1.1. Узагальнені координати.
Кількість степенів вільності матеріальної системи

Що є спільного між космічним кораблем та лопатою? Це жартівливе питання має глибокий сенс. І той і інший об’єкт є твердим тілом і має шість степенів вільності. Це дуже велика кількість степенів вільності і тому керування такими об’єктами досить складне. Лопатою керує людина. Не існує роботів, здатних впоратися з лопатою у всій різноманітності її застосувань. Космічні кораблі у деяких випадках керуються автоматичними системами. Однак це відносно прості випадки. У досить складних випадках, наприклад під час відповідальних стиковок у космосі, керування кораблем виконується вручну, тобто знов-таки людиною.

Таким чином, кількість степенів вільності є дуже суттєвою характеристикою системи, яка оцінює її реальну складність. Однак це поняття вторинне. Первинним та ключовим для аналітичної механіки є поняття узагальнених координат. Пояснимо це спочатку на прикладах.

Положення вільної матеріальної точки M на площині можна задати двома декартовими координатами x_M, y_M (рис. 1.1.1). Одначе те ж можна зробити і за допомогою двох полярних координат r, φ.

Полярні координати є частковим випадком так званих криволінійних координат (рис. 1.1.2). Є безліч способів для того, щоб задати положення точки на площині за допомогою криволінійних координат. Об’єднує усі ці випадки те, що кількість координат дорівнює двом.

Математичний маятник (рис. 1.1.3) є частковим випадком точки, що рухається по площині по заздалегідь заданій траєкторії (у даному випадку коло радіусу *l*). У цьому випадку задати положення точки можна однією координатою. Це може бути, наприклад, кут відхилення φ маятника від вертикалі або відстань s точки M від початку відліку на траєкторії (відстань s виміряється вздовж траєкторії). Таким чином, наявність однієї сполуки (ниті) зменшило кількість координат із двох до однієї.

Для того, щоб задати положення одночасно двох матеріальних точок M_1, M_2 на площині потрібні чотири координати x_1, y_1, x_2, y_2 (рис. 1.1.4). Однак якщо точки з'єднані стержнем фіксованої довжини *l*, то координати точок задовольняють співвідношенню:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l^2 \qquad (1.1.1)$$

Отже, незалежними є тільки три координати (наприклад, x_1, y_1, x_2). Четверту (y_2) можна знайти з рівняння (1.1.1).

Таким чином, для того, щоб задати положення даної системи необхідні три координати. І тут, як і вище, вибір координат не є однозначним. Наприклад, дуже зручно задавати положення відрізка M_1, M_2 двома координатами одного з його кінців (x_1, y_1) та кутом нахилу φ.

Прикладом системи з двома степенями вільності є подвійний маятник (рис. 1.1.5). І тут вибір координат не є однозначним. Крім двох кутів вказаних на рис. 1.1.5, можливо використання інших кутів (рис. 1.1.6); є і безліч інших варіантів.

Розглянемо довільну плоску фігуру, що вільно переміщується по площині. Наприклад, це може бути хокейна шайба, що сковзає по льоду (рис. 1.1.7). Поєднаємо з цією фігурою деякий відрізок AB. Тоді, також як у випадку, зображеному на рис. 1.1.4, бачимо, що положення фігури однозначно задається трьома координатами x_A, y_A, φ . Однак, якщо маємо одну сполуку, наприклад, дорогу, по якій із сковзанням рухається колесо (рис. 1.1.8.), то незалежними є тільки дві координати x_A, φ (координата y_A у цьому випадку залишається постійною і дорівнює радіусу колеса).

У випадку, якщо колесо котиться без буксування, величини x_A та φ пов'язані співвідношенням:

$x_A = R\varphi$

Отже, незалежною залишається тільки одна координата (x_A або φ на вибір).

Подібні приклади можна розглядати і далі, однак уже розглянутих досить для того, щоб зробити узагальнення. Ми бачимо, що положення матеріальної системи у просторі можна задавати різними параметрами різної розмірності, але у будь якому випадку ці параметри враховують наявність сполук, котрі є у даній системі, і їх кількість мінімально необхідна для розв'язання поставленої задачі. Підсумовуючи, можемо зробити наступне

Визначення 1. Узагальненими координатами даної матеріальної системи є будь які параметри будь якої розмірності, що задовольняють двом вимогам:

1) вони однозначно задають положення системи у просторі;
2) вони незалежні між собою.

Природним наслідком цього визначення є

Визначення 2. Кількістю степенів вільності матеріальної системи зветься кількість її узагальнених координат.

Якщо повернутися до прикладу, із якого розпочався цій розділ, то як у випадку лопати, так і у випадку космічного корабля для того, щоб задати положення цих об'єктів у просторі потрібні шість узагальнених координат. Це можуть бути, наприклад, три декартови координати центру мас та три кутових координати, що задають орієнтацію тіла у просторі (наприклад, курс, крен та тангаж).

Кількість степенів вільності є найважливішою характеристикою будь якої системи. Система може бути зовні дуже простою, але мати багато степенів вільності (лопата), що приводить до труднощів у її керуванні. Система може бути зовні дуже складною, але мати мало степенів вільності, що різко полегшує її керування. Наприклад, верстати з чисельним програмним керуванням є дуже досконалими й складними пристроями, але керують ними, найчастіше, робітники невисокої кваліфікації, оскільки режим роботи верстата заданий однозначно. Від робітника фактично потребується тільки вмикання та вимикання верстата.

Із цим пов'язане й важливе питання моделювання складних систем. У сучасній керівній праці переважають тенденції врахування якомога більшої кількості факторів, що впливають на роботу даної системи (наприклад, фірми). Одначе насправді людина може у один момент часу охопити й врахувати лише невелику кількість параметрів (значно меншу десяти).

Спроби врахування більшої кількості параметрів за допомогою сучасних інформаційних технологій, що орієнтовані на комп’ютери, є лише небезпечною ілюзією, яка приводить до перевтоми осіб керівної праці (менеджерів) і зниженню якості керівництва. У зв’язку з цим навіть виникнув такий анекдот: у часи Маркса робітники трудились шістнадцять годин на добу, а капіталісти вісім; у наш час робітники трудяться вісім годин, а капіталісти – шістнадцять та більше!

Висока кваліфікація при моделюванні систем виявляється саме в умінні створювати максимально прості моделі (із малою кількістю степенів вільності) для конкретних ситуацій. Розуміється, такий труд є творчим, тому що замість ілюзії механічного використання універсальної надскладної моделі, яка начебто охоплює усі ситуації, треба безперервно створювати усе нові прості моделі, які відповідають задачам, що виникають. Але тільки цей шлях дає реальні результати.

1.2. Принцип можливих переміщень

У звичайній механіці головними об’єктами дослідження є матеріальна точка та абсолютно тверде тіло. Для опису руху матеріальної точки застосовують другий закон Ньютона; рух твердого тіла описується за допомогою інтегральних наслідків другого закону Ньютона – теорем про зміну кількості руху та кінетичного моменту матеріальної системи. У статиці застосовуються очевидні наслідки цих законів і теорем у вигляді рівнянь статики.

