarrow{KA}$ і $\overrightarrow{KC}$.

Побудови

22. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник за його гіпотенузою.
23. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і бісектрисою прямого кута.
24. Побудуйте прямокутник за стороною та діагоналлю.

25. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою та відношенням катетів, яке дорівнює 2 : 3.
26. Побудуйте паралелограм за двома діагоналями і кутом між ними.
27. Побудуйте ромб, діагоналі якого відносяться як 3 : 5.

Підвищений рівень складності

28. Знайдіть площу прямокутного трикутника, один катет якого – 13 см, а висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 12 см.
29. У прямокутному трикутнику основа висоти, опущеної на гіпотенузу, віддалена від бічних сторін на 3 см і 4 см. Знайдіть гіпотенузу.
30. У прямокутному трикутнику бісектриса гострого кута ділить протилежний катет у відношенні 5 : 4. Знайдіть гіпотенузу, якщо периметр трикутника дорівнює 72 см.
31. У прямокутному трикутнику з вершини прямого кута проведені висота довжиною 48 см і медіана – 50 см. Знайдіть периметр трикутника.
32. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 120 мм, висота, проведена до гіпотенузи, – 24 см. Знайдіть площу трикутника.
33. На катеті BC прямокутного трикутника ABC як на діаметрі побудовано коло, яке перетинає гіпотенузу AB в точці P. Знайдіть площу трикутника BCP, якщо $BC = a$, $AC = b$.
34. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відносяться як 5 : 13. Обчисліть площу цього трикутника, якщо сума радіусів вписаного й описаного кіл дорівнює 17 см.
35. Доведіть, що вписане в прямокутний трикутник коло точкою дотику ділить гіпотенузу на відрізки, добуток яких дорівнює площі трикутника.
36. До кола, радіус якого дорівнює 7 см, із точки, віддаленої від центра цього кола на 25 см, проведено дотичні. Знайдіть відстань між точками дотику.
37. Дві сторони трикутника дорівнюють 27 см і 18 см. З вершини кута, який вони утворюють, проведено бісектрису. Один з відрізків, на які бісектриса поділила третю сторону цього трикутника, дорівнює його бічній стороні. Знайдіть периметр трикутника.
38. У трикутнику ABC проведено бісектрису BP. Знайдіть її довжину, якщо $AB = 10$ см, $BC = 15$ см і $AC = 20$ см.
39. У трикутнику дві сторони дорівнюють 13 см і 15 см, а висота, проведена до третьої сторони, – 12 см. Знайдіть діаметр вписаного кола.
40. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 10 см, основа – 12 см. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл.
41. У кут 2α вписано коло, радіус якого дорівнює R. До кола проведено дотичну, перпендикулярну до бісектриси кута (проходить між вершиною кута і колом). Визначте периметр трикутника, який відтинає дотична від заданого кута.
42. У рівнобедрений трикутник ABC з кутом α при основі вписано коло. Периметр трикутника, який утворився внаслідок сполучення точок дотику, дорівнює P. Визначте периметр трикутника ABC.
43. Дві сторони трикутника дорівнюють a і b, кут між ними – α. Знайдіть радіус кола, яке проходить через інцентр даного трикутника та кінці третьої сторони.

Для допитливих

Якщо записати площу сегмента через радіанну міру його дуги α, то матимемо вираз $S = 0,5R^2(\alpha - \sin\alpha)$.

Звідси випливає, що **при всіх** α **має місце нерівність** $\sin\alpha < \alpha$.

1. Доведіть, що при всіх $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ справджується нерівність $\alpha < \operatorname{tg}\alpha$.

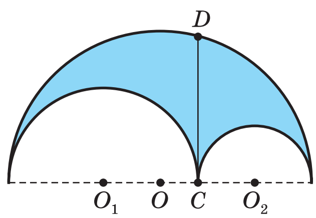
2. Чи можливо, щоб сума радіусів кількох кругів була більшою за 100, а сума їхніх площ – меншою за 0,01?

44. У трикутнику ABC кут B становить $140°$, сторона AC дорівнює 1, а площа трикутника – 0,7. Круг, радіус якого дорівнює $\sqrt{2}$, має за центр точку B. Знайдіть площу спільної частини трикутника ABC і круга.
45. Знайдіть площу спільної частини двох кругів, радіуси яких – 1 і $\sqrt{3}$, а відстань між їхніми центрами дорівнює 2.
46. Вершини правильного шестикутника, сторона якого дорівнює 2, є центрами кругів, радіуси яких – $\sqrt{2}$. Знайдіть площу частини шестикутника, що міститься поза цими кругами.
47. Пряма, паралельна стороні трикутника, ділить його на частини, площі яких відносяться як 2 : 1, рахуючи від вершини. У якому відношенні ця пряма поділяє дві інші сторони трикутника?
48. До кола, вписаного в рівнобедрений трикутник з основою 12 см, проведена дотична, паралельна його основі. Обчисліть довжину відрізка дотичної, який знаходиться між сторонами трикутника, якщо висота, проведена до основи, дорівнює 8 см.
49. Сума гострих кутів трапеції становить $90°$, висота трапеції дорівнює 2 см, основи – 12 см і 16 см. Знайдіть бічні сторони трапеції.
50. Більша основа трапеції є діаметром описаного навколо неї кола, радіус якого дорівнює R. Гострий кут трапеції – α. Визначте площу трапеції.
51. Рівнобічна трапеція описана навколо кола. Знайдіть площу трапеції, якщо її основи дорівнюють 8 см і 18 см.
52. Прямокутна трапеція описана навколо круга. Знайдіть площу круга, якщо основи трапеції дорівнюють 2 см і 6 см.
53. Центр вписаного у трапецію кола віддалений від кінців меншої основи на 156 см і 100 см, а від кінців бічної сторони – на 156 см і 65 см. Обчисліть площу трапеції.
54. Діагональ трапеції, вписаної в коло, радіус якого дорівнює R, утворює з бічними сторонами кути α і 2α. Визначте площу трапеції.
55. У прямокутній трапеції бічні сторони дорівнюють 24 см і 25 см, а більша діагональ є бісектрисою гострого кута. Обчисліть площу трапеції.
56. Визначте гострий кут ромба, якщо його площа дорівнює 8 см^2, а площа вписаного в нього круга – π см^2.
57. Висота ромба дорівнює 6 см, одна з діагоналей – 10 см. Обчисліть площу ромба.
58. У паралелограмі бісектриса гострого кута, який дорівнює $30°$, ділить протилежну сторону на відрізки 6 см і 4 см, починаючи від вершини тупого кута. Обчисліть площу паралелограма.
59. У коло вписано квадрат, а в квадрат – коло. Площа кільця, утвореного колами, дорівнює 9π см^2. Знайдіть сторону квадрата.
60. Круг і квадрат мають однакові площі. У круг вписали квадрат, а в квадрат – круг. Що більше: площа квадрата, вписаного у круг, чи площа круга, вписаного у квадрат?
61. Доведіть, що сума відстаней від довільної точки правильного шестикутника до прямих, що містять його сторони, є величиною сталою для даного шестикутника

Для допитливих

Доведіть, що площу арбелоса Архімеда (внутрішня частина площини, обмежена трьома півколами, центри яких лежать на одній прямій, а діаметр більшого півкола дорівнює сумі діаметрів менших півкіл – див. мал.) можна обчислити за формулою

$$\frac{1}{4}\pi CD^2.$$



і не залежить від вибору точки на шестикутнику. Знайдіть цю відстань, якщо сторона шестикутника дорівнює $4\sqrt{3}$.

62. Шестикутник вписано в коло. Три його сторони, взяті через одну, дорівнюють 5 см кожна, а решта сторін по 3 см. Знайдіть довжину кола.

63. Діагоналі опуклого чотирикутника дорівнюють 10 см і 12 см. Відрізки, що сполучають середини протилежних сторін, рівні. Знайдіть площу чотирикутника.

64. Діагоналі опуклого чотирикутника рівні. Відрізки, що сполучають середини протилежних сторін, дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть площу чотирикутника.

65. Із точки поза колом до нього проведено січну і дотичну. Сума їх довжин дорівнює 30 см, а внутрішній відрізок січної на 2 см менший від дотичної. Обчисліть довжини січної і дотичної.

66. Дотична і січна, проведені до кола з однієї точки, дорівнюють 20 см і 40 см відповідно. Січна віддалена від центра кола на 8 см. Знайдіть радіус кола.

67. Доведіть, що у вписаному чотирикутнику добуток діагоналей дорівнює сумі добутків протилежних сторін.

68. Усередині кола, радіус якого дорівнює 13 см, дано точку M, яка віддалена від центра кола на 5 см. Через точку M проведено хорду $AB = 25$ см. Знайдіть довжину більшого з відрізків, на які хорда AB ділиться точкою M.

69. У кут вписано коло з центром O. Воно дотикається до сторін кута в точках A і B. Знайдіть радіус кола, якщо точка O віддалена від вершини кута на відстань b і $BC = a$.

70. У кут 60° вписано два кола, що дотикаються одне до одного і до сторін кута. Знайдіть відношення радіусів кіл.

71. Знайдіть внутрішні кути чотирикутника, якщо його зовнішні кути відносяться як 8 : 2 : 5 : 3.

72. Знайдіть площу чотирикутника, вершинами якого є точки перетину бісектрис паралелограма, якщо сторони цього паралелограма дорівнюють 3 м і 1 м, а один з його кутів 150°.

73. У колі, радіус якого дорівнює 1 см, проведено хорду довжиною 1 см. Знайдіть площі частин круга, на які він поділений хордою.

74. У круговий сектор з центральним кутом α вписано коло. Знайдіть радіус кола, якщо радіус сектора дорівнює R.

75. До кола радіуса R проведено дотичні, кут між якими дорівнює φ. Знайдіть площу фігури, яку утворюють відрізки дотичних і менша дуга кола, обмежена точками дотику.

76. Відстань між центрами двох кіл, що мають внутрішній дотик, дорівнює d. Дотична, проведена до меншого кола з центра більшого, утворює з лінією центрів кут α. Знайдіть радіус більшого кола.

77. Два кола, радіуси яких дорівнюють R і r ($R > r$), дотикаються зовнішньо в точці A. До них проведено спільну зовнішню дотичну, що дотикається до обох кіл у точках B і C. Знайдіть: **а)** довжину відрізка BC; **б)** довжину відрізка спільної внутрішньої дотичної до даних кіл, що обмежений BC і точкою A; **в)** радіус кола, що дотикається до обох заданих кіл і до прямої BC; **г)** відстань від точки A до прямої BC; **д)** міру кута BAC.

78. Знайдіть кут, який утворюють діагоналі паралелограма $ABCD$, якщо $A(5; 1)$, $B(1; 2)$, $C(3; 5)$.

79. Знайдіть довжину відрізка, один із кінців якого має ординату 8, а другий – абсцису 6, якщо точка $M(-1; 4)$ належить відрізку і ділить його у відношенні 1 : 5.

80. Точки $A(1; 5)$ і $B(3; 1)$ – симетричні відносно прямої n. Знайдіть рівняння прямої n.

81. Знайдіть рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки (0; 5) і прямої $x = -1{,}5$.

82. Знайдіть відстань між прямими $5x - 6y + 11 = 0$ і $5x - 6y - 1 = 0$.

83. Складіть рівняння дотичних, проведених до кола $x^2 + (y + 1)^2 = 6$ через точку: **а)** $A(0; 10)$; **б)** $B(5; 6)$.

84. Складіть рівняння: **а)** прямої, симетричної прямій $2x - 3y = 4$ відносно точки $M(3; -6)$; **б)** прямої, що отримана поворотом прямої $2x - 3y = 4$ навколо точки $(2; 1)$ на кут $90°$; **в)** кола, симетричного колу $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 7$ відносно точки $M(3; -6)$.

85. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) висоти перетинаються в точці H. Розкладіть вектор $\overrightarrow{AH}$ за векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо $\angle BAC = \alpha$.

86. $ABCDE$ – правильний п'ятикутник. Розкладіть вектор $\overrightarrow{AC}$ за векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AE}$.

87. Знайдіть гострий кут ромба, сторона якого є середнім геометричним його діагоналей.

88. Складіть рівняння прямої, одержаної поворотом прямої $2x - 3y + 5 = 0$ на $45°$ проти годинникової стрілки навколо початку координат.

89. Складіть рівняння кола, у яке перетворюється коло $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 6$ поворотом проти годинникової стрілки на $45°$ навколо початку координат.

90. Паралельне перенесення перетворює криву $x^2 + y^2 = 2(2 + 2y - x)$ у криву $x^2 + y^2 = 2(2 + 2x + y)$. Складіть рівняння образу прямої $4x - 5y + 1 = 0$, яка утвориться внаслідок такого паралельного перенесення.

91. У трикутнику ABC: $AB = BC = 6$, $AC = 4$. Знайдіть $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$.

92. При гомотетії з коефіцієнтом $k < 0$ і центром P коло $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$ перетворюється на коло $x^2 + y^2 + 10x + 24 = 0$. Знайдіть координати точки P.

93. Побудуйте паралелограм за стороною, висотою та діагоналлю.

94. Побудуйте трикутник за висотою, відношенням відрізків, на які ця висота поділяє сторону трикутника, і кутом при вершині, з якої висоту було проведено.

95. Побудуйте трикутник за стороною, сумою двох інших сторін і висотою, опущеною на одну з цих двох сторін.

96. Побудуйте відрізок заданої довжини, паралельний даній прямій з кінцями на двох даних колах.

97. Побудуйте квадрат із центром у даній точці, щоб середини двох його сусідніх сторін належали даній прямій, а двох інших – даному колу.

98. Побудуйте трикутник за двома даними сторонами та різницею протилежних їм кутів.

99. Побудуйте ромб із центром симетрії у даній точці і вершинами на трьох даних прямих.

100. Побудуйте прямокутник за даним відношенням сторін, якщо задано по одній точці на кожній його стороні.

Для допитливих

У людському суспільстві, де геометрія займає виняткове положення, як це спостерігаємо тепер, мистецтво і думка не можуть бути відокремлені від цього геометричного й математичного феномена.

Я гадаю, що ніколи досі ми не жили в такий геометричний період… Усе навколо – геометрія. Ніколи ми не бачили настільки ясно таких форм, як круг, прямокутник, кут, циліндр, куля, втілених так виразно, дбайливо й упевнено. Модернізм тим і цінний особливо, що показав світ у зовсім новому вигляді – інші віки не могли так «вбиратися».

Ле Корбюзьє

Архітектурний проект
Ле Корбюзьє.
Капела Нотр-Дам-дю-О
в м. Роншане (Франція)

СЛОВНИЧОК

Аксіоми стереометрії – твердження стереометрії, що приймаються без доведення (с. 182).

Аналітична геометрія – розділ геометрії, що вивчає властивості геометричних фігур за допомогою системи координат (с. 9).

Аполлонія – *коло* – див. коло.

Аполлонія задача – задача про побудову кола, дотичного до трьох даних елементів із множини: «кола, прямі, точки» (дотик кола і точки означає, що коло проходить через цю точку) (с. 235, 240, 241, 243).

Багатогранник – внутрішня частина простору, обмежена багатокутниками (*гранями*) (с. 188).

Багатокутник – внутрішня частина площини, обмежена замкненою ламаною, яка не перетинає сама себе (8 кл.);
– *однойменні* – багатокутники з однаковим числом вершин (с. 86, 88);
– *подібні* – багатокутники, які переходять один в одний перетворенням подібності (с. 121);
– *правильний* – багатокутник, у якого всі сторони рівні і всі кути рівні (с. 85).

Вектор – напрямлений відрізок (с. 146);
– *добуток вектора на число* (с. 150, 159);
– *вектор-нормаль до прямої* – вектор, перпендикулярний до прямої (с. 166);
– *колінеарні* – вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих; поділяються на протилежно напрямлені та співнапрямлені (с. 147);
– *модуль вектора* $\overrightarrow{AB}$ – довжина відрізка AB (с. 147, 156);
– *нульовий* – вектор, початок і кінець якого збігаються, його довжина і координати дорівнюють нулю (с. 147);
– *протилежні вектори* – вектори, довжини яких рівні, а напрями протилежні (с. 147);
– *рівні вектори* – співнапрямлені вектори, довжини яких рівні (с. 148, 156);
– *різниця двох векторів* – сума першого вектора і протилежного другому (с. 152, 160);
– *розкласти вектор за двома неколінеарними векторами* – представлення векторів у вигляді суми двох векторів (с. 154);
– *сума двох векторів* – вектор, утворений з цих векторів за правилом трикутника або паралелограма (с. 151, 152).

Відстань від точки до площини – довжина перпендикуляра, проведеного з цієї точки до заданої площини (с. 185).

Відстань від точки до прямої на координатній площині – формула для обчислення довжини відповідного відрізка через координати заданої точки і коефіцієнти прямої, рівняння якої записано в загальній формі (с. 168, 169).

Вісь абсцис – вісь Ox у декартовій системі координат (с. 10).

Вісь ординат – вісь Oy у декартовій системі координат (с. 10).