Однак у випадках більш складних матеріальних систем, що складаються з кількох матеріальних точок та тіл, застосування подібного підходу приводить до невиправданих складнощів. Розглянемо, наприклад, стержньову систему, що зображена на рис. 1.2.1 і складається із шості шарнірно з'єднаних стержнів (пантограф). У точках А і В прикладені сили P і Q, під дією яких система знаходиться у рівновазі. Треба знайти співвідношення між цими силами.

При використанні звичайних рівнянь рівноваги довелось би складати такі рівняння для кожного стержня, що входить у склад системи. Оскільки таких стержнів шість і на кожний доводиться по три рівняння рівноваги, то усього отримуємо вісімнадцять рівнянь. Крім сил P і Q у ці рівняння входять зусилля взаємодії стержнів з опорою та проміж собою, знаходження яких не потрібне по умовах задачі.

Уже цей простий приклад показує, що застосування звичайних рівнянь рівноваги не є ефективним для складених конструкцій. Між тим сама по собі розглянута задача нескладна і легко розв'язується при застосуванні іншого підходу.

Перед тим як закінчити розв'язання даної задачі, розглянемо, які ще загальні методи застосовуються в механіці для рішення задач. З глибокої давнини відомо, наприклад, правило важеля. Спорідненим до цього правила є золоте правило механіки. Розглянемо їх більш детально.

На рис. 1.2.2 зображена гойдалка. Відомо, що величини сил, які прикладені до неї, зворотно пропорційні відповідним плечам. Однак величини плеч визначають переміщення кінців гойдалки – чим більше плече, тим більше переміщення. Якщо обчислити роботи сил, то виявиться, що модулі таких сил однакові, а знаки протилежні. Отже сумарна робота двох сил дорівнює нулю.

Цей результат можна розповсюдити на системи будь-якої степені складності. Однак перед тим, як сформулювати скінчені висновки, відзначимо наступне. Принцип можливих переміщень, який буде викладений нижче, можна розглядати як наслідок звичайних рівнянь рівноваги. Однак можливий і інший погляд на цей принцип як на зовсім самостійний закон природи. Причому закон більш загальний, ніж рівняння рівноваги. Це пов'язано з тим, що принцип можливих переміщень, як і інші принципи аналітичної механіки, із початку формулюється для систем будь якої степені складності, а не для окремих матеріальних точок або твердих тіл. Цьому можна вважати, що аналітична механіка є безпосередньою попередницею сучасного системного аналізу, оскільки саме в ній уперше почали вивчати закони функціонування складних систем. Методи аналітичної механіки тому й іменуються не законами, а принципами, що в них розглядаються не якісь часткові ситуації, а найбільш загальні випадки функціонування складних механічних систем.

Отже, розглянемо головні особливості принципу можливих переміщень. По-перше, система розглядається як єдине ціле без розчленування її на частини. По-друге, для вивчення питання про рівновагу системи, тобто про її перебування у стані рівноваги, пропонується трохи перемістити систему з метою визначення її реакції на таке переміщення. У зв'язку з цим дамо наступні визначення:

Визначення 1. Можливим переміщенням $\delta\bar{r}$ довільної точки матеріальної системи є її нескінченно мале переміщення, яке не порушує зв'язків, що є у системі. Позначення $\delta\bar{r}$, з одного боку, схоже на символ $d\bar{r}$, що нагадує про нескінчену малість переміщення; з іншого боку, слід пам'ятати, що насправді точки матеріальної системи не мають ніяких переміщень, оскільки система знаходиться у рівновазі. Можливе переміщення є начебто якимось експериментом над системою, що вивчається.

Оскільки різні точки матеріальної системи взаємопов'язані, то переміщення будь-якої з них викликає переміщення й інших точок. У зв'язку з цим сформулюємо наступне

Визначення 2. Можливим переміщенням системи є сукупність можливих переміщень усіх точок системи.

Якщо на точки системи діють сили, то вони можуть виконувати роботу на можливих переміщеннях точок. У зв'язку з цим сформулюємо

Визначення 3. Можливою роботою δA сили $\overline{F}$, яка діє на точку матеріальної системи, є робота цієї сили на можливому переміщенні точки $\delta\overline{r}$:

$$\delta A = \overline{F} \cdot \delta\overline{r} \tag{1.2.1}$$

Тепер можна остаточно сформулювати принцип можливих переміщень. *Для будь-якої матеріальної системи, що знаходиться в стані рівноваги, сумарна можлива робота сил, які діють на точки системи, дорівнює нулю при довільному переміщенні системи:*

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k \cdot \delta\overline{r}_k = 0 \tag{1.2.2}$$

Тут додавання йде по усіх точках системи, у яких прикладені сили.

Слово *будь-якої*, що застосовано у формулюванні, слід розуміти з деякими застереженнями. Справа у тому, що важливу роль у практичному застосуванні принципу можливих переміщень відіграє можливість виключити з розглядання сили взаємодії між складовими матеріальної системи. Найчастіше це можливо, оскільки сумарна робота таких сил дорівнює нулю. У тих випадках, коли це не так, наприклад, для сил тертя або пружних сил, їх треба включити у перелік сил, які враховуються в рівнянні (1.2.2). У деяких випадках це призводить до значних труднощів, що дещо обмежує сферу застосування принципу можливих переміщень.

Ще раз підкреслимо, що сформульований принцип розглядається як деякий самостійний закон природи, який не потребує виведення з будь-яких інших законів.

Повернемось до задачі про рівновагу пантографу. Будемо припускати, що тертя у шарнірах відсутнє. Це забезпечує найбільші можливості для застосування принципу можливих переміщень. У цьому випадку роботу виконують тільки сили P та Q. Їх сумарна можлива робота, у відповідності до (1.2.2), дорівнює нулю:

$$\delta A = P\delta_A - Q\delta_B = 0 \qquad (1.2.3)$$

Переміщення точки B викликано розтяганням нижчого ланцюга пантографу. Переміщення точки A викликається одночасними однаковими розтяганнями обох ланцюгів. У зв'язку з цим буде:

$$\delta_A = 2\delta_B \qquad (1.2.4)$$

Із врахуванням цього з (1.2.3) отримуємо:

$$2P\delta_B - Q\delta_B = (2P - Q)\delta_B = 0 \qquad (1.2.5)$$

Оскільки переміщення δ_B не дорівнює нулю, то справедлива рівність:

$$2P - Q = 0 \qquad (1.2.6)$$

Таким чином, замість вісімнадцяти рівнянь, які вимагалось скласти при звичайному підході, тут отримано тільки одне рівняння (1.2.6), яке дає відповідь на поставлене питання: Q=2P.

1.3. Узагальнені сили

Сформулюємо принцип можливих переміщень в узагальнених координатах. Нехай система має n степенів вільності. Позначимо узагальнені координати символами:

$$q_1, q_2, \ldots, q_n \qquad (1.3.1)$$

Розглянемо можливе переміщення $\delta\bar{r}_k$ довільної точки системи як нескінченно малий приріст її радіус-вектора $\bar{r}_k$. Оскільки узагальнені координати однозначно задають положення матеріальної системи у просторі, то радіус-вектор довільної точки системи можна виразити через ці координати:

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_n) \quad (k = 1, \ldots, N) \qquad (1.3.2)$$

Нехай у результаті можливого переміщення системи узагальнені координати отримають прирощення:

$$\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n \qquad (1.3.3)$$

Отже, отримають прирощення аргументи у (1.3.2). Завдяки нескінченій малості цих прирощень відповідне прирощення радіус-вектора $\bar{r}_k$, тобто можливе переміщення k-ї точки, можна обчислити як диференціал функції багатьох змінних:

$$\delta\bar{r}_k = \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_2}\delta q_2 + ... + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_n}\delta q_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i \qquad (1.3.4)$$

Підставляючи (1.3.4) у (1.2.2) отримуємо:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i\right) = 0 \qquad (1.3.5)$$

У (1.3.5) складові згруповані по силах. Виконаємо перегрупування, зводячи подібні по однакових прирощеннях узагальнених координат:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k \cdot \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i = 0 \qquad (1.3.6)$$

Введемо позначення:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k \cdot \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i} \quad (i = 1,...,n) \qquad (1.3.7)$$

Тоді (1.3.6) приймає вид:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = 0 \qquad (1.3.8)$$

Завдяки схожості виразів (1.2.2) та (1.3.8) величини Q_i називають, по аналогії зі звичайними силами, узагальненими силами. Оскільки узагальнені координати незалежні проміж собою, то незалежні і їх прирощення (1.3.3). Тому принципова якість виразу (1.3.8), на відміну від (1.2.2), є та, що тут дорівнює нулю лінійна комбінація незалежних величин. Отже, дорівнюють нулю й усі коефіцієнти при цих величинах, тобто усі узагальнені сили:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N}\bar{F}_k \cdot \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1,...,n) \qquad (1.3.9)$$

Ми отримали рівняння рівноваги системи, причому їх кількість дорівнює кількості степенів вільності системи. Це ще раз доводить важливість поняття кількості степенів вільності, обговорене вище. Кількість рівнянь визначається не кількістю частин системи, яка може бути й досить великою, а кількістю степенів вільності.

У прикладі пантографу, який розглянуто у попередньому параграфі, кількість степенів вільності дорівнює одиниці і маємо єдине рівняння рівноваги типу (1.3.9), а саме (1.2.6).

Перейдемо тепер до випадку потенціальних сил. У цьому випадку маємо функцію координат:

$$\Pi=\Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2,\ldots,x_n, y_n, z_n), \tag{1.3.10}$$

через яку виражаємо усі сили, що діють на точки системи. Для проекцій цих сил маємо:

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k},\ F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k},\ F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \quad (k = 1,\ldots,N) \tag{1.3.11}$$

У відповідності до цього буде:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N}\left(F_{kx}\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky}\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz}\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right) = -\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right) \tag{1.3.12}$$

Остаточно отримуємо вираз:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i = 1,\ldots,n) \tag{1.3.13}$$

При розв’язанні задач немає необхідності повторювати наведені громіздкі викладки. Слід із самого початку виразити потенціальну енергію через узагальнені координати:

$$\Pi=\Pi(q_1, q_2,\ldots,q_n), \tag{1.3.14}$$

після чого використовувати вирази (1.3.13). Умовою рівноваги системи буде одночасна рівність нулю усіх похідних:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{1.3.15}$$

Розглянемо, у якості ілюстрації застосування рівнянь (1.3.15), наступний приклад. На гладкому куполі підвішена, за допомогою пружної ниті жорсткості C, матеріальна точка M маси m (рис. 1.3.1). Нерухомий кінець ниті прикріплений до вершини куполу. Довжина ниті у недеформованому стані дорівнює s_0. Знайти положення рівноваги точки M.

Розв'язання. Задамо положення точки на куполі кутом α (рис. 1.3.1). Цей кут однозначно задає положення точки, отже, система має одну степінь вільності.

При відсутності тертя на точку M діють дві потенціальні сили: сила тяжіння та пружна сила з боку ниті. Виразимо їх потенціальні енергії через кут α. Для сили тяжіння використаємо відому формулу $\Pi_{тяж}=mgh$, де висоту h будемо виміряти від основи купола. У відповідності до цього маємо:

$$\Pi_{тяж}=mgR\cos(\alpha+\alpha_0) \tag{1.3.16}$$

Для пружної сили буде:

$$\Pi_{пружн}=\frac{Cs^2}{2}=\frac{CR^2\alpha^2}{2} \tag{1.3.17}$$

Разом:

$$\Pi=\Pi_{тяж}+\Pi_{пружн}=mgR\cos(\alpha+\alpha_0)+\frac{CR^2\alpha^2}{2} \tag{1.3.18}$$

У відповідності до (1.3.15) отримуємо рівняння рівноваги:

$$\frac{d\Pi}{d\alpha}=-mgR\sin(\alpha+\alpha_0)+CR^2\alpha=0, \tag{1.3.19}$$

або

$$mg\sin(\alpha+\alpha_0)=CR\alpha \tag{1.3.20}$$

Фізичний смисл цього рівняння очевидний: зліва стоїть проекція сили тяжіння на дотичну до купола в точці M, справа – пружна сила. Зобразимо рівняння графічно (рис. 1.3.2). Очевидно, що фізичний смисл мають тільки результати, що відповідають перетинанню двох графіків зліва від точки максимуму синуса, оскільки тільки при цій вимозі точка М розташована на куполі. Відповідне значення α можна знайти якимось чисельним методом.

1.4. Варіаційний принцип Гамільтона

Також, як і у статиці, у складних задачах динаміки малоефективне застосування звичайних законів, орієнтованих на окремо взяті матеріальні точки або тверді тіла. Найбільші можливості при дослідженні руху складних матеріальних систем демонструють так звані варіаційні принципи. Основна ідея цих принципів та ж, що й у принципу можливих переміщень у статиці. Якщо там для вивчення положення рівноваги системи її спеціально виводять із цього положення, то тут для вивчення руху системи проводять порівняння реального руху з якимось близькими рухами.

Першим, хто сформулював варіаційний принцип у механіці, був французький учений Мопертюі. Тут варіаційний принцип Мопертюі розглядатись не буде, однак цікаво розглянути історію його появи. Мопертюі починав свою діяльність не як учений, а як священик католицької церкви. Після переходу в область наукових досліджень він зберіг релігійний стиль мислення та обґрунтував сформульований ним принцип не стільки математичними доказами, скільки посиланнями на розумну побудову створеної Богом природи. Це зустріло різкий супротив зі збоку сучасників і результати Мопертюі були відкинуті. Однак згодом інший француз Лагранж навів строгий математичний доказ ідей Мопертюі, після чого відповідний результат увійшов у науку на законних підставах і відомий зараз як варіаційний принцип Мопертюі-Лагранжа.

Ця історія досить цікава, причому не тільки з історичної точки зору. У сучасній фізиці велике розповсюдження отримали різноманітні ідеї симетрії, обґрунтування яких не більш суворе, ніж обґрунтування, наведене у свій час Мопертюі. Фактично, ідеї симетрії виходять все з тої ж мислі про розумність побудови Всесвіту. Варіаційний принцип Мопертюі й інші споріднені йому принципи випередили, таким чином, найбільш сучасні підходи до вивчення складних систем, включаючи сюди і таку систему, як увесь Всесвіт.

Тут буде розглядатись так званий варіаційний принцип Гамільтона, названий у честь його автора англійського вченого Гамільтона. Для його формулювання введемо попередньо деякі поняття.