Гамільтона формула (теорема Ейлера) – вираз $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, де O і H – центр описаного кола і ортоцентр трикутника ABC (с. 163).

Гармонічна четвірка точок – чотири точки прямої A, B, C, D, для яких відношення $\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$ дорівнює 2 або $\frac{1}{2}$, або -1 (с. 221, 233).

Гексаедр – шестигранник (с. 190);
– *правильний гексаедр* – куб.

Геометричне місце точок – сукупність (множина) усіх точок, які задовольняють певну умову (с. 129, 210).

Геометричне перетворення – однозначна відповідність, яка встановлюється між двома фігурами як сукупностями точок (с. 111);
– *обернене даному* – геометричне перетворення, при якому прообраз і образ міняються місцями (с. 111).

Гомотетія з центром у точці O і коефіцієнтом k – таке геометричне перетворення, що переводить довільну точку A фігури-прообразу в точку A_1 фігури-образу так, що точки A і A_1

лежать на одній прямій, причому $A_1O = |k|\, AO$ (с. 113).

Герона формула – формула для обчислення площі трикутника за довжинами трьох його сторін (с. 60, 63).

Гіпербола – геометричне місце точок, різниця відстаней від яких до двох заданих точок (фокусів) є величиною сталою (с. 213).

Група симетрії фігури – геометричні перетворення, які переводять дану фігуру саму в себе (с. 124).

Декартова прямокутна система координат – 1) осі координат, які перетинаються під прямим кутом у початку відліку і на яких задано одиничні відрізки; 2) взаємно однозначна відповідність між точками площини і впорядкованими парами чисел – її координатами (с. 9, 10).

Додекаедр – дванадцятигранник (с. 190).

Достатня умова – ознака певної множини фігур (7 кл.).

Ейлера теорема – теорема про співвідношення між сумою числа вершин і граней багатокутника та числом його ребер (с. 191).

Еліпс – геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох заданих точок (фокусів) є величиною сталою (с. 211).

Жергона теорема – теорема про перетин трьох чевіан трикутника в одній точці (с. 70).

Зовнівписане коло – коло, що дотикається однієї зі сторін трикутника і продовження двох інших його сторін (с. 62, 63, 64).

Золотий переріз – ділення цілого на дві нерівні частини, при якому ціле відноситься до більшої частини так, як більша частина до меншої (с. 224).

Ікосаедр – двадцятигранник (с. 190).

Інверсія – перетворення відносно кола (*коло інверсії*) з центром O (*центр інверсії*) і радіусом r (r^2 – *степінь інверсії*) (с. 235).

Інверсор – прилад для побудови зображення образу фігур, отриманих інверсією (с. 243, 244, 245).

Індукція – див. метод математичної індукції.

Інцентр трикутника – точка перетину його бісектрис (7 кл.).

Коло – ГМТ площини, рівновіддалених від однієї її точки (*центра кола*) (7 кл.);

– *рівняння кола* – рівняння, яке задовольняють координати всіх точок заданого кола і не задовольняють координати всіх точок, що не належать йому (с. 12, 97);

– *Аполлонія Пергського коло* – геометричне місце точок, відношення відстаней від яких до двох даних точок є величиною сталою (будь-яке коло є колом Аполлонія) (с. 78, 211, 221).

Координати вектора – коефіцієнти розкладу вектора за координатними векторами (с. 155).

Координатна площина (декартова площина, площина *xy* або (*xOy*)) – площина, на якій введено декартову систему координат (с. 10).

Координатні вектори (орти) у декартовій системі координат – вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ – одиничні вектори, що лежать на координатних осях і співнапрямлені з ними (с. 155).

Конус прямий круговий – просторова фігура, утворена обертанням прямокутного трикутника навколо одного з його катетів (*осі конуса*) (с. 202).

Косинусів теорема – теорема, що доводить формулу для обчислення довжини однієї зі сторін трикутника через довжини двох інших його сторін і косинус кута між ними (с. 51, 52).

Косинусів теорема для чотирикутника – теорема, що доводить формулу для обчислення квадрата сторони чотирикутника через квадрати довжин його інших сторін і косинуси кутів (с. 175).

Круг – внутрішня частина площини, обмежена колом разом із точками цього кола (с. 103).

Куб – правильний шестигранник (с. 189).

Куля – тіло обертання, яке утворюється обертанням круга навколо його діаметра (с. 203).

Кут між двома векторами – *зі спільним початком* – кут між півпрямими, на яких лежать дані вектори (с. 165);
– *що не мають спільного початку*, –

кут між рівними їм векторами, що мають спільний початок (с. 165).

Кут між двома колами – кут між дотичними до цих кіл, які проведені через їх спільну точку (с. 239).

Лейбніца теорема – теорема про суму квадратів відстаней від будь-якої точки площини трикутника до вершини цього трикутника і до його центроїда (с. 177).

Метод векторний – метод розв'язування задач за допомогою введення векторів (с. 160, 170, 171).

Метод геометричних перетворень – метод розв'язування задач за допомогою геометричних перетворень (с. 127, 227).

Метод інверсії – метод розв'язування задач за допомогою перетворення інверсії (с. 243).

Метод координат – метод розв'язування геометричних задач введенням системи координат (с. 75, 209, 215).

Метод математичної індукції – метод доведення правильності нескінченної послідовності тверджень (с. 246).

Метод зображення просторових фігур – метод паралельних проекцій (с. 186, 234).

Метод площ – використання поняття площі як допоміжного елемента для доведення теорем і розв'язування задач (с. 67).

Метод проколу – метод представлення вектора $\overrightarrow{AB}$ за допомогою деякої точки X: $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XB}$ або $\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}$ (с. 161).

Метод центральних проекцій – зображення фігури (або тіла) на площині множиною точок, кожна з яких є перетином з цією площиною прямої, що проходить через певну точку – центр проекції і точку фігури (с. 208, 232, 233).

Метричні властивості – властивості, які встановлюються вимірюванням (с. 232).

Мимобіжні прямі – прямі, що не мають спільних точок і через які не можна провести площину (с. 184).

Мора–Маскероні побудова – геометрична побудова, що виконується лише циркулем (с. 235, 238).

Необхідна умова – властивість певної множини фігур (7 кл.).

Октаедр – восьмигранник (с. 190).

Ортоцентр трикутника – точка перетину його висот (с. 64, 129, 163, 164).

Ортоцентричний трикутник – трикутник, вершини якого є основами висот даного трикутника (с. 117).

Основні елементи трикутника – множина його сторін і внутрішніх кутів (с. 55).

Основні фігури стереометрії – фігури, поняття про які приймаються без означення (с. 182).

Паппа задача – на побудову триктуника за стороною, протилежним кутом і бісектрисою цього кута (с. 59).

Паппа рівність – збіг подвійних відношень відстаней між шістьма точками прямої (с. 221).

Парабола – геометричне місце точок, рівновіддалених від деякої точки (*фокуса*) і від деякої прямої (*директриси*) (с. 213).

Паралелепіпед – призма, утворена шістьма паралелограмами, які попарно рівні і паралельні між собою (с. 193);
– *прямокутний* – паралелепіпед, утворений шістьма прямокутниками (с. 194).

Паралельне перенесення – перетворення, при якому дві довільні точки A і B фігури-прообразу переходять у точки A_1 і B_1 фігури-образу так, що чотирикутник ABB_1A_1 є паралелограмом або відрізком (с. 111, 132).

Паскаля теорема – теорема про точки перетину прямих, що містять три хорди кола (с. 50, 53).

Перетворення поворот з центром у точці O на кут α – геометричне перетворення, що переводить довільну точку A фігури-прообразу в точку A_1 фігури-образу так, що A і A_1 розташовані на одній відстані від точки O і $\angle AOA_1 = \alpha$ (с. 112, 141).

Перетворення подібності – перетворення однієї фігури в іншу, при якому відношення відстані між двома довільними точками однієї фігури до відстані між двома відповідними точками другої фігури – стале число, це число називають *коефіцієнтом подібності перетворення* (с. 114).

Перетворення симетрії відносно прямої (*осі симетрії*) – переводить довільну точку A фігури-прообразу в точку A_1 фігури-образу так, що точки A і A_1 лежать на одній прямій, перпендикулярній до осі симетрії, і на однаковій відстані від неї (с. 112, 135).

Перетворення симетрії відносно точки O (*центра симетрії*) – переводить довільну точку A фігури-прообразу в точку A_1 фігури-образу так, що точки A, O, A_1 лежать на одній прямій і $A_1O = AO$ (с. 112, 136).

Перпендикуляр до площини, проведений з даної точки, – відрізок перпендикулярної до цієї площини прямої, обмежений заданими точкою і площиною (с. 184).

Піка формула – формула для обчислення площі багатокутника з вершинами у вузлах цілочислової решітки (с. 90).

Піраміда – просторова фігура, утворена трикутниками (*бічними гранями*), які сходяться в певній точці (*вершині*) і мають по одній спільній стороні з деяким багатокутником (*основою*) (с. 198).

Площини паралельні – площини, що не мають спільних точок (с. 185).

Площини перпендикулярні – називають площини, якщо площина, перпендикулярна до лінії перетину даних площин, перетинає їх по перпендикулярних прямих (с. 185).

Подібні трикутники – трикутники, кути яких рівні, а проти рівних кутів лежать пропорційні сторони (с. 114).

Подібні фігури – фігури, які переводяться одна в одну перетворенням подібності (с. 114).

Поділ відрізка в крайньому і середньому відношенні – поділ відрізка за принципом золотого перерізу (с. 92, 224).

Полярна система координат – система координат на площині, що задана *полюсом* (точкою), *полярною віссю* (півпрямою) і *полярним кутом* (кутом між полярною віссю і *полярним радіусом*, який відкладається проти годинникової стрілки) (с. 140).

Полярні координати точки – полярний радіус і полярний кут точки в полярній системі координат (с. 140).

Похила до площини – відрізок, що сполучає певну точку простору (що не належить заданій площині) з точкою площини і який не є перпендикуляром до цієї площини (с. 185).

Призма – багатогранник, дві грані якого (*основи*) рівні і паралельні плоскі багатокутники, а інші грані (*бічні*) – паралелограми (с. 193).

Просторові форми – тривимірні геометричні фігури (с. 181).

Пряма, перпендикулярна до площини, – пряма, що перпендикулярна до будь-якої прямої цієї площини (с. 184).

Птолемея нерівність – нерівність, що пов'язує попарні добутки сторін і діагоналей опуклого чотирикутника (с. 89).

Птолемея теорема – рівність добутку діагоналей вписаного чотирикутника сумі добутків його протилежних сторін (с. 54).

Радіан – одиниця виміру кута (довжина одиничного півкола, поділена на число π) (с. 99).

Радіанна міра кута – вимірювання центрального кута кола через відношення довжини дуги, на яку спирається цей кут, до його діаметра (с. 99).

Рівні фігури – фігури, які можна сумістити накладанням (7, 8 кл.); фігури, що перетворюються одна в одну рухом (с. 115).

Рівновеликі фігури – фігури, що мають рівні площі (8 кл.).

Рівноскладені фігури – фігури, які можна поділити на одне й те саме число попарно рівних фігур (8 кл.).

Розв'язування трикутника – обчислення сторін і кутів трикутника за трьома його основними елементами (с. 55).

Рух – геометричне перетворення, яке зберігає відстань між парами точок фігури (зберігає форму та розміри фігури) (с. 111).

Сегмент – внутрішня частина площини, обмежена колом і його січною (с. 104).

Сектор – частина центрального кута кола, яку обмежує відповідна йому дуга (с. 103).

Середня лінія чотирикутника – відрізок, що сполучає середини протилежних сторін чотирикутника (с. 164, 170).

Синусів теорема – теорема про відношення довжини сторони трикутника до синуса протилежного цій стороні кута (с. 46, 52);
– *розширена* – порівняння цього відношення з діаметром описаного кола трикутника (с. 48).

Скалярний добуток двох векторів – сума добутків відповідних координат цих векторів (с. 165).

Скалярний квадрат – скалярний добуток вектора самого на себе (с. 165).

Софізм – навмисно хибний умовивід (с. 30, 55, 56).

Спіраль Архімеда – лінія, задана рівнянням $\rho = a\varphi$ у полярній системі координат (с. 140).

Степінь точки відносно кола – величина $\sigma = d^2 - r^2$, де r – радіус кола, а d – відстань від точки до центра кола (с. 235).

Стереометрія – розділ геометрії, що вивчає фігури у просторі (с. 181).

Тетраедр – чотиригранник (с. 189, 199).

Тіло обертання – просторова фігура, утворена обертанням плоскої фігури навколо певної осі (с. 201).

Три знамениті геометричні задачі давнини – *квадратура круга*, *подвоєння куба*, *трисекція кута* (с. 243).

Трикутник визначений – якщо за даними елементами можна побудувати конкретний трикутник (с. 55).

Умова розміщення трьох точок на одній прямій (необхідна і достатня) – властивість і ознака відповідного ГМТ (с. 26, 28, 153).

Фігура-образ – сукупність точок, що відповідає фігурі-прообразу при геометричному перетворенні (с. 111).

Фігура-прообраз – вихідна сукупність точок при геометричному перетворенні (с. 111).

Центроїд трикутника (центр ваги трикутника) – точка перетину його медіан (7 кл.).

Центр правильного багатокутника – точка, яка збігається з центром вписаного та описаного кіл цього багатокутника (с. 87).

Циліндр прямий круговий – тіло обертання, утворене обертанням прямокутника навколо однієї з його сторін (*осі циліндра*) (с. 201).

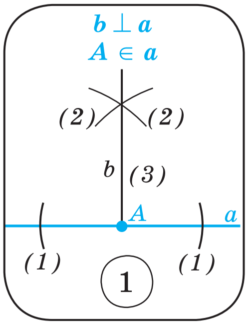
Чеви теорема – теорема про перетин трьох чевіан трикутника в одній точці (с. 69);
– *тригонометрична форма теореми Чеви* – запис твердження теореми через тригонометричні функції кутів між чевіанами і сторонами трикутника (с. 69).

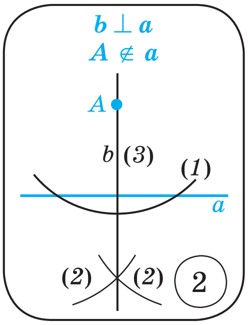
Чевіана – відрізок, який сполучає вершину трикутника з точкою на протилежній стороні цього трикутника (с. 68).

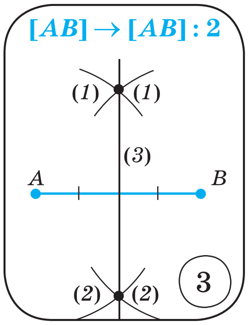
Число π – відношення довжини кола до його діаметра – чисельно дорівнює довжині одиничного півкола (с. 98).

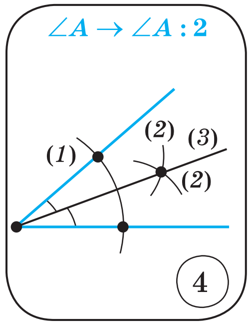
Якоба Штейнера побудова – геометрична побудова виконується лише лінійкою, за умови, що на площині задано коло з визначеним центром (с. 147, 234).