Простором конфігурацій будемо називати математичний n-вимірний простір, координатами точок якого є узагальнені координати даної матеріальної системи. Наприклад, для математичного маятника простором конфігурацій є координатна вісь φ (рис. 1.4.1). При русі маятника у звичайному фізичному просторі змінюється його кут φ і по осі рухається точка M, що зображує.

Для точки, положення якої на площині задається декартовими координатами, простором конфігурацій буде сама площина x, y. Однак якщо положення точки задається полярними координатами r, φ , то у двомірному просторі конфігурацій вздовж осей координат будуть відкладатися величини r та φ (рис. 1.4.2). У випадку подвійного маятника (рис. 1.1.4 або 1.1.5) також маємо двомірний простір конфігурацій, у якому вздовж осей координат відкладаються кути φ_1 та φ_2.

Для твердого тіла, що вільно переміщується по площині (рис. 1.1.6), простір конфігурацій тривимірний (рис. 1.4.3).

У загальному випадку n-вимірного простору його зображення, природно, неможливо. Однак будемо, для наочності, зображати його у вигляді двовимірного простору (рис. 1.4.4).

Довільному положенню матеріальної системи у звичайному просторі з узагальненими координатами q_1 $q_2,\ldots,q_n$ відповідає точка, що зображує, у просторі конфігурацій з тими ж координатами. При переміщенні матеріальної системи у звичайному просторі відповідна точка, що зображує, рухається у просторі конфігурацій.

Нехай система у момент часу t_0 знаходиться у положенні, заданому точкою, що зображує, M_0, а в момент часу t_1 – у положенні M_1 (рис. 1.4.4). Розглянемо усілякі переміщення точки, що зображує, із положення M_0 у положення M_1. Для кожного з подібних переміщень обчислимо так звану дію по Гамільтону:

$$S=\int_{t_0}^{t_1} L dt \qquad (1.4.1)$$

Тут:

$$L=T-\Pi \qquad (1.4.2)$$

– функція Лагранжа; Т – кінетична енергія системи, П – потенціальна.

Перед тим як сформулювати варіаційний принцип Гамільтона, виконаємо деякий мислений експеримент. Припустимо, що дія S обчислена для чотирьох траєкторій у просторі конфігурацій, зображених на рис. 1.4.4 і відповідні значення такі: S_1=123.7, S_2=114.8, S_3=97.3, S_4=99.4. Треба відповісти, який з результатів відповідає дійсній траєкторії? Практика опитування слухачів показує, що завжди майже миттєво лунає правильна відповідь: третя. Тобто, та траєкторія, для якої дія мінімальна. Доказ правильності відповіді, природно, не наводиться, але інтуїтивно питання цілковито ясне. Трудно уявити, щоб істинним був би не екстремальний результат. Цей мислений експеримент підтверджує правоту Мопертюі, який виходив із подібних же міркувань.

Сформулюємо варіаційний принцип Гамільтона: *З усіх траєкторій, які починаються в одній і тій же точці M_0 в один і той же момент часу t_0 і закінчуються в одній і тій же точці M_1 в один і той же момент часу t_1 дійсною є та, для якої дія по Гамільтону екстремальна. Найчастіше вона мінімальна.*

Також, як і у випадку принципу можливих переміщень підкреслимо, що варіаційний принцип Гамільтона можна приймати як закон природи, що не потребує доказів. При певних умовах можна показати еквівалентність цього принципу другому закону Ньютона, однак, як відомо, сам закон Ньютона не доводиться, бо є узагальненням експериментальних фактів. У той же час степінь узагальнення варіаційного принципу Гамільтона значно вище, оскільки він формулюється для матеріальних систем довільної степені складності, в той час як другий закон Ньютона формулюється для матеріальної точки.

1.5. Структура функції Лагранжа

Розглянемо більш детально функцію Лагранжа, яка застосовується у варіаційному принципі Гамільтона. У відповідності до смислу викладеного вище, її треба виражати через узагальнені координати. Питання про вираження через узагальнені координати потенціальної енергії ми вже розглядали вище (1.3.14). Декілька більш складні справи маємо у випадку з кінетичною енергією. Розглядаючи матеріальну систему як сукупність матеріальних точок із масами $m_1,\ldots,m_N$, що рухаються зі швидкостями $\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_N$, запишемо звичайний вираз для кінетичної енергії системи як суми кінетичних енергій усіх її точок:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}m_k v_k^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}m_k\bar{v}_k\cdot\bar{v}_k \qquad (1.5.1)$$

Тут, для зручності подальших викладок, квадрат швидкості точки представлений у вигляді скалярного добутку двох однакових векторів швидкості.

Використовуючи вираз (1.3.2) обчислимо швидкість довільної точки як похідну складної функції:

$$\bar{v}_k = \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j \quad (1.5.2)$$

У (1.5.2) використано позначення:

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \quad (i = 1,\ldots,n) \quad (1.5.3)$$

для величини, що називається, за аналогією зі звичайною швидкістю, узагальненою швидкістю.

Дві різні форми запису суми у (1.5.2) із різними індексами потрібні для подальшого перемноження. Зрозуміло, що позначення індексу додавання (як “німого” або безіменного індексу) не відіграє ніякої ролі. Він має допоміжну роль і у розгорнутій формі суми (1.5.2) відсутній.

Підставляючи (1.5.2) у (1.5.10) одержуємо:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{N} m_k\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j \quad (1.5.4)$$

Уведемо позначення:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{N} m_k\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} = a_{ij}(q_1,\ldots,q_n) \quad (i, j = 1,\ldots,n) \quad (1.5.5)$$

Наприкінці отримуємо:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(q_1,\ldots,q_n)\dot{q}_i\dot{q}_j \quad (1.5.6)$$

Таким чином, кінетична енергія має у загальному випадку вид квадратичної форми узагальнених швидкостей з коефіцієнтами – функціями узагальнених координат. Ця квадратична форма симетрична:

$a_{ij}=a_{ji}$ (i,j=1,…,n), (1.5.7)

що видно з виразу (1.5.5) (перестановка індексів i та j еквівалентна перестановці множників у (1.5.5) і не змінює результатів) та визначена як додатна (T≥0), що відповідає смислу кінетичної енергії та виразу (1.5.1).

Запишемо, для наочності, розгорнуту форму виразу для кінетичної енергії у випадках однієї, двох та трьох степенів вільності.

Одна степінь вільності. Не вказуючи індексу у єдиній узагальненій координаті q маємо:

$$T = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} \tag{1.5.8}$$

Як бачимо, форма цього виразу копіює звичайну форму кінетичної енергії з тією важливою різницею, що коефіцієнт, який відіграє роль маси, може бути змінним. Цей коефіцієнт a(q) прийнято називати приведеною масою.

Дві степені вільності:

$$T = \frac{1}{2}\left[a_{11}(q_1,q_2)\dot{q}_1^2 + 2a_{12}(q_1,q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}(q_1,q_2)\dot{q}_2^2\right] \tag{1.5.9}$$

Тут приведені подібні з однаковими коефіцієнтами $a_{12}=a_{21}$.

Три степені вільності. Знову приводячи подібні, отримуємо:

$$T = \frac{1}{2}\left[a_{11}(q_1,q_2,q_3)\dot{q}_1^2 + 2a_{12}(q_1,q_2,q_3)\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2a_{13}(q_1,q_2,q_3)\dot{q}_1\dot{q}_3 + \right. \tag{1.5.10}$$

$$\left. + a_{22}(q_1,q_2,q_3)\dot{q}_2^2 + 2a_{23}(q_1,q_2,q_3)\dot{q}_2\dot{q}_3 + a_{33}(q_1,q_2,q_3)\dot{q}_3^2\right]$$

Розглянемо деякі конкретні приклади складання функції Лагранжа.

Приклад 1. Одномірний осцилятор. Розглянемо простішу коливальну систему, зображену на рис. 1.5.1. Вантаж маси m приєднаний пружиною з жорсткістю C до нерухомої опори. Виберемо у якості єдиної узагальненої координати x зміщення вантажу з його положення рівноваги (яке відповідає недеформованому стану пружини). Тоді, із використанням відомих формул для кінетичної енергії точки і потенціальної енергії пружини, для функції Лагранжа маємо:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{Cx^2}{2} \qquad (1.5.11)$$

Приклад 2. Математичний маятник (рис. 1.5.2). Вантаж маси m підвішений на ниті, що не розтягується, довжини *l*. Вибираючи у якості єдиної узагальненої координати кут φ відхилення маятнику від вертикалі маємо: $v = l\dot{\varphi}$ та $T = mv^2/2 = ml^2\dot{\varphi}^2/2$. Для потенціальної енергії маємо, вважаючи нульовим рівнем нижнє положення вантажу:

$$\Pi = mgh; \quad h = l - l\cos\varphi; \quad \Pi = mgl(1-\cos\varphi) \qquad (1.5.12)$$

Остаточно маємо:

$$L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl(1-\cos\varphi) \qquad (1.5.13)$$

Приклад 3. Колесо з вантажем на ободі, що котиться без буксування по дорозі (рис. 1.5.3). Маса вантажу m, маса колеса m_1, радіус колеса R, момент інерції відносно центральної осі I.

Розглянемо дві, зовні не пов’язані між собою, величини – горизонтальне переміщення x_A центру колеса A відносно нерухомого початку відліку O на осі x та кут повороту колеса φ . При відсутності буксування точка K контакту колеса з дорогою має нульову швидкість (є миттєвим центром швидкостей); при цьому швидкість центру колеса та його кутова швидкість пов’язані співвідношенням:

$$v_A = \dot{x}_A = R\dot{\varphi} \qquad (1.5.14)$$

Інтегруючи (1.5.14) отримуємо, при вдалому виборі початку відліку O на осі x:

$$x_A = R\varphi \qquad (1.5.15)$$

Таким чином виявляється, що величини x_A та φ взаємопов'язані. З огляду на це будь яку з цих величин можна вибрати у якості єдиної узагальненої координаті, що однозначно визначає положення колеса на площині. Нехай це буде кут φ. Виразимо через цей кут усі необхідні величини.

Центр тяжіння колеса А рухається горизонтально; тому вага колеса не виконує роботи і її можна не враховувати. Вага вантажу М враховується також, як у випадку математичного маятника; відповідна потенціальна енергія буде:

$$\Pi = mgR(1-\cos\varphi) \qquad (1.5.16)$$

Кінетична енергія колеса складається з кінетичних енергій поступального та обертового рухів:

$$T_{кол.} = \frac{m_1 v_A^2}{2} + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{\left(m_1 R^2 + I\right)\dot{\varphi}^2}{2} \qquad (1.5.17)$$

Тут враховано співвідношення (1.5.14).

Обчислюючи кінетичну енергію вантажу:

$$T_{ван} = \frac{mv^2}{2} \qquad (1.5.18)$$

врахуємо, що вантаж бере участь у русі колеса, а цей рух можна розглядати як обертання навколо миттєвого центру швидкостей К. У відповідності до цього $v = |KM|\dot{\varphi}$. Згідно з теоремою косинусів $|KM| = R\sqrt{2(1-\cos\varphi)}$. У підсумку маємо:

$$T_{ван} = mR^2(1-\cos\varphi)\dot{\varphi}^2$$

Складаючи (1.5.17) та (1.5.19) отримуємо:

$$T = \frac{a(\varphi)\dot{\varphi}^2}{2} \qquad (1.5.20)$$

$$a(\varphi) = m_1 R^2 + I + 2mR^2(1-\cos\varphi)$$

Як бачимо, даний випадок демонструє приклад змінної приведеної маси. Це пов’язано з тим, що мірою інерції вантажу M для колеса, що котиться, є його момент інерції відносно точки K. Цей момент інерції пропорційний квадрату відстані $|KM|$, а вказана відстань змінюється у межах від 0 до 2R. Остаточний вираз для функції Лагранжа очевидний.

Приклад 4. Подвійний маятник (рис. 1.5.4). Використаємо, із допоміжними цілями, звичайні декартови координати x та y. Запишемо координати вантажів:

$$x_1 = l_1 \cos\varphi_1; \quad y_1 = l_1 \sin\varphi_1 \tag{1.5.21}$$

$$x_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2; \quad y_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2$$

Потенціальна енергія системи складається з потенціальних енергій двох вантажів: $П=П_1+П_2$, де:

$$П_1 = m_1 g(l_1 - x_1) = m_1 g l_1 (1-\cos\varphi_1) \tag{1.5.22}$$

$$П_2 = m_2 g(l_1 + l_2 - x_2) = m_2 g\left[l_1(1-\cos\varphi_1) + l_2(1-\cos\varphi_2)\right]$$

Остаточно:

$$П = (m_1 + m_2) g l_1 (1-\cos\varphi_1) + m_2 g l_2 (1-\cos\varphi_2) \tag{1.5.23}$$

Кінетична енергія:

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \tag{1.5.24}$$

Тут:

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2; \quad \dot{x}_1 = -l_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1; \quad \dot{y}_1 = l_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1; \quad v_1^2 = l_1^2\dot{\varphi}_1^2 \tag{1.5.25}$$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2; \quad \dot{x}_2 = -l_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 - l_2\dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2; \quad \dot{y}_2 = l_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 + l_2\dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2$$

$$v_2^2 = l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

У підсумку вираз для кінетичної енергії буде:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\left[l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right] \tag{1.5.26}$$

Функцію Лагранжа отримуємо як різність виразів (1.5.26) і (1.5.23).

1.6. Диференціальні рівняння Лагранжа II роду

Існують засоби безпосереднього застосування варіаційного принципу Гамільтона при рішенні задач, однак вони використовуються відносно рідко. Частіше використовується наслідок принципу Гамільтона – так звані диференціальні рівняння Лагранжа II роду (існують і рівняння Лагранжа I роду, однак ми їх вивчати не будемо).

Розглянемо виведення диференціальних рівнянь Лагранжа з варіаційного принципу Гамільтона. Нехай відома істинна траєкторія M_0M_1 руху точки, що зображує, у просторі конфігурацій (траєкторія 1 на рис. 1.6.1). Дамо усім узагальненим координатам $q_1,\dots,q_n$ нескінченно малі прирощення $\delta q_1,\dots,\delta q_n$, що відповідає переходу від істинної траєкторії до якоїсь іншої, нескінченно близької до істинної (траєкторія 2 на рис. 1.6.1). Обчислимо прирощення функції Лагранжа, викликане прирощеннями узагальнених координат. При цьому врахуємо, що функція Лагранжа є функція як координат, так і швидкостей:

$$L = L(q_1,\dots,q_n;\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n) \tag{1.6.1}$$

і тому треба враховувати не тільки прирощення координат, але й прирощення швидкостей: $\delta\dot{q}_1,\dots,\delta\dot{q}_n$. Ці прирощення швидкостей виникають як неминучий наслідок прирощення координат, оскільки рух по зміненій траєкторії повинен виконуватись за той же час $[t_0, t_1]$, що й рух по вихідній траєкторії, а це можливо тільки при зміні швидкостей.