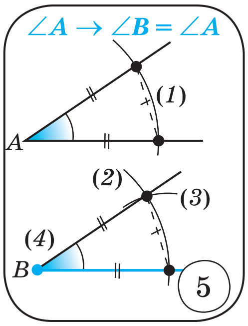
Опорні задачі на побудову (7 клас)

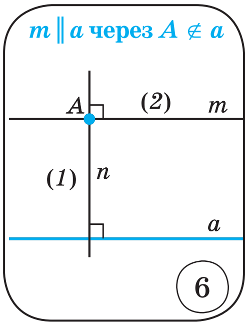


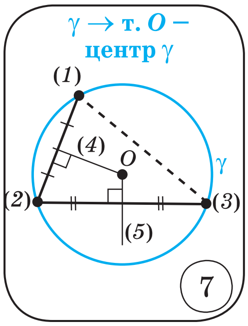


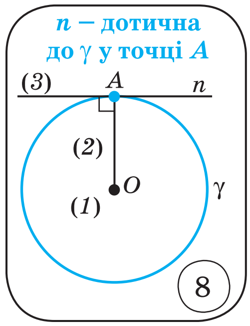




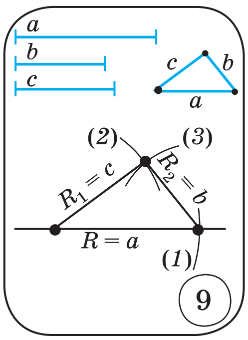


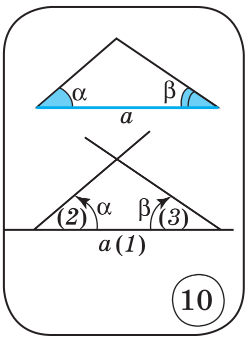


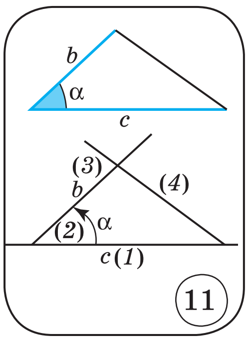


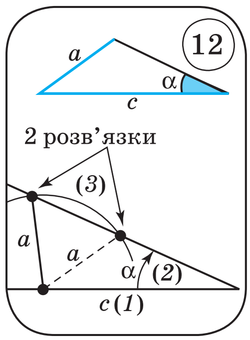


Базові трикутники

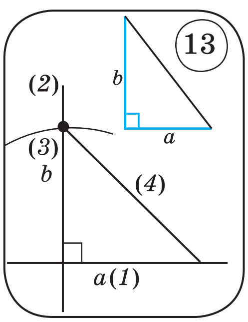


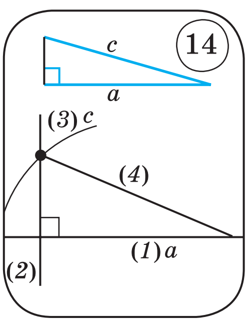


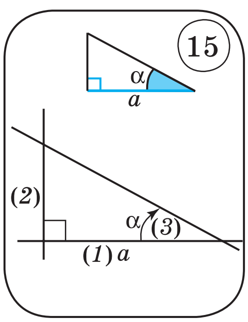


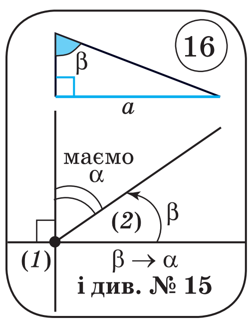


Базові прямокутні трикутники





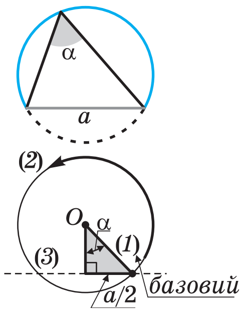




Опорні задачі на побудову (8–9 клас)

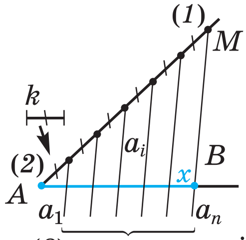
*ГМТ, з яких даний відрізок **a** видно під заданим кутом α – сегмент, що вміщує заданий кут*

$\boldsymbol{a, \alpha \rightarrow \gamma}$



Ділення заданого відрізка AB на задану кількість рівних частин

$\boldsymbol{[AB], n \rightarrow x\ [AB] : n}$

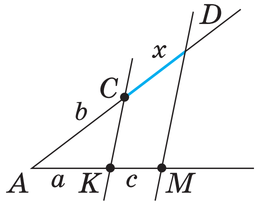


(3) – паралельні

$\angle A$ і k – довільні

Побудова четвертого пропорційного відрізка

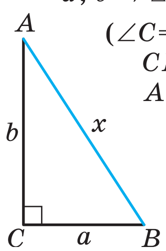
$a, b, c \rightarrow x = \dfrac{c \cdot b}{a}$



$\angle A$ – довільний

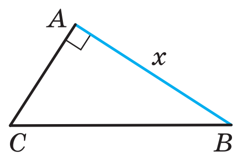
$\boxed{a, b \rightarrow x = \sqrt{a^2 + b^2}}$

$a, b \rightarrow \triangle ABC$
$(\angle C = 90^\circ$, $CB = a$, $AC = b)$



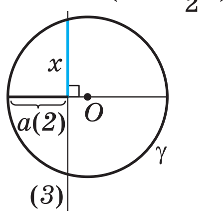
$\boxed{a, b \rightarrow x = \sqrt{a^2 - b^2}}$

$a, b \rightarrow \angle ABC$
$(\angle A = 90^\circ$, $CB = a$, $AC = b)$



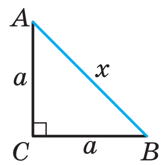
$\boxed{a, b \rightarrow x = \sqrt{a\,b}}$

1) $a, b \rightarrow \gamma$
$\left(R = \dfrac{a+b}{2}\right)$

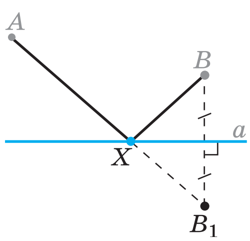


$\boxed{a \rightarrow x = a\sqrt{2}}$

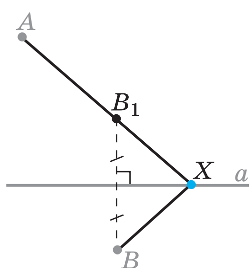
$a \rightarrow \triangle ABC$
$(\angle C = 90^\circ$, $AC = CB = a)$



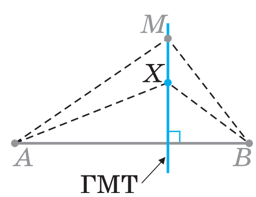
A, B, a → X
AX + XB –
найменша для X∈a



A, B, a → X
|AX – XB| –
найбільша для X∈a



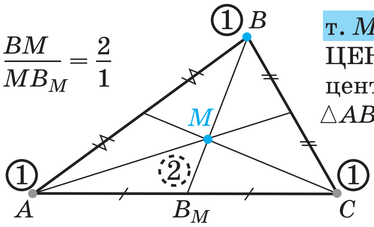
[AB], M → X,
для яких
$AX^2 - XB^2 = AM^2 - MB^2$



Чудові точки трикутника

ТОЧКА ПЕРЕТИНУ МЕДІАН

$\dfrac{BM}{MB_M}=\dfrac{2}{1}$



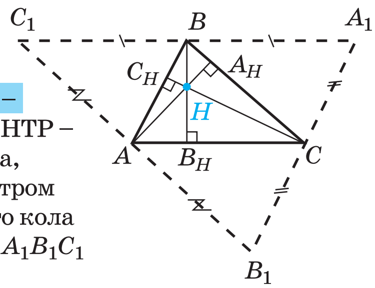
т. M – ЦЕНТРОЇД – центр ваги $\triangle ABC$

1 – *одиничні маси*

B_M – *центр ваги* $[AC]$

M – *центр ваги* $[BB_M]$

ТОЧКА ПЕРЕТИНУ ВИСОТ

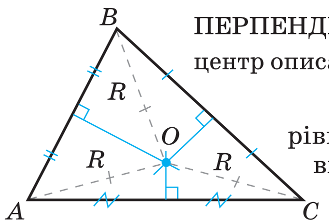


т. H – ОРТОЦЕНТР – єдина, бо є центром описаного кола навколо $\triangle A_1B_1C_1$

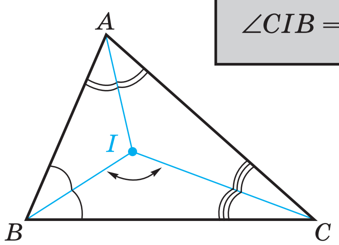
$$\left.\begin{matrix} A_1C_1 \parallel AC \\ B_1C_1 \parallel BC \\ A_1B_1 \parallel AB \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} ABA_1C - \text{паралелограм} \\ AC_1BC - \text{паралелограм} \end{matrix}\right| \Rightarrow BA_1 = AC = C_1B$$

BB_H – *серединний перпендикуляр до* $[C_1A_1]$

ТОЧКА ПЕРЕТИНУ СЕРЕДИННИХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРІВ – центр описаного кола



т. O – рівновіддалена від вершин $\triangle ABC$



$$\boxed{\angle CIB = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}}$$

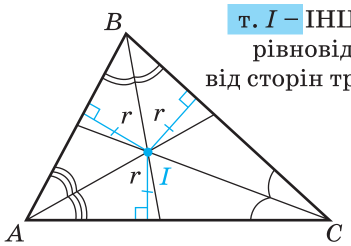
$\triangle CIB$:

$$\angle CIB = 180^\circ - \frac{\angle C}{2} - \frac{\angle B}{2} = 180^\circ - \frac{\angle C + \angle B}{2} =$$

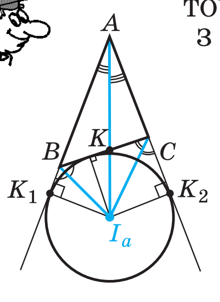
$$= 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}.$$ Щ. в. д.

ТОЧКА ПЕРЕТИНУ БІСЕКТРИС – центр вписаного кола

т. I – ІНЦЕНТР – рівновіддалена від сторін трикутника



ТОЧКА ПЕРЕТИНУ БІСЕКТРИСИ КУТА ТРИКУТНИКА З БІСЕКТРИСАМИ ЗОВНІШНІХ КУТІВ ТРИКУТНИКА



т. I_a – центр зовнівписаного кола

$$\left.\begin{matrix} I_aC \equiv l_{KCK_2} \\ I_aB \equiv l_{KBK_1} \end{matrix}\right| \Rightarrow d(I_a;(AK_2)) = d(I_a;(AK_1))$$

$$\Downarrow$$

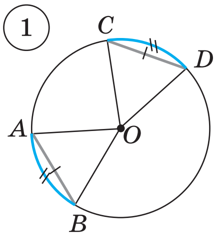
$$I_aA \equiv l_A$$

т. I_a – *рівновіддалена від* $[BC]$, (AB) і (AC)

Apostolova_geom_pidr_9_klas_ukr.indd 279 7/1/2009 13:08:27

Опорні факти про коло

1

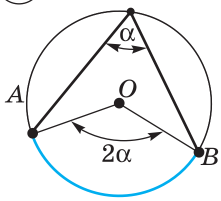


$AB = CD$

$\Updownarrow$

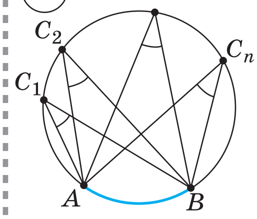
$\cup AB = \cup CD$

2



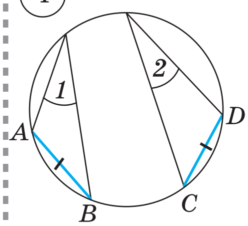
$\alpha = \frac{1}{2} \cup AB$

3



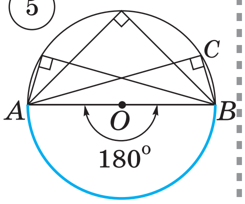
$\angle AC_1B = \dots = \angle AC_nB$

4



$AB = CD \Leftrightarrow \angle 1 = \angle 2$

5

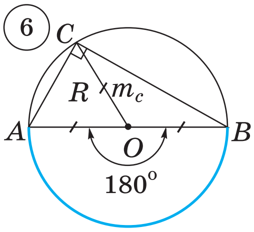


$AB = 2R$

$\Updownarrow$

$\angle ACB = 90^\circ$

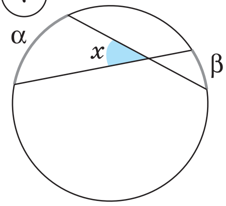
6



$\angle C = 90^\circ$

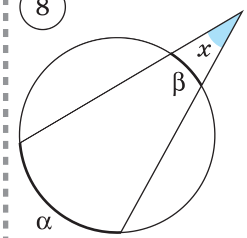
$R = m_c = \frac{c}{2}$

7



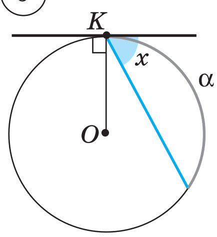
$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$

8



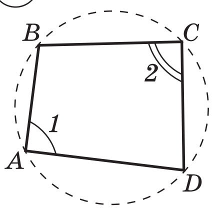
$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$

9



$x = \frac{\alpha}{2}$

10

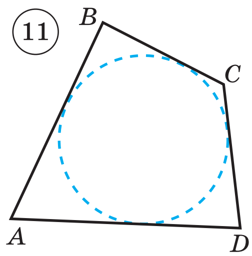


$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

$\Updownarrow$

$ABCD$ – *вписаний*

11

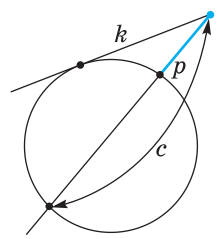


$AD + BC = AB + CD$

$\Updownarrow$

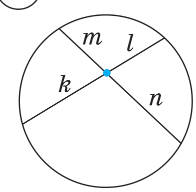
$ABCD$ – *описаний*

12



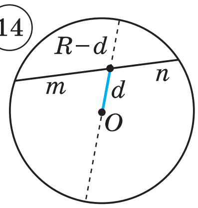
$k^2 = p \cdot c$

13



$m \cdot n = k \cdot l$

14

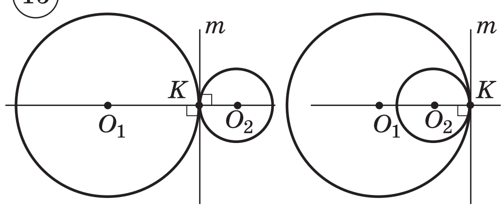


$m \cdot n = (R + d)(R - d)$

$m \cdot n = R^2 - d^2$

$\boxed{d^2 = R^2 - m \cdot n}$

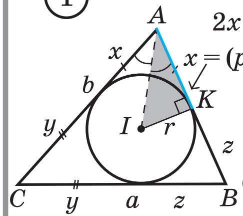
15



$\left.\begin{array}{l} O_1K \perp m \\ O_2K \perp m \end{array}\right| \Rightarrow K \in (O_1O_2)$

Опорні задачі кола

①



$2x+2y+2z=2p$

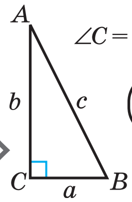
$x=(p-a)$

$x=p-(y+z)$

$r=(p-a)\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$

$p\triangleq\dfrac{P}{2}$

$\Rightarrow$

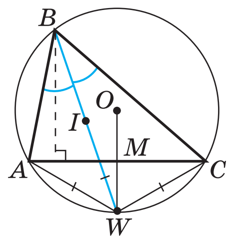


$\angle C=90^\circ\to\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}=1$

$\dfrac{a+b-c}{2}=r$

$2r=a+b-c=a+b-2R$

$r+R=\dfrac{a+b}{2}$



$AW=WI=WC$

$WM\perp AC$

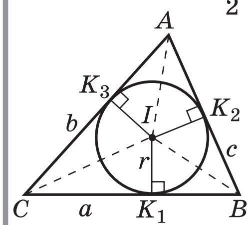
$\Downarrow$

$O\in WM$

②

$S=S_1+S_2+S_3=$

$=\dfrac{1}{2}ra+\dfrac{1}{2}rb+\dfrac{1}{2}rc$



$r=\dfrac{S}{p}$

$p\triangleq\dfrac{P}{2}$

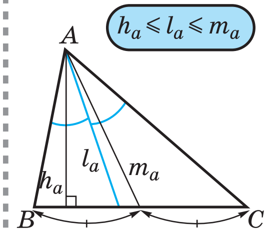
$\Rightarrow$

$r=\dfrac{S}{p}\qquad\dfrac{1}{r}=\dfrac{a+b+c}{2S}=$

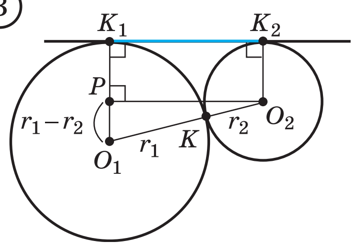
$=\dfrac{a}{ah_a}+\dfrac{b}{bh_b}+\dfrac{c}{ch_c}$

$\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}$

$h_a\leqslant l_a\leqslant m_a$



③

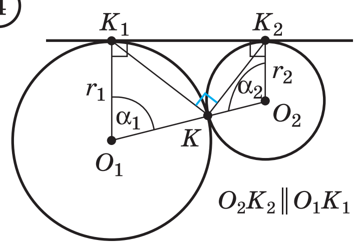


$O_2P\perp O_1K_1\Rightarrow K_1K_2=O_2P;$

$O_2P=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}$

$K_1K_2=2\cdot\sqrt{r_1\cdot r_2}$

④



$O_1K_1\perp K_1K_2$

$O_2K_2\perp K_1K_2$

$\Downarrow$

$O_2K_2\parallel O_1K_1\Rightarrow\alpha_1+\alpha_2=180^\circ$

$\left.\begin{array}{l}\angle KK_1K_2=\dfrac{\alpha_1}{2}\\ \angle KK_2K_1=\dfrac{\alpha_2}{2}\end{array}\right|\Rightarrow\angle K_1KK_2=180^\circ-\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$

(див. № 9 с. 280)

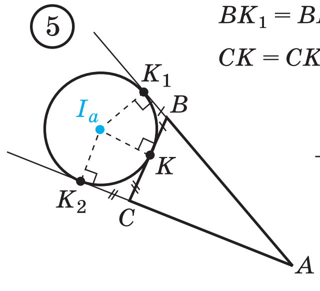
$\angle K_1KK_2=90^\circ$

Зовнівписане коло (до $\triangle ABC$)

⑤

$\left.\begin{array}{l}BK_1=BK\\ CK=CK_2\end{array}\right|\Rightarrow BC=$

$=K_1B+K_2C$



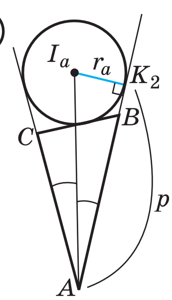
$AK_1=AB+BK_1$

$+\ \|$

$AK_2=AC+CK_2$

$AK_1=AK_2=p$

⑥



$r_a=p\cdot\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$

$r=\dfrac{S}{p}=(p-a)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$

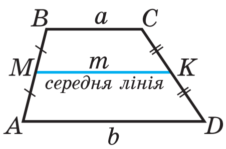
(див. № 1)

$\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}=\dfrac{S}{p\cdot(p-a)}$

$r_a=\dfrac{S}{p-a}$

Опорні факти про трапецію

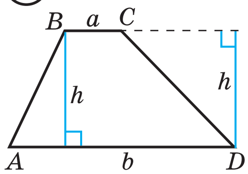
1



$m \parallel a \parallel b$

$m = \dfrac{a+b}{2}$

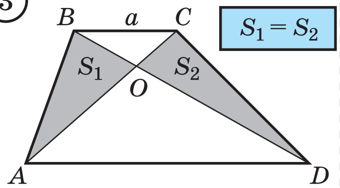
2



ABCD – трапеція

$S = h \cdot \dfrac{a+b}{2}$

3

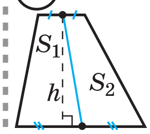


$S_1 = S_2$

$S_1 = S_{ABC} - S_{BOC} = S_{BCD} - S_{BOC}$

рівні

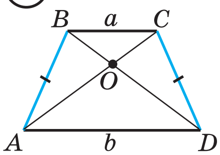
4



$S_1 = S_2$

(бо *h* – спільна)

5



$AB = CD$

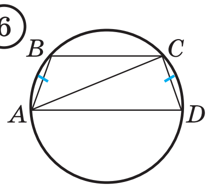
$\Downarrow \Uparrow$

$\angle A = \angle D$

$\angle B = \angle C$

$AC = BD$, $BO = OC$, $AO = OD$	$\angle A + \angle C = 180^\circ$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$

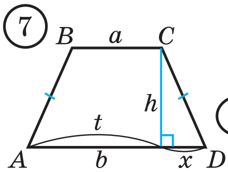
6



$AB = CD$

$R_{ABCD} = R_{ACD}$

7

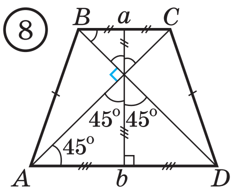


$AB = CD$

$\Downarrow$

$t = \dfrac{a+b}{2} = m$ сер. л.	$x = \dfrac{b-a}{2}$	$S = th$

8



$AB = CD$, $AC \perp BD$

$\Downarrow$

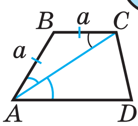
$h = \dfrac{a+b}{2} = m$ сер. л.

$S = h^2 = m^2$

9

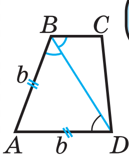
$AC \equiv l_A$

$AB = a$



$BD \equiv l_B$

$AB = b$

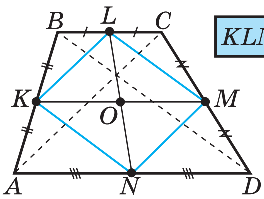


10

Якщо *K*, *L*, *M*, *N* – середини сторін

$\Downarrow$

KLMN – паралелограм

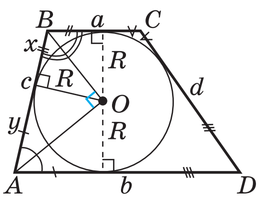


(бо $LM \parallel BD \parallel KN$, $KL \parallel AC \parallel NM$)

$KO = OM$; $OL = ON$

якщо $AB = CD \Rightarrow AC = BD$ і *KLMN* – ромб

11



$\angle AOB = 180^\circ - \dfrac{\angle A}{2} - \dfrac{\angle B}{2} =$

$= 180^\circ - \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

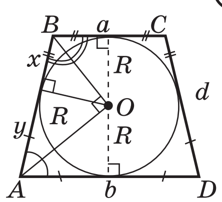
$\triangle AOB$: $R^2 = x \cdot y$

$\angle AOB = 90^\circ$

$R = \sqrt{xy}$

$a + b = d + c$ $\quad$ $h = 2R$

12



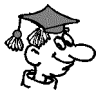
$AB = CD$

$\Downarrow$

$x = \dfrac{a}{2}$

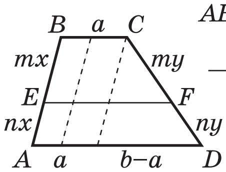
$y = \dfrac{b}{2}$

$R = \dfrac{\sqrt{ab}}{2}$ $\quad$ $h = \sqrt{ab}$



Опорні факти про трапецію

1



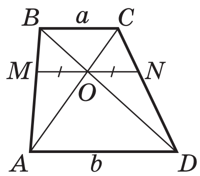
$ABCD$ – трапеція

$EF \parallel AD$

$\Downarrow$

$$\boxed{EF = \frac{an + bm}{m + n}} \Rightarrow \boxed{MN = \frac{2ab}{a + b}} \Leftarrow \boxed{\frac{BM}{MA} = \frac{CN}{ND} = \frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OA} = \frac{a}{b}}$$

2



$ABCD$ – трапеція

$MN \parallel AD$

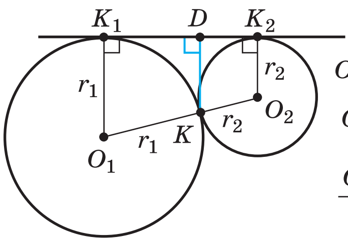
$\Downarrow$

$$\boxed{MO = ON}$$

3

$\Downarrow$

$$\boxed{d(K;\, K_1K_2) = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}}$$



$KD \parallel O_1K_1 \parallel O_2K_2$ і

$O_1K_1K_2O_2$ – трапеція;

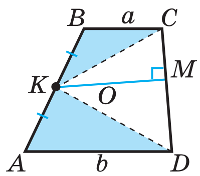
$O_1K_1 = r_1,\ O_2K_2 = r_2;$

$O_1K = r_1 \quad KO_2 = r_2$

$\Downarrow$

$$d(K;\ K_1K_2) = KD = \frac{r_1 \cdot r_2 + r_2 \cdot r_1}{r_1 + r_2} = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$$

4



$ABCD$ – трапеція

$AK = KB$

$KM \perp CD$

$\Downarrow$

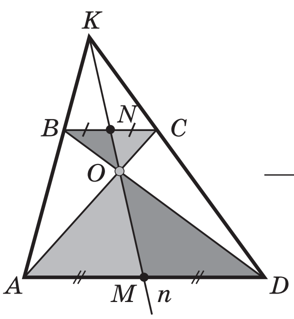
$$\boxed{S = KM \cdot CD}$$

$$\underbrace{S_{KBC} + S_{AKD}}_{\displaystyle \frac{1}{2}S} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2}b \cdot \frac{h}{2}$$

$$\frac{1}{2}S \Rightarrow S_{KCD} = \frac{1}{2}S \text{ і } S = 2S_{KCD}$$

5

$ABCD$ – трапеція



$BN = NC$

$AM = MD$

$\Downarrow$

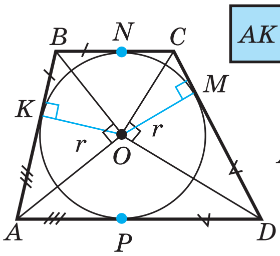
$$\boxed{\{K;\, N;\, O;\, M\} \in n}$$

6

$ABCD$ – описана трапеція

$\Downarrow$

$$\boxed{AK \cdot KB = CM \cdot MD}$$



$\Downarrow$

$AP \cdot BN = NC \cdot PD$

$$\boxed{\frac{BN}{NC} = \frac{PD}{AP}}$$

1) $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$; $OK \perp AB,\ OM \perp CD$

2) $\triangle AOB$ і $\triangle COD$: $KB \cdot AK = r^2 = CM \cdot MD$

ВІДПОВІДІ І ПОРАДИ

РОЗДІЛ І

Завдання 1

5. **в)** На осі Ox. **7.** $B(4; 2)$, $D(-2; -1)$. **10.** Точка A. **11.** $(0; 0)$, $(6; 0)$, $(6; 6)$ і $(0; 6)$. **15.** Так.

Завдання 2

1. **б)** 10; **г)** 3. **2.** **б)** $\sqrt{74}$; **г)** 5. **6.** Ні. **8.** $(4,75; 0)$. **9.** **б)** $(0; 0)$. **10.** **б)** $\left(0; 2\frac{10}{13}\right)$. **14.** **б)** $(x+3)^2+(y-4)^2=64$; **г)** $(x-3)^2+y^2=16$. **15.** **б)** $(-3; 7)$ і 4. **17.** A, D, E, F. **20.** $(x+3)^2+(y-5)^2=20$. **22.** **б)** $(3; 0)$ і 2. **26.** $(x-1)^2+(y+1)^2=1$. **27.** $(2; 2)$, $(-2; 2)$, $(-2; -2)$ або $(2; -2)$. **28.** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ або $(x-5)^2+(y-5)^2=25$. **31.** $\sqrt{106}$. **33.** $C(7; -10)$, $D(-2; -1)$. **35.** **а)** $(0; 7)$, $(0; -7)$; **б)** $(0; 14)$. **37.** $C(2; 0)$, $D(3; 2)$. **41.** $\left(-3; \frac{2}{3}\right)$. **42.** **а)** $\left(\frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$; **б)** $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$. **45.** Таких точок не існує.

Завдання 3

1. **б)** $(1,75; 0)$ і $(0; 7)$. **7.** $y=10$. **9.** $a=2$. **11.** $x=0$; $x=-2$; $y=0$ і $y=2$. **12.** $x=0$; $x=5$; $y=0$ і $y=-3$. **15.** **б)** $y=\frac{x}{3}+2$; **г)** $y=-\frac{11}{2}x-\frac{31}{2}$. **17.** **б)** $x=-5$; **г)** $y=-12$. **18.** **б)** $y=x$; **г)** $3x-2y+13=0$. **20.** **б)** $k=-1,6$; **г)** $k=0,8$. **21.** **б)** $135°$; **в)** $60°$. **22.** $a=\frac{1}{3}$; $b=\frac{1}{3}$. **23.** **б)** $3x-4y-1=0$. **24.** **в)** $y=\sqrt{3}x+2-8\sqrt{3}$; **г)** $x+y-10=0$. **26.** **б)** $16x-13y+46=0$; $2x+13y+12=0$; $x+3=0$. **28.** $y=12$. **30.** $K(0; 0)$.

Завдання 4

1. **б)** Прямі паралельні; **в)** прямі збігаються; **є)** прямі перетинаються в точці $(1; 1)$. **2.** **а)** Так; **б)** ні; **в)** так; **г)** так; **д)** ні. **3.** **а)** $m=4$; **б)** $m=3$ або $m=-4$. **4.** **а)** $m=\frac{2}{3}$; **б)** $m=-\frac{3}{7}$. **5.** **а)** $y=7x+3$; **б)** $3x-y-2=0$; **в)** $3x+2y=0$; **6.** **а)** $y=-0,125x-0,625$; **б)** $x+4y-22=0$; **в)** $7x-y+25=0$. **7.** **а)** $x-y-7=0$; **б)** $x+4y+11=0$. **9.** $6x-y-19=0$; $5x-2y=0$; $4x+5y-29=0$. **10.** 3. **11.** 4. **12.** $10x+8y+1=0$. **13.** $(5; 5)$. **17.** Так. **19.** $y=-7x-25$. **20.** $6\sqrt{3}$ і $2\sqrt{35}$. **21.** $x^2+y^2=2,25$. **22.** **а)** $(x-1)^2+(y-1)^2=1$; $(x-2)^2+(y-1,5)^2=6,25$; **б)** $(x-2)^2+(y-3)^2=1$; $(x-3)^2+(y-3,5)^2=6,25$. **23.** $C(-3; 3)$.

Завдання 5

3. **а)** $\sin x$; **б)** $-\cos x$. **4.** **б)** $\sin\beta$; **в)** $\operatorname{ctg}\beta$. **5.** **б)** $2\sin\alpha$; **г)** $2\operatorname{tg}\beta$. **6.** **а)** $\cos\beta$; **б)** $2\sin\alpha-2\cos\alpha$; **в)** $5\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}\beta$. **7.** **а)** $\cos^2\alpha$; **б)** 0. **8.** **а)** -1; **б)** $1+\sin\beta$; **в)** 1; **г)** $2/\cos^2\beta$; **д)** 1. **10.** **а)** $-0,5$; **б)** 1,5; **г)** $1,5\sqrt{3}$; **д)** 0. **11.** **а)** 9; **б)** 5,75; **в)** $-2,25$; **д)** 1. **12.** **в)** $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{2}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$; **г)** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **13.** **б)** $\sin\beta=\frac{3}{\sqrt{13}}$; $\cos\beta=-\frac{2}{\sqrt{13}}$; $\operatorname{ctg}\beta=-\frac{2}{3}$; **в)** $\sin\beta=\frac{3}{\sqrt{10}}$; $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$; $\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{3}$.

14. **б)** $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{\sqrt{21}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}$. **18.** **а)** $\alpha > \beta$; **б)** $\alpha < \beta$; **в)** $\alpha > \beta$; **г)** $\alpha > \beta$. **19.** **а)** $\sin 150° < \sin 130°$; **б)** $\cos 100° > \cos 140°$; **г)** $\operatorname{ctg} 50° > \operatorname{tg} 100°$; **д)** $\sin 120° > \sin 50°$. **21.** 1. **22.** 2. **23.** **а)** $\cos^3\alpha$; **б)** $\cos^2\alpha$; **в)** 1; **г)** $\cos^2\alpha$; **д)** 1. **24.** **а)** −1; **б)** 1. **25.** **а)** 1; **б)** 1.

Завдання 6

1. **б)** 4 см²; **г)** 6 см². **3.** **б)** 30° або 150°. **4.** 8 см. **5.** $2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha+\beta)$. **6.** **а)** $\sqrt{6}$ см; **б)** $2\sqrt{2}$ см; **в)** 2 см. **7.** 30° або 150°. **8.** **а)** 90°; **б)** 45° або 135°. **9.** **а)** $18\left(\sqrt{6}-2\right)$ см і $18\left(3-\sqrt{6}\right)$ см; **б)** $18\left(2-\sqrt{2}\right)$ см і $18\left(\sqrt{2}-1\right)$ см. **10.** **б)** t і $2t$; **в)** $\frac{t\sin\alpha}{|\sin\alpha-\sin\beta|}$ і $\frac{t\sin\beta}{|\sin\alpha-\sin\beta|}$. **11.** $\frac{b(\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta))}{\sin(\alpha+\beta)}$. **12.** $\frac{P\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}$; $\frac{P\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}$; $\frac{P\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)}$. **13.** **а)** 2 см; **в)** 1 см. **14.** **а)** 4 дм; **б)** $\sqrt{8}$ дм. **15.** **а)** 12 см; **б)** $6\sqrt{2}$ см; **в)** 6 см. **16.** **а)** 4 дм; **б)** $\sqrt{8}$ дм; **в)** 4 дм. **18.** $\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}$. **19.** $\frac{a\sin(\beta-\alpha)+2b\sin\alpha}{2\sin\alpha}$.

20. $\frac{\sin\beta+\sin(60°+\beta)}{\sin 60°}$. **21.** $\frac{5\sqrt{13}}{6}$ дм. **22.** $c = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma\right)}$. **23.** $\frac{b\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos\frac{|\alpha-\beta|}{2}}$.

25. $\frac{l\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{|\alpha-\beta|}{2}}$; $\frac{l\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{|\alpha-\beta|}{2}}$. **26.** $\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **29.** **а)** 12 см; **б)** $\frac{6}{\sin\alpha}$. **30.** 5 см. **31.** 45°. **32.** Порада. Побудуйте допоміжний трикутник за висотою (яка дорівнює заданому радіусу вписаного кола), стороною (яка дорівнює діаметру описаного кола, помноженому на синус заданого протилежного кута) і кутом, під яким цю сторону видно з інцентра трикутника. **33.** Шуканим ГМТ є серединний перпендикуляр до відрізка AB з виколотою точкою, що належить відрізку.