Отже, обчислимо нескінченно мале прирощення функції 2n змінних (1.6.1) викликане нескінченно малими прирощеннями усіх змінних:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \tag{1.6.2}$$

Враховуючи рівність:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \tag{1.6.3}$$

маємо:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \tag{1.6.4}$$

У (1.6.3) та (1.6.4) використані рівності:

$$\frac{d}{dt}\delta q_i = \delta \dot{q}_i \quad (i = 1,...,n), \tag{1.6.5}$$

які припускають можливість перестановки операцій δ та d/dt. Насправді це вимагає доказу, але він тут опускається.

У відповідності до (1.6.4) вираз (1.6.2) приймає вид:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \tag{1.6.6}$$

Завдяки тому що дія по Гамільтону (1.4.1) для істинної траєкторії є екстремальною, її прирощення при переході до нескінченно близької траєкторії дорівнює нулю:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1}\delta L dt = 0 \tag{1.6.7}$$

Підставляючи у (1.6.7) вираз (1.6.6) отримуємо:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt + \int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i dt = 0 \tag{1.6.8}$$

Другий інтеграл у (1.6.8) буде:

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i dt = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Bigg|_{t_0}^{t_1} \tag{1.6.9}$$

Оскільки у (1.6.9) прирощення δq_i обчислюється у моменти часу t_0 та t_1, а у ці моменти усі траєкторії проходять через точки M_0 та M_1 відповідно, то вказані прирощення дорівнюють нулю і, отже, дорівнює нулю інтеграл (1.6.9). У результаті (1.6.8) приймає вид:

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\delta q_i\,dt=0 \qquad (1.6.10)$$

Вираз (1.6.10) може дорівнювати нулю при довільних і незалежних між собою величинах δq_i тільки у випадку одночасної рівності нулю усіх коефіцієнтів при цих величинах:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad (i=1,...,n) \qquad (1.6.11)$$

Рівняння (1.6.11) – це й є диференціальні рівняння Лагранжа II роду. Їх кількість дорівнює кількості степенів вільності системи. Розв'язуючи ці рівняння, необхідно знайти узагальнені координати як функції часу:

$$q_i=q_i(t) \quad (i=1,...,n) \qquad (1.6.12)$$

Вивчимо структуру рівнянь (1.6.11) декілька детальніше. Оскільки у функції Лагранжа L=T–П від узагальнених швидкостей $\dot q_i$ залежить тільки кінетична енергія T, то (1.6.11) можна переписати у виді:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial q_i}=0 \quad (i=1,...,n) \qquad (1.6.13)$$

або у виді:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i=1,...,n) \qquad (1.6.14)$$

Враховуючи (1.3.13), можна записати і ще один варіант цих рівнянь:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i \quad (i=1,...,n) \qquad (1.6.15)$$

У відповідності до (1.5.6) маємо:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(q_1,...,q_n)\dot q_j;\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\ddot q_j+\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_r}\dot q_r\right)\dot q_j \qquad (1.6.16)$$

Звідси видно, що рівняння Лагранжа є рівняннями другого порядку відносно шуканих функцій. Сумарний порядок системи рівнянь Лагранжа для матеріальної системи з n степенями вільності буде рівним 2n. Отже, при їх інтегруванні виникають 2n довільних постійних, для знаходження яких потрібні 2n додаткових умов. Наприклад, це можуть бути початкові значення узагальнених координат $q_{1,0},\ldots,q_{n,0}$ і швидкостей $\dot{q}_{1,0},\ldots,\dot{q}_{n,0}$, що задані у початковий момент часу t_0.

Побудуємо, для ілюстрації, рівняння Лагранжа для функцій Лагранжа, що наведені у попередньому параграфі.

Приклад 1. Треба скласти єдине рівняння:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (1.6.17)$$

У відповідності до (1.5.11) маємо:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -Cx \qquad (1.6.18)$$

У підсумку рівняння Лагранжа має вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0; \quad \omega^2 = \frac{C}{m} \qquad (1.6.19)$$

Це відоме рівняння гармонічних коливань. Його загальне рішення:

$$x = a\sin(\omega t + \alpha) \qquad (1.6.20)$$

містить дві довільні постійні: амплітуду a та початкову фазу α.

Приклад 2. Єдине рівняння Лагранжа має форму:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \qquad (1.6.21)$$

Використовуючи (1.5.13) знаходимо похідні:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi \qquad (1.6.22)$$

Рівняння Лагранжа має вид:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0; \quad \omega^2 = \frac{g}{l} \qquad (1.6.23)$$

Це рівняння значно складніше, ніж рівняння (1.6.19); його рішення не має виразу через елементарні функції. Але у випадку малих значень кута φ можна вважати, що $\sin\varphi \approx \varphi$ і рівняння (1.6.23) стане по формі таким само, як (1.6.19), тобто рівнянням гармонічних коливань.

Приклад 3. Використаємо тут форму (1.6.14) рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \qquad (1.6.24)$$

У відповідності до (1.5.16) та (1.5.20) буде:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = a(\varphi)\dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = a(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{da}{d\varphi}\dot{\varphi}^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}\frac{da}{d\varphi}\dot{\varphi}^2 \qquad (1.6.25)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgR\sin\varphi; \quad a(\varphi) = m_1R^2 + I + 2mR^2(1-\cos\varphi); \quad \frac{da}{d\varphi} = 2mR^2\sin\varphi$$

У результаті (1.6.24) приймає вид:

$$\left[m_1R^2 + I + 2mR^2(1-\cos\varphi)\right]\ddot{\varphi} + mR^2\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 + mgR\sin\varphi = 0 \qquad (1.6.26)$$

Методи дослідження подібних рівнянь високої складності будуть розглянуті нижче.

Приклад 4. Тут необхідно скласти два рівняння:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} \qquad (1.6.27)$$

Використовуючи (1.5.23) та (1.5.26) обчислюємо наступні похідні:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) \qquad (1.6.28)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1+m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) - m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)\sin(\varphi_1-\varphi_2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = -m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1-\varphi_2); \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = (m_1+m_2)gl_1\sin\varphi_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2\left[l_2^2\dot{\varphi}_2 + l_1l_2\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2\left[l_1^2\ddot{\varphi}_2 + l_1l_2\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2) - l_1l_2\dot{\varphi}_1(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1-\varphi_2); \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = m_2gl_2\sin\varphi_2$$

У підсумку отримуємо два рівняння:

$$(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_1-\varphi_2) + (m_1+m_2)gl_1\sin\varphi_1 = 0 \qquad (1.6.29)$$

$$m_2\left[l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_1^2 \ddot{\varphi}_2 - l_1 l_2 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right] + m_2 g l_2 \sin\varphi_2 = 0$$

Зрозуміло, рішення подібних рівнянь є ще більш складною задачею, ніж у попередніх випадках.