Завдання 7

1. **а)** $AB = 35$ дм; **б)** $AB = 6{,}5$ м; **в)** $AB = 2$ см або $AB = 4$ см. **3.** ≈ 43,3 см. **5.** 28 см. **6.** **а)** Тупокутний; **б)** гострокутний; **в)** прямокутний. **8.** **а)** $\frac{5}{13}$ і $\frac{3}{5}$; **б)** $\text{пр}_{AC}AB = 9$ см; $\text{пр}_{AC}CB = 5$ см. **10.** **а)** 7 см і 7 см. **11.** Порада. Знайдіть діагоналі трапеції. **12.** 50 см. **13.** $24\sqrt{10}$ см². **14.** 7 см і 11 см. **15.** 7 см. **16.** 13 см. **17.** **а)** 4 см; **б)** $2\sqrt{17}$ см. **18.** 14 см. **19.** 14 см або $2\sqrt{39}$ см. **20.** 7 см. **21.** 6 см. **22.** 96 см. **23.** 96 см, $192\sqrt{5}$ см². **26.** $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ см. **28.** 6 см. **29.** Порада. Переконайтеся, що трикутник, утворений стороною c і відрізками медіан, проведених до сторін a і b, прямокутний. **33.** Порада. Перетворіть вираз $\sqrt[4]{a^4+b^4} = \sqrt[4]{a^4+2a^2b^2+b^4-2a^2b^2} = \sqrt[4]{(a^2+b^2)^2-(\sqrt{2}ab)^2} = \sqrt[4]{(a^2+b^2-\sqrt{2}ab)(a^2+b^2+\sqrt{2}ab)} =$ $= \sqrt{\sqrt{a^2+b^2-\sqrt{2}ab}\sqrt{a^2+b^2+\sqrt{2}ab}} = \sqrt{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 45°}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos 45°}}$, що зведе задачу до побудови середнього геометричного двох відрізків, які є діагоналями паралелограма зі сторонами a і b та гострим кутом 45°. **35.** Нехай $ABCD$ вписаний чотирикутник. Позначимо: $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $DA = d$; $AC = d_1$; $BD = d_2$. За теоремою косинусів знаходимо $\cos D = \frac{c^2 + d^2 - d_1^2}{2cd}$; $\cos A = \frac{a^2 + d^2 - d_2^2}{2ad}$. Враховуючи, що $\cos B = -\cos D$, маємо: $d_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \frac{c^2 + d^2 - d_1^2}{2cd}$; звідси $d_1^2 = \frac{a^2cd + b^2cd + c^2ab + d^2ab}{cd + ab} = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}$. Враховуючи, що $\cos A = -\cos C$, маємо: $d_2^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \frac{a^2 + d^2 - d_2^2}{2ad}$; звідси $d_2^2 = \frac{b^2ad + c^2ad + a^2bc + d^2bc}{ad + bc} = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}$. Тоді:

$d_1 d_2 = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)^2(cd + ab)}{(ad + bc)(cd + ab)}} = ac + bd$, що і треба було довести.

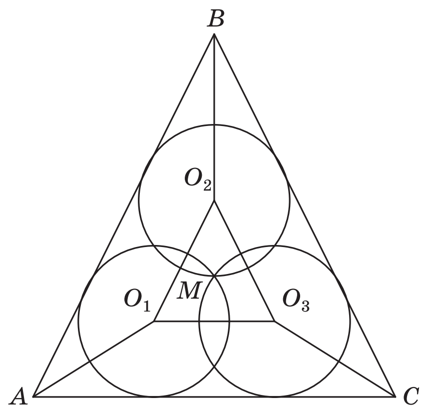
Завдання 8

1. **а)** $b \approx 47{,}5$ см; $c \approx 61{,}1$ см; $\angle C = 107°$; **б)** $a \approx 92$; $c \approx 50$; $\angle A = 102°$; **в)** $\angle B \approx 19°$; $\angle C \approx 76°$; $c \approx 29{,}22$; **г)** $\angle A \approx 135°$; $\angle B \approx 28°$; $a \approx 12{,}1$ або $\angle A \approx 11°$; $\angle B \approx 152°$; $a \approx 3{,}3$; **д)** $c \approx 14{,}4$; $\angle A \approx 54°$; $\angle B \approx 75°$; **е)** $c \approx 23$; $\angle A \approx 35°$; $\angle B \approx 113°$; **є)** $\angle A = 54°$; $b \approx 128$ см; $c \approx 91{,}8$ см; **ж)** $a \approx 26{,}9$; $b \approx 13{,}9$; $\angle B = 15°$; $\angle C = 135°$; **з)** $a \approx 10{,}5$; $b \approx 14{,}8$; $\angle C = 59°$; **и)** $\angle A \approx 58°$; $\angle B \approx 75{,}5°$; $\angle C \approx 46{,}5°$. **2.** $\approx 99{,}7$ м. **3.** ≈ 2 км. **4.** ≈ 100 м. **5.** **а)** В об'їзд; **б)** навпростець. **6.** У тому разі, коли кут між магістраллю і шосе не перевищує 22°. **8.** У відповідях наведені наближені значення: **а)** 50,48 см; 56,92 см; 44,92 см; 58°; 73°; 49°; **б)** 44,04 см; 41,34 см; 22,96 см; 81°; 68°; 31°; **в)** 22,57 см; 33,24 см; 38,18 см; 36°; 60°; 84°; **г)** 6,36 см; 6,36 см; 2,12 см; 70,53°; 70,53°; 38,94°; **д)** 41,7 см; 34,5 см; 43,1 см; 64°; 48°; 68°; **е)** 9 см; 19 см; 20 см; 26,5°; 70,6°; 82,9°; **ж)** 24 см; 25 см; 15,5 см; 68°; 75,1°; 36,9°; **и)** 22,57 см; 18,06 см; 15,05 см; 85,5°; 52,9°; 41,6°; **і)** 24 см; 28,8 см; 25,32 см; 52,2°; 71,4°; 56,4°; **ї)** 21 см; 19 см; 16 см; 73°; 60°; 47°. **9.** 19 хв. **10.** 1349 м. **11.** 1 см. **12.** $\frac{b}{2\cos\frac{\beta}{2}}$. **13.** 8,125 см. **15.** 2,56 см. **16.** 4,5 см. **17.** $\frac{cr}{b}$. **18.** $\frac{5a}{8}$. **19.** 37,73 см. **20.** $\frac{Rr}{R + r}$.

Перший спосіб

Нехай $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ (мал. 1), O_1, O_2, O_3 – центри кіл, M – точка їх перетину, x – шуканий радіус. Оскільки x – радіус кола, описаного навколо трикутника $O_1O_2O_3$, то $O_2O_3 = 2x\sin\alpha$, $a = 2R\sin\alpha$, $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$; $O_2O_3 = \frac{ax}{R}$.

З іншого боку, $x\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} + x\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2} + O_2O_3 = a$; $r\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} + r\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2} = a$, тому $\frac{ax}{r} + \frac{ax}{R} = a \Rightarrow x = \frac{rR}{r + R}$.



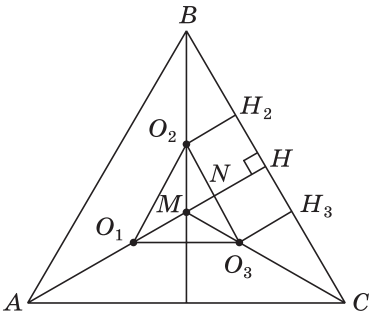
Мал. 1

Другий спосіб

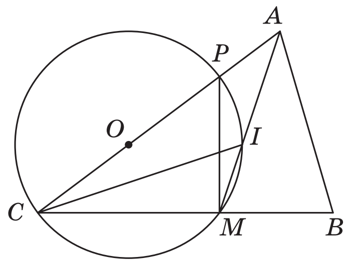
На малюнку 2 позначено: O_1, O_2, O_3 – центри рівних кіл, M – точка їх перетину, x – шуканий радіус. ($O_2H_2 = O_3H_3 = x$). Крім того, $MO_1 = MO_2 = MO_3 = x$.

$\triangle O_1O_2O_3 \sim \triangle ABC$ ($O_1O_2 \parallel AB$; $O_1O_3 \parallel AC$; $O_2O_3 \parallel BC$), M – точка перетину бісектрис кутів обох трикутників, тому MN – радіус вписаного у $\triangle O_1O_2O_3$ кола; $\frac{MN}{MH} = \frac{MO_3}{MC} \Leftrightarrow \frac{r - x}{r} = \frac{x}{R} \Leftrightarrow xr = rR - xR \Leftrightarrow x = \frac{rR}{R + r}$. **21.** 12,5. Нехай I – інцентр, AM –

бісектриса в $\triangle ABC$, O – центр кола, який лежить на AC (мал. 3). Тоді $\angle CMP = 90°$. Позначимо $\angle PMI = x$, тоді $\angle CPM = 2x$; $\angle AMC = 90° + x$; $\angle CAM = 90° - 3x \Rightarrow \angle CAB = 180° - 6x$. Звідси: $\angle ABC = 4x$. За теоремою синусів: $\frac{AB}{\sin 2x} = \frac{AC}{\sin 4x}$. Користуючись формулою $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, маємо: $\frac{20}{\sin 2x} = \frac{24}{2\sin 2x\cos 2x} \Rightarrow \cos 2x = 0{,}6 \Rightarrow \sin 2x = 0{,}8$. Звідси: $R = \frac{AB}{2\sin C} = \frac{20}{1{,}6} = 12{,}5$.

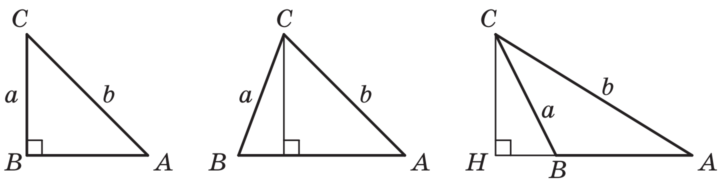


Мал. 2



Мал. 3

22. **а)** Для сторони $AB = c$ трикутника ABC має місце рівність $c = a\cos B + b\cos A$ (1), доведення якої очевидне з малюнка 4. Застосовуючи теорему синусів, маємо $2R\sin C = 2R\sin A\cos B + 2R\sin B\cos A$, звідси отримаємо потрібну рівність.



Мал. 4

б) Аналогічно до (1) можна записати ще: $a = b\cos C + c\cos B$ (2); $b = c\cos A + a\cos C$ (3). З цих формул маємо: $a + b = b\cos C + c\cos B + c\cos A + a\cos C$. Звідси: $(a + b)(1 - \cos C) = c(\cos B + \cos A) \Leftrightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{\cos B + \cos A}{1 - \cos C}$. Застосовуючи теорему синусів, маємо $\frac{2R\sin A + 2R\sin B}{2R\sin C} = \frac{\cos B + \cos A}{1 - \cos C}$. **в)** З (1) і (2) маємо: $c = a\cos B + b\cos A = (b\cos C + c\cos B)\cos B + b\cos A = b\cos C\cos B + c\cos B\cos B + b\cos A \Leftrightarrow c(1 - \cos^2 B) = b(\cos B\cos C + \cos A) \Leftrightarrow c\sin^2 B = b(\cos B\cos C + \cos A)$. Користуючись теоремою синусів, маємо: $2R\sin C\sin^2 B = 2R\sin B(\cos B\cos C + \cos A) \Leftrightarrow \sin C\sin B = \cos B\cos C + \cos A \Leftrightarrow \cos A = \sin B\sin C - \cos B\cos C$. **г)** За теоремою косинусів маємо: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Leftrightarrow 4R^2\sin^2 C = 4R^2\sin^2 A + 4R^2\sin^2 B - 2\cdot 2R\sin A\sin B\cos C \Leftrightarrow \sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A\sin B\cos C \Leftrightarrow 1 - \sin^2 A = 1 - \sin^2 C + \sin^2 B - 2\sin A\sin B\cos C \Leftrightarrow \cos^2 A = \cos^2 C + \sin^2 B - 2\sin A\sin B\cos C$. **23.** Порада. Скористайтеся формулою в задачі 22 **а)** або теоремою Птолемея.

Завдання 9

1. **а)** 1,5 см². **2.** **а)** 21 см². **3.** **а)** 24 см². **4.** 486 см². **5.** $\frac{a^2\sin 30°\sin 45°}{2\sin 105°} \approx 0{,}18a^2$. **6.** **а)** 84 см². **7.** **а)** $R = 8{,}125$ см, $r = 4$ см. **8.** 4,8 см². **9.** **а)** 432 см²; **б)** 1452 см².

10. **а)** 300 см^2. **11.** **а)** 96 см^2 і 54 см^2; **б)** 188,16 см^2 і 105,84 см^2; **в)** 245,76 см^2 і 138,24 см^2. **12.** 6 см^2. **13.** 9,6 см; 19,2 см; 28,8 см; 38,4 см і 16 см. **14.** 3 : 1. **15.** 1:7. **16.** 42 см^2, 61,5 см^2 і 22,5 см^2. **17.** mn. **18.** Порада. Використайте формулу Герона і $S = pr$. **19.** 384 см^2. **20.** $\frac{m^2}{4}$. **23.** **а)** $76{,}5\sqrt{3}$ см^2; **б)** $42\sqrt{34}$ см^2; **в)** 936 см^2; **г)** 208 см^2. **24.** $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$. **25.** $\frac{d^2\sin 2\alpha}{2}$. **26.** 88 см^2. Порада. Не забудьте довести, що більша основа не може дорівнювати 10. **27.** 43,2 см^2. **28.** **а)** 1620 см^2. **29.** $36(2 + \sqrt{3})$ см^2; **б)** $\frac{128}{\sqrt{3}}$ см^2. **30.** 624 см^2. **31.** 5 см. **32.** 5 см, 5 см, 2 см і 8 см. **33.** $40\sqrt{5}$ см^2. **35.** 17 640 см^2. **37.** $2\sqrt{2}$ см, $2\sqrt{2}$ см, 4 см і 8 см. **38.** $c = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)}{2}}$.

Завдання 10

1. 45°, 45°. **3.** Порада. Врахуйте, що $S = \frac{ab\sin C}{2} \leqslant \frac{ab}{2}$. **4.** Порада. Врахуйте вказівку до попередньої задачі і матимете: $S \leqslant \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2}$ і $S \leqslant \frac{bc}{2} + \frac{ad}{2}$. **5.** 9 см, 9 см і $6\sqrt{2}$ см. **9.** $15\sqrt{3}$ см. **11.** 15° і 75°. **12.** Порада. $a - b = h_a - h_b$. Помножте обидві частини рівності на ab. **13.** 45°, 45° і 90°. **14.** Трикутник рівносторонній. **15.** 12 см. **16.** 24 см. **17.** $r = \frac{ab\sin\alpha}{a+b}$; $\frac{ab\sin\alpha}{a+b}\sqrt{2-2\cos\alpha}$. **18.** 15 см, 26 см і 37 см.

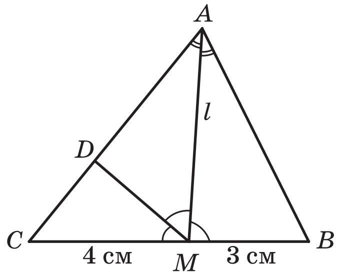
Завдання 11

11. Серединний перпендикуляр відрізка, що сполучає задані точки. **12.** Коло, центром якого є середина відрізка між точками, радіус якого дорівнює $\frac{c^2-2a^2}{2}$, де c^2 – задана сума квадратів відстаней, a – половина відстані між точками. **13.** Коло, центром якого є точка, симетрична точці C відносно AB, а радіус дорівнює стороні AB. **14.** **а)** Пряма – серединний перпендикуляр до відрізка AB; **б)** коло, радіус якого дорівнює $4a$; центр кола розташований на прямій AB і віддалений від точки A на відстань $2a$, від точки B – на відстань $4a$, де a – половина відстані AB; **в)** коло, радіус якого дорівнює $8/3a$; центр кола розташований на відрізку AB і віддалений від точки A на відстань $4/3a$, від точки B – на $2/3a$, де a – половина відстані AB. **15.** Коло, центр якого збігається з центром квадрата, радіус якого дорівнює $a\sqrt{10}$. **17.** Коло, радіус якого дорівнює $\frac{ak}{|k^2-1|}$, де a – половина відстані між точками A і B. Центр кола розміщено на прямій AB на відстані $\frac{2a}{|1-k^2|}$ від точки A і на відстані $\frac{2k^2a}{|1-k^2|}$ від точки B.

Завдання для повторення розділу I

16. **а)** $(-1; -1{,}5)$; **б)** 13; **в)** $(x + 1)^2 + (y + 1{,}5)^2 = \frac{169}{4}$; **г)** так. **17.** **а)** $(-1; 2)$ і $(1; 0)$; **б)** 5 і 1; **в)** $x^2 + (y - 1)^2 = 9$; **г)** ні. **21.** $\left(\frac{1}{1+a^2}; \frac{a}{1+a^2}\right)$ і $\left(-\frac{1}{1+a^2}; -\frac{a}{1+a^2}\right)$. **22.** **а)** $a = \pm 1$; **б)** $a = \pm 0{,}5$; **в)** $a = 0$; **г)** $a \in \{0{,}2; \frac{42}{13}\}$. **23.** **а)** $x = 2$; **б)** $y = 3$; **в)** $3x - 2y = 0$; **г)** $x + y - 5 = 0$. **25.** **а)** $x - y + 2 = 0$; **б)** $x + y - 8 = 0$. **26.** **а)** $y = 5$; **б)** $x = -1$; **в)** $x - y + 6 = 0$; **г)** $2x - y +$

$+ 7 = 0$; **д)** $3x + y - 2 = 0$; **е)** $x + 2y - 9 = 0$. **27.** **а)** $\sqrt{97}$; **б)** $9x - 4y - 25 = 0$; **г)** $M(3; 0{,}5)$; **д)** $11x + 16y - 41 = 0$; **е)** $4x + 9y - 34 = 0$. **28.** $(0; 6)$ і $(0; -2)$. **29.** Ні. **30.** $a = 0$. **31.** 2 см і $2\sqrt{13}$ см. **32.** Ні. **33.** 12 см. Нехай бісектриса AM (мал. 5) перетинає сторону CB під кутом 60°; $MC = 4$ см; $MB = 3$ см. Проведемо бісектрису MD кута CMA. $\triangle AMD = \triangle ABM$. Позначимо $AM = l$. За властивістю бісектриси: $AB : MB = AC : CM \Leftrightarrow AB = 3t$, $AC = 4t$, тоді $CD = t$, $AD = 3t$. За властивістю бісектриси: $AM : CM = AD : CD \Leftrightarrow \dfrac{l}{4} = \dfrac{3t}{t} \Leftrightarrow l = 12$.



Мал. 5

34. 14 см. **35.** $h = \dfrac{a}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$. **36.** $\dfrac{P\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)}$; $\dfrac{P\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)}$; $\dfrac{P\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)}$. **40.** 2 : 3.

41. **а)** 3 см^2; **б)** 156 см^2; **в)** 468 см^2; **г)** $\dfrac{h^2\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta}$; **д)** $\dfrac{l^2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)^2}{4\sin\alpha\sin\beta}$; **е)** $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ см^2.
42. **а)** 120 см^2; **б)** 150 см^2; **в)** 24 см^2; **г)** 294 см^2; **д)** 150 см^2; **е)** 864 см^2. **43.** **а)** 75 см^2; **б)** 168 см^2; **в)** 360 дм^2. **44.** **а)** 600 см^2; **б)** 140 см^2; **в)** 120 см^2; **г)** 600 мм^2. **45.** **а)** 37,2 см^2; **б)** 54 мм^2. **46.** **а)** 1024 дм^2; **б)** 768 см^2; **в)** 486 см^2; **г)** 960 см^2; **д)** 432 см^2. **47.** **а)** 665 см^2; **б)** 6 см^2. **48.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ см^2. **49.** 18 см^2. **50.** 13 дм, 14 дм і 15 дм. **51.** 40, 30 і 14.

Готуємося до тематичного оцінювання № 1

В – I

1. $(-5; 3)$. **2.** $(x + 3)^2\,(y - 4)^2 = 25$. **3.** A, C – не належать, B – належить. **4.** $O(2; -3)$; $r = 2$. **5.** $12\dfrac{8}{13}$ см.

В – II

1. 5. **2.** $B(0; 3)$. **3.** B, C, D. **4.** $y = 4x + 13$. **5.** $\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$ см.

Готуємося до тематичного оцінювання № 2

В – I

1. Враховуючи, що $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, будуємо кут, тангенс якого дорівнює 0,4. Суміжний йому кут і буде шуканим. **2.** 60°. **3.** $(16\sqrt{2} \pm 4\sqrt{17})$ см. **4.** 9 см.

В – II

1. $\sin\alpha = 0{,}6$; $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}75$. **2.** Ні, бо, виходячи з теореми синусів, $\dfrac{AB}{\sin(\angle BAC)} = \dfrac{AC}{\sin(\angle ABC)} \Rightarrow \sin(\angle ABC) = \dfrac{0{,}8\cdot 0{,}4}{0{,}3} = \dfrac{3{,}2}{3} > 1$, чого не може бути. **3.** Тупокутний. **4.** 26 см.

РОЗДІЛ II

Завдання 12

1. **а)** 135° і 45°. **2.** **а)** 12. **3.** **а)** 12. **4.** **а)** 10. **5.** **а)** Ні; **б)** ні. **9.** **а)** $12\sqrt{3}$; **б)** $4\sqrt{3}$. **15.** **а)** $R\sqrt{2}$, $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $2R$; **б)** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $a(1 + \sqrt{2})$, $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. **17.** **а)** $\dfrac{\sqrt{3}R}{2}$. **18.** $4\sqrt{4-2\sqrt{2}}$ см.

19. а) $4\sqrt{2+\sqrt{2}}$ см; б) $2\sqrt{12+6\sqrt{2}}$ см; в) $2\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ см. **20.** $a\sqrt{6+3\sqrt{3}}$. **21.** $18\sqrt{6}$ см. **22.** а) 3 : 4 : 2; б) $3\sqrt{3} : 8 : 6\sqrt{3}$; в) $\sqrt{3} : 4 : 6\sqrt{3}$. **23.** $\frac{a}{2}(\sqrt{3}+2)$. **24.** $\frac{a}{2}(\sqrt{2}+2)$. **29.** $\frac{a}{6}$. **31.** а) $\frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$; б) $\frac{R}{1+\sqrt{2}}$; в) $\frac{R}{3}$. **32.** $4\sqrt{3} : 9 : 6\sqrt{3}$. **35.** $\frac{(3+\sqrt{3})a^2}{2}$.

Завдання 13

5. а) $\frac{2\sqrt{3}\pi a}{3}$; б) $\pi\sqrt{a^2+b^2}$; в) $\frac{2\pi b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$; г) $\frac{2\pi a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$; д) 8π см. **6.** $\pi\sqrt{106}$ см. **7.** а) πa; б) $\pi c(\sqrt{2}-1)$; в) $\pi c(\sin\alpha+\cos\alpha-1)$; г) $2\pi h\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. **8.** 4 см. **9.** $48+48\sqrt{5}$ см або $48+24\sqrt{5}$ см. **10.** 2π см. **11.** а) $\sqrt{3}$ см; б) 3 см; в) $3\sqrt{3}$ см. **12.** 7 разів. **13.** 5,85 м. **14.** 3,2 оберта. **16.** а) π см. **17.** а) 120°. **18.** а) $\frac{\pi}{4}$ м. **19.** 30°; 330°. **20.** 150°; 210°. **21.** 40 зубців. **22.** ≈ 700 м. **23.** ≈ 18°. **24.** а) $\frac{\pi a}{3}$. **25.** а) $\frac{6l}{\pi}\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **26.** а) $\frac{\pi}{6}\approx 0{,}52$. **27.** 8 м/с. **28.** $\frac{4\pi a}{3}$. **29.** 5 см. **31.** Порада. Порівняйте радіуси кіл. **32.** Ні. **33.** $C = nC_1$, де C – довжина заданого кола, C_1 – довжина побудованого кола. **35.** Точка A пройде 1 км у 4 рази швидше, ніж точка B. **36.** r.

Завдання 14

1. а) 4π см². **3.** а) Збільшиться в 4 рази. **4.** а) Збільшиться в 4 рази. **5.** а) 20π см². **6.** 64π см². **7.** а) $\frac{\pi(a^2+b^2)}{4}$; б) $\frac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}$; в) $\frac{\pi h^2}{4\sin^4\alpha}$. **8.** а) $\frac{\pi a^2}{12}$; б) $\frac{\pi a^2}{4\cos^2\alpha}(\sin\alpha+\cos\alpha-1)^2$; в) $\frac{\pi a^2\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\left(2\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha\right)^2}$; г) $\frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{4(1+\cos\alpha)^2}$. **9.** а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; в) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **10.** а) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. **11.** $\frac{1}{4}$. **12.** 2. **14.** $\frac{\pi S}{\sqrt{3}}$. **15.** $\frac{8S}{\pi}$. **16.** 5 дм. **17.** ≈ 134 м². **18.** ≈ 11; $\frac{7}{117}$. **19.** 1 мм. **20.** $\frac{24(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$ см. **21.** ≈ 7,15 дм². **22.** а) $\frac{\pi R^2}{9}$; в) $\frac{5\pi R^2}{12}$; д) $\frac{5}{6}\pi R^2$. **23.** а) 1,8π см². **24.** Так. **25.** $\frac{500\pi}{6}$ см² ≈ 260 см². **26.** $\sqrt{\frac{5S}{\pi}}$. **27.** а) $\frac{R^2}{4}$. **28.** $\frac{49(\pi-2)}{8}$. **29.** $\frac{4\pi a^2-3\sqrt{3}a^2}{12}$. **30.** а) $R^2(\pi-2)$; б) $R^2(4\pi-3\sqrt{3})$. **31.** а) 12π см²; б) $18(2\sqrt{3}-\pi)$ см²; в) $12\pi(7-4\sqrt{3})$ см². **34.** $\frac{\pi a^2b^2}{(a+b)^2}$. **35.** $a^2(2\pi+1-\sqrt{3})$. **36.** Перша хорда. **37.** $\frac{r^2}{6}(4\pi-3\sqrt{3})$. **38.** $\frac{\pi m}{3}$. **39.** $\frac{\alpha\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, де кут α подано в радіанах. **40.** $\sqrt{3}-\frac{11}{24}\pi$.

Завдання для повторення розділу II

18. **а)** 12; **б)** 9. **19.** $18\sqrt{6}$ см. **20.** $4\sqrt{6}$ см. **21.** **а)** $\dfrac{ab\sin\alpha}{a+b}$; **б)** $0{,}5h$. **23.** **а)** $48(7-4\sqrt{3})\times(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2})$ см^2; **б)** $16(3-2\sqrt{2})(4-\pi)$ см^2; **в)** $\dfrac{96\sqrt{3}-32\pi}{9}$ см^2. **24.** 30°. **25.** 16π см^2. **26.** 6 см.

Готуємося до тематичного оцінювання № 3

В – I

1. Сторін – 33, діагоналей – 495. **2.** 10. **3.** 50 см^2. **4.** 2 см.

В – II

1. 7 сторін, сума внутрішніх кутів – 900°. **2.** 156° і 24°. **3.** 8 см. **4.** $4\sqrt{3}$ см.

Готуємося до тематичного оцінювання № 4

В – I

1. 10π см. **2.** 8π см. **3.** $\dfrac{5\pi}{12}$ см. **4.** $\dfrac{175}{24}\pi$ см^2.

В – II

1. 8π см. **2.** $\dfrac{150}{\pi}$ см. **3.** 15°. **4.** $\dfrac{175\pi}{3}$ см^2.

РОЗДІЛ III

Завдання 15

1. При паралельному перенесенні пряма переходить у пряму. **2.** Так. **3.** Так. **4.** Ні. **6.** Порада. Виконайте паралельне перенесення однієї бічної сторони паралельно основам трапеції на відрізок, що дорівнює меншій основі.

Завдання 16

4. Вершини квадрата рівновіддалені від точки перетину діагоналей, тому при повороті квадрата $ABCD$ на 90° вершина A переходить у вершину B, вершина B – у вершину C і т. д. Отже, квадрат при такому повороті переходить сам у себе. **5.** Порада. Доведення аналогічне доведенню в попередній задачі.

Завдання 17

2. Дві осі: одна – серединний перпендикуляр до відрізка, кінці якого є задані точки, друга – пряма, що проходить через них. **4.** Якщо прямі перетинаються, то осі симетрії – дві прямі, які проходять через точку перетину даних прямих і збігаються з бісектрисами кутів, утворених при перетині даних прямих; якщо ж прямі паралельні, то осями симетрії є безліч прямих, а саме: будь-яка пряма, перпендикулярна до заданих, і одна пряма, паралельна їм і рівновіддалена від них.

Завдання 18

3. Один, він є серединою відрізка, кінці якого – задані точки. **4.** Якщо дві прямі перетинаються, то центр симетрії один – точка перетину прямих; якщо ж прямі паралельні, то центрів симетрії безліч – будь-яка точка, рівновіддалена від прямих. **5.** **а)** – **в)** Якщо вони перетинаються в одній точці. **6.** Якщо три прямі паралельні і одна пряма рівновіддалена від двох інших.

Завдання 19

5. Фігура не зміниться, бо прямі перейдуть самі в себе. **7.** Такі відрізки гомотетичні. Центрів гомотетії два – це точки перетину прямих AA_1 і BB_1 або прямих AB_1 і A_1B. **9.** **а) – г)** Центрів гомотетії два – це точки перетину прямих, проведених через кінці двох паралельних радіусів цих кіл, з лінією центрів. **10.** **а) – в)** Центр гомотетії один – точка перетину прямої, проведеної через кінці двох паралельних радіусів цих кіл, з лінією центрів, вона є серединою відрізка, кінцями якого є центри кіл. **11.** Один – центр цих кіл.

Завдання 20

5. **а)** Так; **б)** так. **6.** **а)** Так; **б)** так.

Завдання 21

1. Поворотом на 180° або центральною симетрією. **4.** **а)** Не обов'язково; **б)** не обов'язково. **8.** **а)** Поворот на 180° є центральною симетрією; **б)** паралельне перенесення можна отримати в результаті послідовного застосування двох осьових симетрій; **в)** поворот можна отримати в результаті послідовного застосування двох осьових симетрій; **г)** центральна симетрія є гомотетією з коефіцієнтом −1.

Завдання 22

1. $k = \frac{2}{3}$, кути рівні, тому відносяться як 1 : 1. **2.** **а)** $\frac{p}{p_1} = 3$; **б)** $\frac{S}{S_1} = 9$. **3.** $\sqrt{2}$. **4.** **а)** 12 см, 16 см, 20 см, 24 см і 8 см. **6.** **а)** 2 см. **7.** 140 см. **8.** 768 см². **9.** 225 см. **10.** 2400 см². **11.** **а)** 2,5 см; **б)** 5 см. **12.** Так. **13.** Так. **15.** $AB = 7{,}5$ дм; $AD = 8\frac{1}{3}$ дм.

Завдання 23

2. **а)** Дві осі симетрії; **б)** одну вісь симетрії; **в)** дві осі симетрії; якщо прямі перпендикулярні, то – чотири. **5.** **а)** Безліч; **б)** безліч; **в)** одну; **г)** безліч. **7.** **а)** Так; **б)** ні; **в)** так. **9.** Безліч. **10.** Ні. **16.** Паралельне перенесення, гомотетія або центральна симетрія.

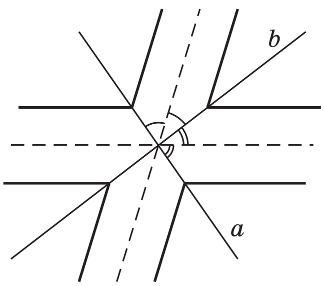
Завдання 24

1. Порада. Побудуйте пряму, паралельну одній зі сторін кута так, щоб відстані від точки M до сторони кута і побудованої прямої відносилися як 1 : 2. Точка перетину побудованої прямої з другою стороною кута буде одним із кінців шуканого відрізка. **2.** Порада. Застосуйте паралельне перенесення з тим, щоб сумістити береги річки. **3.** Порада. **а)** Позначте прямі, на яких повинні лежати кінці відрізків b і c. Застосуйте паралельне перенесення до однієї з прямих (скажімо, c) паралельно прямій l на відрізок заданої довжини a. **4.** Порада. Застосуйте паралельне перенесення однієї з діагоналей паралельно основам так, щоб утворився трикутник, дві сторони якого дорівнюють заданим діагоналям. **5.** Порада. Виконайте поворот однієї з прямих відносно точки O на кут 120°. Точка перетину другої прямої з прямою, одержаною в результаті повороту, буде вершиною трикутника. **6.** Порада. Застосуйте поворот, аналогічно до попередньої задачі. **7.** Порада. Побудуйте два концентричні кола з центром у точці M і радіусами, рівними заданим відстаням. Виконайте поворот одного з кіл на 120° відносно центра трикутника. **8.** Порада. Виконайте повороти трикутників COD і BOC відносно точки O так, щоб трикутники помінялися місцями. **9.** $\varphi_1 - 60°$; $\varphi_2 - 60°$; $\varphi_3 - 60°$. Порада. Виконайте поворот трикутника відносно однієї з вершин на кут 60°. **10.** Порада. Побудуйте коло, симетричне заданому колу відносно прямої, що містить діагональ квадрата. **12.** Порада. Побудуйте точки P і H, симетричні точці A відносно прямих, на яких лежать бісектриси кутів з вершинами B і C. Точки P і H належать прямій BC.