1.7. Фазова площина

Приклади диференціальних рівнянь Лагранжа, приведені в попередньому параграфі, показують, що в більшості випадків ці рівняння дуже складні і не піддаються рішенню аналітичними методами. Слід зазначити, що це особливість не власне рівнянь Лагранжа, а задач механіки. Рівняння Лагранжа саме дають один з найбільш простих описів цих задач, але самі по собі такі задачі дуже складні, що і відбивається на рівняннях руху.

Завдяки можливостям сучасних комп'ютерів останнім часом широке поширення одержали чисельні методи рішення диференціальних рівнянь. Варіанти застосування цих методів будуть розглянуті і тут, однак відразу треба відзначити, що всупереч широко існуючій думці ці методи зовсім не всесильні. Чисельні методи в кожному конкретному випадку дають тільки якесь часткове рішення, що задовольняє деяким початковим чи граничним умовам. У зв'язку з цим за допомогою чисельних методів важко одержувати якісні результати, що характеризують поводження системи в цілому і найчастіше більш важливі, ніж конкретні кількісні результати. Але навіть і в тих випадках, коли чисельні методи цілком придатні для рішення поставленої задачі, їхнє застосування може наражатися на труднощі, зв'язані з вибором параметрів чисельного інтегрування. Можна досить упевнено затверджувати, що одержати правильний чисельний результат на комп'ютері можна тільки тоді, коли він... заздалегідь відомий. Тобто заздалегідь досить добре відомі якісні характеристики досліджуваного процесу.

Усе це дозволяє зробити висновок про те, що аналітичні і чисельні методи аж ніяк не конкурують між собою, а взаємно доповнюють один одного. Аналітичний метод дозволяє виконати попередній аналіз і одержати якісні характеристики досліджуваної задачі; чисельний метод дозволяє довести рішення до конкретних результатів.

Розглянемо взаємодію аналітичних і чисельних методів на прикладі системи з однім степенем вільності. Функція Лагранжа подібної системи має вид:

$$L = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} - \Pi(q) \tag{1.7.1}$$

Складемо єдине рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{1.7.2}$$

Обчислюючи похідні:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = a(q)\dot{q}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = a(q)\ddot{q} + \frac{da}{dq}\dot{q}^2; \quad \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{1}{2}\frac{da}{dq}\dot{q}^2 - \frac{d\Pi}{dq} \tag{1.7.3}$$

одержуємо:

$$a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{da}{dq}(q)\dot{q}^2 + \frac{d\Pi}{dq}(q) = 0 \tag{1.7.4}$$

Це дуже складне нелінійне диференціальне рівняння; у загальному випадку воно піддається рішенню тільки чисельними методами. Однак перед тим, як застосовувати такі методи, трохи видозмінимо задачу. Метою рішення рівняння (1.7.4) є пошук функції:

$$q = q(t) \tag{1.7.5}$$

Поставимо замість цього задачу пошуку функції:

$$\dot{q} = \dot{q}(q) \tag{1.7.6}$$

Таким чином, замість пошуку залежності узагальненої координати від часу ми будемо розшукувати залежність узагальненої швидкості від узагальненої координати. Обчислимо похідну:

$$\ddot{q} = \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{d\dot{q}}{dq}\dot{q} \tag{1.7.7}$$

Тоді (1.7.4) приймає вид:

$$a(q)\frac{d\dot{q}}{dq}\dot{q}+\frac{1}{2}\frac{da}{dq}\dot{q}^2+\frac{d\Pi}{dq}=0 \qquad (1.7.8)$$

Це вже диференціальне рівняння першого порядку щодо шуканої функції (1.7.6). Воно легко інтегрується. Приводячи (1.7.8) до виду:

$$\frac{d}{dq}\left[\frac{a(q)\dot{q}^2}{2}+\Pi(q)\right]=0 \qquad (1.7.9)$$

одержуємо:

$$\frac{a(q)\dot{q}^2}{2}+\Pi(q)=E=\text{const}, \qquad (1.7.10)$$

тобто закон збереження енергії. Звідси:

$$\dot{q}=\pm\sqrt{\frac{2}{a(q)}\left[E-\Pi(q)\right]} \qquad (1.7.11)$$

Отже, рішення виду (1.7.6) знайдено. Проаналізуємо його докладніше. На рис. 1.7.1 (зверху) зображений приклад графіка потенціальної енергії. Там же зображений рівень повної енергії E. Очевидно, що потенціальна енергія не може бути більше повної (у (1.7.11) у цьому випадку виходить від'ємне підкореневе вираження). Тому рух системи можливий тільки в тих областях, де $\Pi(q)\le E$. На рис. 1.7.1 це або область $q\le q_1$, або $q_2\le q\le q_3$. У точках $q=q_1$, $q=q_2$, $q=q_3$, буде $E=\Pi(q)$ і узагальнена швидкість дорівнює нулю.

Розглянемо тепер нижній графік на рис. 1.7.1. Тут зображена площина $q, \dot{q}$, що називається фазовою площиною. Графіки на цій площині, проведені відповідно до (1.7.11) чи іншого способу, називаються фазовими кривими. Очевидно, що в даному випадку ці криві визначені або при $q \le q_1$, або при $q_2 \le q \le q_3$. Кожна фазова крива, проведена відповідно до (1.7.11), буде розташовуватися симетрично щодо осі q. Відповідні приклади фазових кривих зображені на рис. 1.7.1. Розглянемо їх докладніше. У випадку постійної приведеної маси a(q)=const графік фазової кривої очевидним образом взаємозалежний із графіком потенціальної енергії. Нехай, наприклад, рух починається з точки $q=q_2$. Маючи в цій точці нульову швидкість, система починає рухатися у бік зменшення потенційної енергії (тобто вправо) зі збільшенням швидкості. Перший максимум швидкості приходиться на перший мінімум потенційної енергії. Окіл мінімуму потенційної енергії називається потенціальною ямою. Наступний ріст потенційної енергії викликає зменшення швидкості. Мінімум швидкості досягається в точці максимуму потенційної енергії. Окіл такої точки називається потенціальним бар'єром. Потім відбувається спуск у нову потенціальну яму і ріст швидкості, а потім, зі збільшенням потенціальної енергії, зменшення швидкості аж до зупинки в точці $q=q_3$. Після цього рух продовжується в зворотну сторону, тобто з негативною швидкістю аж до зупинки в точці $q=q_2$ і т.д. Таким чином, рух на проміжку $q_2 \le q \le q_3$ носить коливальний характер, що відбито в замкнутій формі фазової кривої. Такий рух називається фінітним, тобто обмеженим.

На відміну від цього рух при $q \le q_1$ є необмеженим і тому називається інфінітним. При позитивній швидкості система наближається до точки зупинки q_1, після досягнення якої змінює знак швидкості і віддаляється вліво.

У випадку перемінної приведеної маси $a(q) \neq const$ однозначного зв'язку між графіком потенціальної енергії і фазової кривої вже ні, однак загальний характер руху між точками зупинки зберігається.

Розглянемо деякі важливі окремі випадки фазових кривих.