13. Порада. Побудуйте пряму, симетричну прямій a відносно прямої b. Точка перетину побудованої прямої з прямою c є одним з кінців шуканого відрізка. **15.** Порада. Доведіть, що точка перетину діагоналей одного паралелограма є центром симетрії другого. **16.** Порада. Використайте те, що середина відрізка є його центром симетрії. **17.** Порада. Використайте те, що центр квадрата є центром симетрії прямих, на яких лежать протилежні сторони квадрата. **18.** Порада. Див. пораду до задачі 16. **19.** Нехай задані прямі m і n. Побудуйте точку H, симетричну точці C відносно точки перетину прямих. Через точку H проведіть пряму, паралельну прямій m, точку перетину її з прямою n позначте B. Другу вершину A трикутника побудуйте в такий самий спосіб і доведіть, що прямі m і n є медіанами трикутника ABC. **20.** Порада. Спочатку побудуйте ромб з гострим кутом α і довільною стороною, а потім побудуйте подібний до нього ромб із заданою сумою діагоналей. **21.** Порада. Спочатку впишіть довільне коло в кут, а потім застосуйте гомотетію з центром у вершині заданого кута для побудови кола, що проходить через задану точку. **22.** Порада. **а)** Спочатку впишіть довільний квадрат у трикутник так, щоб три його вершини лежали на двох сторонах, а потім для побудови потрібного квадрата застосуйте гомотетію, за центр якої візьміть вершину трикутника, спільну для двох сторін, на яких лежать три вершини вписаного квадрата. Спробуйте виконати побудову в інший спосіб; **б)** спочатку впишіть прямокутник так, щоб його дві вершини лежали на бічних сторонах трикутника, а діагоналі були паралельні цим сторонам, а потім побудуйте потрібний прямокутник, застосовуючи гомотетію, за центр якої візьміть вершину трикутника, що лежить проти основи. Спробуйте виконати побудову в інший спосіб. **23.** **а)** Коло (діаметр якого дорівнює радіусу заданого кола), що проходить через точку A з виколотою точкою A; **б)** коло, діаметром якого є відрізок з кінцями в даній точці A і в центрі заданого кола. **24.** Дві більші дуги кіл, гомотетичних заданому (центром гомотетії є точка A, коефіцієнти гомотетії дорівнюють 1/4 або 3/4). Дуги обмежені дотичними, проведеними з точки A до кола. Точки дотику виколоті. **25.** Порада. Для побудови доцільно використати теорему про січну й дотичну, проведені до кола з однієї точки, і опорну задачу на побудову середнього пропорційного. **26.** Доцільно використати перетворення поворот.

Завдання 25

1. (5; 5), (3; –7), (6; 0). **2.** (0; –3), (–3; –1), (0; –5). **3.** **а)** (–5; 6); **б)** (8; 10); **в)** (–6; 2). **5.** **а)** (–8; 5); **б)** (–20; 10); **в)** (–13; –3). **6.** **а)** $x' = x + 12$; $y' = y - 10$; **б)** $x' = x + 7$; $y' = y + 3$. **7.** **а)** $B'(-6; 14)$; **б)** $F'(5; 25)$. **8.** $A(-8; 4)$, $B(-15; 9)$. **9.** $L(10; -5)$, $M(3; -7)$. **11.** $x' = x - 12$; $y' = y + 9$. **12.** $x' = x + 1$; $y' = y - 1$; $M'(5; -7)$; $N(-5; 7)$. **14.** **а)** $3x - 2y + 6 = 0$; **б)** $3x - 2y = 0$; **в)** $3x - 2y + 17 = 0$. **15.** Якщо a і b не паралельні, то потрібно виконати паралельне перенесення прямої a так, щоб задана точка була рівновіддалена від a і a'. Точка перетину a' і b є одним з кінців шуканого відрізка. У разі, коли прямі a і b паралельні, задача може не мати розв'язку (якщо задана точка не рівновіддалена від a і b) або може мати безліч розв'язків (якщо задана точка рівновіддалена від a і b). **16.** Шукане геометричне місце точок подано на малюнку 6.



Мал. 6

Завдання 26

1. $A(2; 5)$. **2.** **а)** $A(5; -2)$, $A_1(5; 2)$; **б)** $D(12; 4)$, $D_1(-12; 4)$; **в)** $M(2; 0)$, $M_1(2; 0)$. **3.** **а)** $A(-3; 7)$, $A_1(3; 7)$; **б)** $F(4; -2)$, $F_1(-4; -2)$; **в)** $K(-1; 3)$, $K_1(1; 3)$. **4.** **а)** Oy; **б)** Ox. **5.** **а)** D, F; **б)** A, C. **6.** (0; 8), (8; 0), (0; –8), (–8; 0). **8.** **а)** (4; 3); **б)** (–4; –3). **9.** $x - y - 1 = 0$. **10.** $x - 4y + 7 = 0$ і (19/17; –76/17). **11.** **а)** $A_1(34/13; -41/13)$, $B_1(-4; 6)$; **б)** $A_1(-1; -2)$,

$B_1(2,4;\ 4,8)$. **12.** **а)** $(x+1)^2+(y-4)^2=25$; **б)** $(x+3)^2+(y-6)^2=25$. **13.** $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$, $(-1;\ -2)$. **14.** Порада. Через M і точку N_1, симетричну точці N відносно прямої l, проведіть пряму до перетину з прямою l. Точка перетину C і є шуканою точкою. При доведенні слід застосовувати нерівність трикутника. **15.** Найбільшу різницю відстаней має та сама точка C, що і в задачі 14. **16.** Точка перетину прямої l і прямої AB', де B' – точка, симетрична точці B відносно l. **17.** Точки A_1 і A_2, симетричні точці A відносно бісектрис, належать прямій BC. Таким чином, B і C є точками перетину бісектрис з прямою A_1A_2. **18.** Побудуйте трикутник з основою, яка дорівнює половині суми діагоналей, та двома прилеглими до неї кутами: $\frac{\alpha}{2}$ і $\frac{\pi}{4}$. Проведіть у цьому трикутнику висоту до основи. Один з утворених прямокутних трикутників і є чвертю ромба. **19.** Порада. Висоти трикутника, вершинами якого є задані точки, паралельні серединним перпендикулярам шуканого трикутника.

Завдання 27

7. **б)** $(3;\ -3)$; **в)** $(-5;\ -19)$. **9.** **б)** $A_1(3;\ 4)$; $B_1(7;\ 8)$; $C_1(4;\ 11)$; **в)** $A_1(-1;\ -2)$; $B_1(-5;\ -6)$; $C_1(-2;\ -9)$. **10.** $O(-0,5;\ 1)$; $D(0;\ -2)$. **11.** $(x-7)^2+(y-10)^2=7$. **12.** **а)** $2x-3y+6=0$; **б)** $2x-3y=0$. **14.** Порада. Враховуючи, що середина відрізка є його центром симетрії, застосуйте перетворення симетрії відносно точки. **15.** Порада. Враховуючи, що точка перетину діагоналей паралелограма є його центром симетрії, застосуйте перетворення симетрії відносно точки. **17.** $(3;\ -3)$, $(1;\ -1)$; $(-3;\ -3)$, $(-1;\ 1)$. **18.** $\left(\frac{2}{3};\ 6\frac{1}{3}\right)$ і $\left(5\frac{1}{3};\ 1\frac{2}{3}\right)$.

Завдання 28

1. **а)** $G(\frac{3}{2}\sqrt{2};\ \frac{3}{2}\sqrt{2})$; **б)** $E(4;\ 4\sqrt{3})$; **в)** $O(2\sqrt{3};\ 2)$; **г)** $M(-6;\ 6\sqrt{3})$; **д)** $T(-3;\ 0)$. **2.** **а)** $(3;\ 0)$; **б)** $(8;\ \frac{\pi}{2})$; **в)** $(2;\ \frac{3\pi}{4})$; **г)** $(\sqrt{2};\ \frac{7\pi}{6})$; **д)** $(6;\ \frac{\pi}{3})$. **3.** **а)** $A_1(0;\ -3)$, $B_1(0;\ -2)$, $C_1(2;\ -5)$, $D_1(-3;\ 1)$; **б)** $A_2(0;\ 3)$, $B_2(0;\ 2)$, $C_2(-2;\ 5)$, $D_2(3;\ -1)$. **4.** $M(2;\ 5)$. **5.** $M(-3;\ 5)$, $M_1(5;\ 3)$. **6.** **а)** $A_1(-2;\ -3)$, $B_1(-2;\ 3)$, $C_1(2;\ 3)$, $D_1(2;\ -3)$; **б)** $A_2(3;\ -2)$, $B_2(-3;\ -2)$, $C_2(-3;\ 2)$, $D_2(3;\ 2)$. **8.** **а)** $A_1(2;\ \frac{\pi}{2})$, $B_1(4;\ \frac{\pi}{3})$; **б)** $A_2(2;\ \frac{2\pi}{3})$, $B_2(4;\ \frac{\pi}{2})$. **9.** Трикутник з вершинами: $A_1(3;\ \frac{7\pi}{12})$, $B_1(6;\ \frac{5\pi}{6})$, $C_1(2;\ \pi)$. **10.** Коло, радіус якого дорівнює 3, а центр лежить у точці $M_1(8;\ \frac{9\pi}{12})$.

Завдання для повторення розділу III

14. $(3;\ 10)$; $(0;\ 6)$. **16.** **а)** $A_1(-3;\ 1)$; **б)** $A_2(3;\ -1)$; **в)** $A_3(3;\ 1)$; **г)** $A_4(5;\ -9)$; **д)** $A_5(1;\ -3)$. **17.** **а)** $(-2;\ -2)$; **б)** $(2;\ 2)$; **в)** $(5;\ 5)$. **18.** **а)** $y=2x+2$; **б)** $y=2-2x$; **в)** $y=-2-2x$; **г)** $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Готуємося до тематичного оцінювання № 5

В – I

1. $A_1(-2;\ -1)$. **2.** $O(1;\ -1)$. **3.** $S:S=2^2$. **4.** $y=-2x$.

В – II

1. $B_1(-1;\ -3)$. **2.** $O(1;\ -2)$. **3.** $S_1:S=0,5^2$. **4.** $y=-x$.

РОЗДІЛ IV

Завдання 29

5. **а)** $M(-2;\ -4)$; **б)** $M(1;\ -2)$; **в)** $M(-5;\ 4)$. **6.** **а)** $G(6;\ -2)$; **б)** $G(-2;\ -2)$; **в)** $G(-1;\ 1)$. **10.** $\overrightarrow{MN}(7;\ 7)$; $\overrightarrow{NM}(-7;\ -7)$; $\overrightarrow{MP}(5;\ -1)$; $\overrightarrow{PM}(-5;\ 1)$; $\overrightarrow{MK}(-2;\ -8)$; $\overrightarrow{KM}(2;\ 8)$; $\overrightarrow{NP}(-2;\ -8)$; $\overrightarrow{PN}(2;\ 8)$; $\overrightarrow{NK}(-9;\ -15)$; $\overrightarrow{KN}(9;\ 15)$; $\overrightarrow{PK}(-7;\ -7)$; $\overrightarrow{KP}(7;\ 7)$; $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KP}$; $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{PK}$; $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{NP}$; $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{PN}$. Рівні за модулем всі пари протилежних векторів. **12.** **а)** $D(0;\ -6)$; **б)** $C(-2;\ 4)$. **13.** $D(-4;\ 0)$. **14.** $y = \sqrt{11}$ або $y = -\sqrt{11}$. **15.** $x = 4\sqrt{3}$ або $x = -4\sqrt{3}$. **16.** Можливі розв'язки: $(0;\ 5)$; $(0;\ -5)$; $(5;\ 0)$; $(-5;\ 0)$; $(3;\ 4)$; $(4;\ 3)$; $(-3;\ 4)$; $(-4;\ 3)$; $(3;\ -4)$; $(4;\ -3)$; $(-3;\ -4)$; $(-4;\ -3)$. **17.** $\overrightarrow{AM_1}(-6;\ 2)$; $\overrightarrow{BM_2}(1;\ -5{,}5)$; $\overrightarrow{CM_3}(6;\ 3{,}5)$. **18.** $\sqrt{130}/2$. **19.** $C(-1;\ -6)$; $D(4;\ -6)$ або $C(-1;\ 18)$; $D(4;\ 18)$.

Завдання 30

6. **а)** $\vec{x} + \vec{y} = \overrightarrow{(-1;\ 7)}$; $\vec{x} - \vec{y} = \overrightarrow{(9;\ -9)}$; **б)** $\vec{x} + \vec{y} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2$; $\vec{x} - \vec{y} = 7\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$; **в)** $\vec{x} + \vec{y} = \overrightarrow{(7;\ 0)}$; $\vec{x} - \vec{y} = \overrightarrow{(-1;\ 4)}$; **г)** $\vec{x} + \vec{y} = 2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$; $\vec{x} - \vec{y} = \vec{e}_2$. **7.** **а)** $8\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$; **б)** $-5\vec{e}_1 - 15\vec{e}_2$; **в)** $-1{,}5\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2$; **г)** $3\vec{e}_1 + 42\vec{e}_2$. **8.** **а)** $\frac{1}{2}$; **б)** 1; **в)** $\frac{1}{5}$; **г)** $\frac{5}{13}$. **9.** **а)** $(10;\ -2)$, $2\sqrt{26}$; **б)** $(-9;\ -8)$, $\sqrt{145}$; **в)** $(11;\ -12)$, $\sqrt{265}$; **г)** $(23;\ -6)$, $\sqrt{565}$. **10.** **а)** $(50;\ -41)$; **б)** $(-4;\ 8)$. **11.** $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \vec{y}$; $\vec{c} \parallel \vec{d}$. **13.** **а)** 18; **б)** 1,5; **в)** не існує. **14.** **а)** -18; **б)** $-1{,}5$; **в)** $\frac{4}{3}$. **15.** **а)** $\vec{x}(-25;\ 20)$; **б)** $\vec{x}(25;\ -20)$. **16.** **а)** $\frac{6\sqrt{10}}{5}$; **б)** $\frac{6\sqrt{26}}{13}$. **17.** $(0{,}6;\ -0{,}8)$. **18.** **б)**, **в)**, **г)**. **19.** **а)** $\vec{a} = \frac{27}{14}\vec{b} + \frac{11}{14}\vec{c}$; **б)** $\vec{a} = 4\vec{b} + 3\vec{c}$. **20.** $\vec{p} = 3{,}5\vec{a} - 7{,}5\vec{b}$. **21.** $D(-3;\ 2)$. **22.** $D(-2;\ 6)$. **24.** $D(11;\ 18)$ або $D(-19;\ -6)$. **25.** **а)** $\overrightarrow{AB}(-12;\ 5)$, $\overrightarrow{AC}(-3;\ -4)$; **б)** $\overrightarrow{\left(-\frac{12}{13};\ -\frac{5}{13}\right)}$ і $\overrightarrow{\left(-\frac{3}{5};\ -\frac{4}{5}\right)}$ або протилежні їм вектори; **в)** $\left(-\frac{5}{2};\ -\frac{65}{18}\right)$. **26.** **а)** -6; **б)** 1; **в)** 7; **г)** 12; **д)** -16. **27.** **а)** -1; **б)** 1; **в)** -1; **г)** $\frac{1}{2}$; **д)** -1; **е)** $\frac{1}{2}$.

Завдання 31

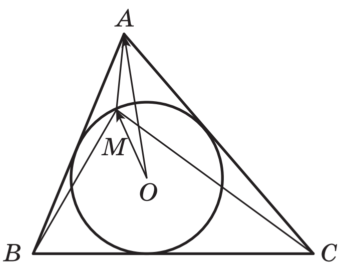
2. **а)** $x = 1$; **б)** $x = -3{,}5$; **в)** $x = -5$; **г)** $x = 0$. **3.** $\vec{x}(-1;\ 0{,}75)$. **4.** **б)** $-10{,}5$; **в)** 0. **8.** **б)** 10; **г)** -1; **е)** -12. **9.** **б)** $\frac{17}{5\sqrt{26}}$; **в)** $\frac{23}{5\sqrt{26}}$. **10.** $90°$; $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. **12.** **в)** $120°$; **г)** $45°$. **14.** **а)** $x = -2{,}4$; **б)** $x = \pm 6$. **15.** **а)** $-115 - 14\sqrt{3}$; **в)** -649. **16.** $k = 40$. **17.** $\frac{\sqrt{7}}{14}$. **18.** **а)** $\sqrt{3}$; **б)** $\sqrt{3}$; **в)** $\sqrt{37}$. **19.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **21.** $\vec{a}(4;\ 8)$. **22.** $60°$. **23.** $\vec{a} = -3/2\vec{b} - 3\vec{c}$. **24.** $\left(-\frac{1}{\sqrt{17}};\ \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$. **26.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow ABCD$ – паралелограм; $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 0 \Rightarrow$ сторони перпендикулярні. З цього $ABCD$ – прямокутник.

Завдання 32

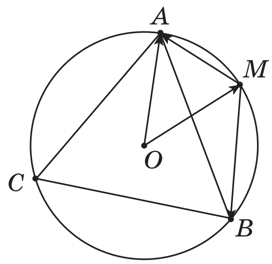
2. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **4.** Можливі два випадки: 1) $60°$; 2) кут, косинус якого дорівнює $\frac{13}{14}$. **5.** Порада. Позначте точку перетину діагоналей O і доведіть, що $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$. **6.** $\sqrt{13}$. **9.** Нехай у трикутнику ABC прямі h_a, h_b, h_c містять висоти. Точка M належить прямій h_a тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Оскільки $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}$, то ця рівність рівносильна $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ (1). Аналогічно точка M належить прямій h_b тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MA}$ (2). Якщо ж точка M є точкою перетину висот, проведених з вершин A і B, то виконуються одночасно обидві рівності (1) і (2):

$$\begin{cases}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\\ \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MA}\end{cases}\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\cdot\overrightarrow{MC}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MC}=0.$$

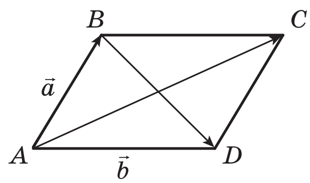
А це означає, що M лежить на прямій h_c. **9.** $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{OB}^2=0\Rightarrow AH\perp BC$. Аналогічно доводиться, що $BH\perp AC\Rightarrow H$ – точка перетину висот. **11.** З рівностей (мал. 7) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}$ маємо: $\overrightarrow{MA}^2=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OM}^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{MB}^2=\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OM}^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{MC}^2=\overrightarrow{OC}^2+\overrightarrow{OM}^2-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OM}$. Додаючи ці рівності, отримаємо: $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=3R^2+3r^2-2\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=3R^2+3r^2$, оскільки $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$, а точка O – центр вписаного і описаного кіл. **12.** $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}$ (мал. 8); $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}$. Звідси $\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=\overrightarrow{OA}^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM}^2+\overrightarrow{OB}^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM}^2+\overrightarrow{OC}^2-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM}^2=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2+3\overrightarrow{OM}^2-2\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=6R^2$, де R – радіус кола.



Мал. 7



Мал. 8



Мал. 9

Завдання для повторення розділу IV

15. $\vec{0}$. **16.** $\vec{0}$. **17. б)** $-(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{TC})$; **в)** $\overrightarrow{CT}-\overrightarrow{MC}$. **18. а)** $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; **б)** $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; **в)** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$; **г)** $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. **24. а)** $\overrightarrow{AB}(12;5)$, $\overrightarrow{AB}=12\vec{e}_1+5\vec{e}_2$; $|\overrightarrow{AB}|=13$; **б)** $\overrightarrow{AB}(3;-4)$, $\overrightarrow{AB}=-3\vec{e}_1-4\vec{e}_2$; $|\overrightarrow{AB}|=5$; **г)** $\overrightarrow{AB}(8;2)$, $\overrightarrow{AB}=8\vec{e}_1+2\vec{e}_2$; $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{17}$. **25. а)** $n=\frac{1}{3}$; співнапрямлені; **б)** при $n=6$ вектори співнапрямлені; при $n=-6$ протилежно напрямлені. **26. а)** $\beta=-1{,}5$; **б)** $\beta=2\frac{2}{3}$; **в)** $\pm\sqrt{21}$. **27.** $\frac{48-25\sqrt{3}}{11}$. **29.** $135°$. **30.** $\frac{\sqrt{2}}{10}$. **32. а)** 13; **б)** 46; **в)** 481. **34.** Позначимо (мал. 9) $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Тоді $\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$ і $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{b}-\vec{a}=\vec{d_1}$; $\vec{b}+\vec{a}=\vec{d_2}$. Додамо $\vec{d_1}^2=\vec{b}^2+\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$ і $\vec{d_2}^2=\vec{b}^2+\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$, маємо $\vec{d_1}^2+\vec{d_2}^2=2\vec{b}^2+2\vec{a}^2$.

Готуємося до тематичного оцінювання № 6

В – І

1. $\overrightarrow{(-1;\ 1)}$, $\sqrt{2}$. **2.** $x=0$. **3.** $D(3;7)$. **4. а)** 0; **б)** -18. **5.** Доведіть, що $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$.

В – ІІ

1. $\overrightarrow{(3;\ 2)}$, $\sqrt{13}$. **2.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$. **3.** $x=-4$. **4. а)** 7; **б)** 28. **5.** Доведіть, що $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

РОЗДІЛ V

Завдання 33

1. П о р а д а. Використайте теорему 1. **4.** Ні. **7.** **а)** Безліч; **б)** безліч; **в)** безліч або одну. **8.** Якщо точка лежить на прямій. **9.** Три точки належать одній прямій. **10.** Пряма і точка поза нею визначають тільки одну площину, а три точки на прямій визначають безліч площин. **11.** Так. **12.** Так.

Завдання 34

1. Або перетинаються, або мимобіжні. **3.** П о р а д а. Використайте означення мимобіжних прямих. **4.** Ні. **6.** Так. **7.** П о р а д а. Застосуйте метод від супротивного. **8.** Безліч. **9.** Так. **10.** **а)** Ні; **б)** ні; **в)** так. **13.** П о р а д а. Використайте теорему (див. с. 183). **15.** Так. **16.** П о р а д а. Розгляньте випадки: **а)** точка лежить на прямій; **б)** точка не лежить на прямій. **17.** Ні. **18.** Ні. **21.** Так. **22.** Так. **24.** П о р а д а. Використайте аксіому (див. с. 182).

Завдання 35

4. 25. **6.** 3. **7.** 6. **9.** 4. **12.** 48 см^2. **13.** У 9 разів. **14.** $3\sqrt{3}$ см. **15.** Збільшити квадрат діагоналі у два рази. **16.** Ні.

Завдання 36

2. Ні. **3.** Так. **5.** Так, трикутна. **6.** Шістнадцятикутник. **8.** Пряма призма. **9.** Так. **10.** Так. **11.** Так. **13.** У чотирикутник основи можна вписати коло. **14.** 60 см^2. **15.** 225 см^2; 125 см^3. **16.** 520 см^2; 800 см^3. **17.** Так. **18.** Так. **19.** $2\sqrt{3}$ м^3. **20.** $1500\sqrt{3}$ дм^3. **22.** 30 дм^3; 62 дм^2. **23.** 3 см; $9\sqrt{7}$ см^3. **24.** 75 кг. **25.** 60 м^3.

Завдання 37

6. **а)** $n+1$, $2n$, $n+1$; **б)** $4n$. **7.** **а)** Ні; **б)** ні. **9.** $360°(n-1)$. **10.** **а)** Ні; **б)** так. **11.** $\sqrt{3}a^2$. **12.** $6\left(\sqrt{3}+1\right)$ дм^2. **13.** 3 см^2. **14.** $4\sqrt{15}$ см^2. **15.** $4\left(1+\sqrt{3}\right)$ см^2. **16.** $36\sqrt{3}$ см^3. **17.** Збільшиться в 4,5 раза.

Завдання 38

1. $\frac{a}{2\pi}$ або $\frac{b}{2\pi}$. **2.** Площі бічної поверхні однакові. **3.** Не змінилася. **4.** Ні, об'єм одного в три рази більший за об'єм другого. **5.** 4 см. **10.** Ні. **11.** $3\pi R^2$. **12.** 100 кульок. **13.** Існує, $R=3$. **14.** Кавун радіусом 20 см. **15.** 125 кульок. **16.** $R=\sqrt[3]{\frac{35}{4\pi}}$. **17.** 1,5.

Завдання для повторення розділу V

18. П о р а д а. Розгляньте можливе розміщення точок A, B, C. **19.** Площини збігаються. **20.** Три точки належать прямій. **22.** Так. **23.** П о р а д а. Застосуйте метод від супротивного. **29.** Ні. **31.** Ні. **35.** **а)** $6a^2$ і $24a^2$; **б)** a^3 і $8a^3$; **в)** $a\sqrt{3}$ і $2a\sqrt{3}$; **г)** $a\sqrt{2}$ і $2a\sqrt{2}$. **36.** **а)** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см; **б)** 384 см^2; **в)** 512 см^3. **39.** $\frac{9\sqrt{3}a^2}{4}$ см^2. **41.** Ні. **42.** 720°. **57.** Зменшиться в 9 разів. **58.** 2 грн. **59.** Один великий. **60.** $4S$. **61.** 1000.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Д. Порада. Врахуйте, що перше дерево буде на відстані 2 м : 4 = 0,5 м від початку вулиці. **2.** Б. **3.** Г. **4.** А. **5.** Г. **6.** В. Порада. Розгляньте випадок, коли один з даних кутів гострий, а інший – тупий. **7.** Г. **8.** В. **9.** Г. **10.** А. **11.** Г. **12.** Д. Порада. Пригадайте властивості бісектриси кута. **13.** В. **14.** В. **15.** Б. **16.** Г. **17.** А. **18.** Д. **19.** Б. **20.** В. **21.** Г. **22.** А. **23.** Д. **24.** Б. **25.** Г. **26.** Д. **27.** Б. **28.** В. **29.** А. **30.** Г. **31.** В. **32.** Б. **33.** Б. **34.** В. **35.** Г. **36.** В. **37.** А. **38.** Д. **39.** Б. **40.** А, В, Г, Д. **41.** А, Б, В, Г. **42.** А, В. **43.** А, Д. Порада. Розгляньте два можливих випадки розміщення точки C відносно відрізка AB. **44.** В, Г. Порада. Див. пораду до № 43. **45.** В, Д. **46.** Г. **47.** Б, Д. **48.** В. **49.** Б, Г. **50.** А, Г. Порада. Врахуйте, що шукана дотична, не паралельна осі ординат, проходить через точку M, і скористайтеся формулою відстані від точки до прямої. **51.** Б. **52.** Д. **53.** А-2, Б-5, В-2, Г-4, Д-4. **54.** А-2; Б-7; В-6; Г-4; Д-4; Е-2. **55.** А-2; Б-3; В-4; Г-2, Г-4; Д-2, Д-6. **56.** А-3; Б-2; В-3; Г-5; Д-5; Е-3; Є-3. **57.** А-3; Б-1; В-4; Г-6; Д-2. **58.** А-8; Б-4; В-4, В-3; Г-7; Д-5; Е-1. **59.** А-5, А-3; Б-5; В-2; Г-2; Д-5, Д-3. **60.** А-8; Б-4; В-2; Г-3; Д-6; Е-5. **61.** 1) ... коло з центром, що збігається з центром заданого кола і радіусом, що дорівнює відстані між центром кола і серединою хорди даної довжини; 2) ... коло з центром у середині заданої гіпотенузи й радіусом, що дорівнює половині цієї гіпотенузи; 3) ... пряма – серединний перпендикуляр до відрізка з кінцями в даних точках; 4) ... коло з центром у заданій точці, радіус якого дорівнює радіусу кіл, що розглядаються; 5) ... пряма паралельна даним, що ділить відстань між ними навпіл; 6) ... дві взаємно перпендикулярні прямі – бісектриси вертикальних кутів, утворених заданими прямими. **62.** 1) ... його діагоналі взаємно перпендикулярні; 2) ... його діагоналі рівні; 3) ... всі його сторони рівні – це ромб; 4) ... його діагоналі рівні і взаємно перпендикулярні; 5) ... кут, протилежний прямому куту, прямий. **63.** Див. § 16. 1) 3 – його висоти; 2) нескінченна множина – довільний діаметр; 3) 2 – бісектриси пар вертикальних кутів; 4) 4 – діагоналі і прямі, що сполучають середини протилежних сторін; 5) 6 – діагоналі і прямі, що сполучають середини протилежних сторін. **64.** 20; 9; 5; 6. **65.** ... бісектрисі кута. **66.** ... паралельні. **67.** ... взаємно перпендикулярні. **68.** ... $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$; АБО $a = a_1$; $b = b_1$; АБО ... **69.** ... рівнобедрений. **70.** ... гострокутний. **71.** ... тупий. **72.** ... взаємно перпендикулярні; АБО ... і дві сторони одного трикутника рівні двом сторонам другого, АБО ... **73.** ... рівні. **74.** **а)** ... паралельні; **б)** ... паралельні. **75.** ... паралельні. **76.** ... належать одній прямій. **77.** ... лежать на одній прямій. **78.** ... рівнобічна. **79.** ... є правильними. **80.** $c > 0{,}25(a^2 + b^2)$. **81.** $a = b \neq 0$ і $c > \left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2$. **82.** 13. **83.** $\frac{(n-3)n}{2}$. **84.** $\frac{c^2}{a^2+b^2} = R^2$. **85.** ... це – нуль-вектор. **86.** 30°, 66°, 84°. **87.** $AM = 2\,MC$. **88.** $S_{ABO} > S_{CDO}$. **89.** 30°, 60°, 90°. Порада. Продовжіть медіану до перетину з колом, описаним навколо даного трикутника. **90.** 48 см². **91.** 46 мм, 46 мм. Порада. Розгляньте два можливі випадки і врахуйте, що повинна виконуватися нерівність для сторін трикутника. **92.** 8 см і 4 см. **93.** 6 см². **94.** 30°; 75°; 75°. Порада. Скористайтеся теоремою Фалеса і знайдіть довжину висоти, проведеної до бічної сторони. **95.** 51°. **96.** 0,5 м < AB < 1 м. Порада. Врахуйте, що в рівнобедреному трикутнику ABC кут B – тупий. Тоді $AB < AC = 1$; $2AB > AC = 1$. **97.** 5 см. Порада. Врахуйте, що тупим може бути тільки кут при вершині рівнобедреного трикутника, тоді висота, проведена до бічної сторони, міститься поза трикутником. **98.** 34 см.

Порада. Див. пораду до № 97. **99.** 5 см. Порада. Врахуйте властивість бісектриси кута як ГМТ рівновіддалених від сторін кута. **100.** 120°. **101.** 90°. **102.** $\dfrac{r\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}$.
103. A – точка перетину серединного перпендикуляра до BC з прямою a. **104.** 2 : 1. **105.** $\frac{5}{18}S$. Порада. Скористайтеся тим, що: медіана ділить трикутник на два рівновеликі трикутники; площі подібних фігур відносяться як квадрати коефіцієнтів подібності. **106.** $\frac{13}{36}S$. Порада. Скористайтеся порадою до № 105 і врахуйте, що $S_{APMK} = S_{ACN} + S_{CPM} - S_{MNK}$, де N – середина AB. **107.** 6 см, 4 см і 6 см. **108.** 80 см². Порада. Врахуйте, що сума кутів опуклого чотирикутника 360°. **109.** 24 см². Порада. Запишіть площу ромба через добуток його діагоналей і застосуйте теорему Піфагора до трикутника, катетами якого є половини діагоналей. **110.** 45°; 135°; 135°; 45°; 4 см. **111.** 54 см². **112.** Основи: 4 см і 12 см, бічні сторони: 8 см і 8 см. **113.** $9\sqrt{2}$ см. **114.** $\frac{98}{9}$ см². **115.** $\frac{3a+b}{a+3b}$. **116.** 12 см. **117.** $4\sqrt{3}$ м і 4 м. **118.** Ні. Порада. Зверніть увагу на ординати точок. **119.** Так. Порада. Запишіть рівняння прямої AC і перевірте, чи належить точка B цій прямій. **120.** $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$. **121.** $y = -1$. **122.** $x = -11$. **123.** $y = -2x$. **124.** $y = 0{,}5x + 2{,}5$. **125.** $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 7{,}2$. Порада. Знайдіть радіус кола, скориставшись формулою для відстані від точки до прямої, $R = d((-1;\ 3);\ 2x - y - 1 = 0) = \frac{6}{\sqrt{5}}$. **126.** **а)** $O\left(\frac{a}{2};\ \frac{b^2+c^2-ab}{2c}\right)$; **б)** $H\left(b;\ \frac{ab-b^2}{c}\right)$; **в)** $M\left(\frac{a+b}{3};\ \frac{c}{3}\right)$. **127.** **а)** Зовні трикутника; **б)** зовні трикутника. **128.** **а)** 0; **б)** 2; **в)** 2. **129.** $\frac{5\sqrt{13}}{26}$. **130.** Поворот на кут, косинус якого дорівнює $\frac{3}{5}$ з центром у точці (2; –4). **131.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **132.** $x_1 = x_0 + k(x - x_0) + a$, $y_1 = y_0 + k(y - y_0) + b$.

ЗМІСТ

Навчальне видання

АПОСТОЛОВА Галина Вадимівна

Упорядкування завдань
Карликової О. А., Баришнікової О. І.,
Вашуленко О. П.

ГЕОМЕТРІЯ

Дворівневий підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Редактор *О. Мовчан*
Обкладинка та художнє оформлення
В. Марущинця
Технічні малюнки *Ю. Лебедєва*
Технічний редактор *В. Олійник*
Коректор *І. Іванюсь*
Комп'ютерна верстка *Ю. Лебедєва*

Здано на виробництво і підписано до друку 01.06.2009 р.
Формат 70×100 $^{1}/_{16}$. Папір офсетний. Друк офсетний.
Гарнітура Шкільна. Умовн. друк. арк. 24,7 + 0,33
форзац. Умовн. фарбо-відб. 49,4 + 0,66 форзац.
Обл.-вид. арк. 24,37 + 0,51 форзац.
Наклад 118 606 прим. (1-й з-д 83 030 прим.)
Вид. № 948. Зам. №

Видавництво «Генеза»,
04212, м. Київ, вул. Тимошенка, 2-л.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців
серія ДК № 25 від 31.03.2000 р.

Віддруковано з готових позитивів
на ДП «Державна картографічна фабрика»,
21100, м. Вінниця, вул. 600-річчя, 19.
Свідоцтво серія ДК № 869 від 26.03.2002 р.