Приклад 1. Одномірний осцилятор. Відповідно до функції Лагранжа (1.5.11) маємо:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{cx^2}{2}=E=\mathrm{const} \qquad (1.7.12)$$

Перетворимо (1.7.12) до форми:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\dot{x}^2}{b^2}=1;\ a^2=\frac{2E}{c};\ b^2=\frac{2E}{m} \qquad (1.7.13)$$

Звідси видно, що графіками фазових кривих є еліпси різних розмірів, що залежать від рівня повної енергії E (рис. 1.7.2). Сукупність фазових кривих називається фазовим портретом. Фазовий портрет, зображений на рис. 1.7.2, називається фокусом. Він відповідає коливанням системи в потенціальній ямі параболічної форми. Ці коливання поблизу стану стійкої рівноваги характеризуються тим, що при невеликих відхиленнях від такого стану система намагається повернутися в нього.

Приклад 2. «Перевернемо» графік потенціальної енергії з приклада 1, одержуючи замість (1.7.12):

$$\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{cx^2}{2}=E=\mathrm{const} \qquad (1.7.14)$$

Розглянемо наступні три випадки:

1) E>0. Представимо (1.7.14) у виді:

$$\frac{\dot{x}^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1;\ a^2=\frac{2E}{c};\ b^2=\frac{2E}{m} \qquad (1.7.15)$$

Це сімейство гіпербол, що перетинають вісь $\dot{x}$ (рис. 1.7.3).

2) E<0. З (1.7.14) маємо:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{\dot{x}^2}{b^2}=1;\ a^2=-\frac{2E}{c};\ b^2=-\frac{2E}{m} \qquad (1.7.16)$$

Це сімейство гіпербол, що перетинають вісь x.

3) E=0. У цьому випадку з (1.7.14) одержуємо:

$$\dot{x}^2 = \frac{c}{m}x^2; \quad \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{c}{m}}x \qquad (1.7.17)$$

Це рівняння двох асимптот, що розділяють два зазначених вище сімейства гіпербол.

Підсумковий фазовий портрет називається сідлом. Він відповідає руху системи поблизу потенціального бар'єра, тобто поблизу стану нестійкої рівноваги.

При E>0 система, наближаючи до бар'єра чи ліворуч чи праворуч, долає його; при E<0 система не може подолати бар'єр і повертається назад.

При E=0 система може знаходитися в положенні x=0, що є положенням рівноваги, однак при будь-якому малому відхиленні від цього положення відбувається подальше видалення від нього, що і є критерієм нестійкості.

Приклад 3. Математичний маятник. Відповідно до вираження (1.5.12) графік потенціальної енергії маятника має вид, зображений на рис. 1.7.4. На ньому послідовно чергуються потенційні ями і бар'єри. Потенціальні ями відповідають нижньому вертикальному положенню маятника, бар'єри – верхньому. Насправді, відповідно до фізичного змісту, усі нижні положення еквівалентні між собою, як і усі верхні. Положення $\varphi=0$ еквівалентно положенням $\varphi=2\pi$, $\varphi=4\pi$, $\varphi=-2\pi$ і т.д. Положення $\varphi=\pi$ (маятник розташований вертикально вгору) еквівалентно положенням $\varphi=3\pi$, $\varphi=5\pi$, $\varphi=-\pi$ і т.д.

Побудуємо фазовий портрет маятника відповідно до (1.5.13), відкіля маємо:

$$\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1-\cos\varphi) = E; \quad \dot{\varphi} = \pm\sqrt{\frac{2}{ml^2}\left[E - mgl(1-\cos\varphi)\right]} \qquad (1.7.18)$$

При E=0 маятник може знаходитись тільки у вертикальному нижньому положенні, тобто в стійкому стані рівноваги. На рис. 1.7.4 йому відповідають значення $\varphi=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi,...$

При малих значеннях E>0 маятник робить невеликі коливання, яким на рис. 1.7.4 відповідають фокуси. З ростом E фазові криві деформуються, усе більш відхиляючись від еліптичної форми.

При E>2mg*l* маятник уже не коливається, а обертається в однім і тим же напрямку (або позитивному, або негативному), хоча, зрозуміло, з перемінною швидкістю, що зменшується при підйомі нагору і росте при спуску вниз.

Значення E=2mg*l* відповідає нестійкому верхньому положенню рівноваги маятника ($\varphi=\pm\pi, \pm 3\pi,...$). Знаходячись у цих положеннях, маятник може почати рухатися з однаковою ймовірністю або вправо, або вліво. Завдяки такому «роздвоєнню» його поводження відповідні точки називаються точками біфуркації (слово «бі» і переводиться як два).

Таким чином, на фазовому портреті маятника присутні і фокуси, і сідла, що відповідають стійким і нестійким положенням його рівноваги і руху між ними.

Через виразність фазового портрета, зображеного на рис. 1.7.4, його називають «котячими очима». Однак ці «очі» мають очевидний недолік. Однаковим фізичним станам маятника відповідає нескінченна кількість «очей». Цей недолік можна усунути, вирізавши з фазової площини одне «око», наприклад, розташоване на проміжку від $-\pi$ до π і склеївши його в циліндр, сполучаючи крайні точки. Отримана картина називається фазовим циліндром (рис. 1.7.5). Тепер при обертанні маятника точка, що зображує, на фазовому циліндрі обгинає його й однаковим фізичним станам маятника відповідають однакові точки на фазовому циліндрі.

1.8. Чисельне інтегрування рівнянь Лагранжа

Розглянутий у попередньому параграфі метод фазової площини подає велику інформацію про рух системи з одним степенем вільності, однак його не можна вважати всеосяжним. По-перше, залишається невирішеною задача пошуку функції q=q(t). По-друге, навіть якщо обмежитися пошуком залежності $\dot{q} = \dot{q}(q)$, то і це можливо порівняно просто тільки у випадку потенціальних сил. Наявність, наприклад, сил тертя вже не дозволяє так само просто проінтегрувати рівняння руху, як це вийшло з рівнянням (1.7.4).

Перепишемо це рівняння у формі:

$$a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{da}{dq}\dot{q}^2 = -\frac{d\Pi}{dq} = Q \tag{1.8.1}$$

Така форма запису нагадує другий закон Ньютона. У лівій частині знаходяться сили інерції, у правої – рушійні сили. Нехай до складу рушійних сил входить, крім потенціальних сил, сила тертя. Тоді вираження для правої частини можна записати у виді:

$$Q = -\frac{d\Pi}{dq} - \alpha\dot{q} \tag{1.8.2}$$

Тут врахована тільки сила тертя, пропорційна швидкості, але легко врахувати і будь-яку іншу залежність. Підставляючи (1.8.2) у (1.8.1), одержуємо:

$$a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{da}{dq}\dot{q}^2 + \frac{d\Pi}{dq} = -\alpha\dot{q} \tag{1.8.3}$$

Це нелінійне диференціальне рівняння вже неможливо вирішити аналітично, тому застосуємо для його рішення чисельний метод Рунге-Кутта. Однак даний метод орієнтований на рішення системи диференціальних рівнянь першого порядку, тому перепишемо (1.8.3) у формі:

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = \dot{q} \\ \dfrac{d\dot{q}}{dt} = -\dfrac{1}{a(q)}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{da}{dq}\dot{q}^2 + \dfrac{d\Pi}{dq} + \alpha\dot{q}\right) \end{cases} \tag{1.8.4}$$

Тепер ми маємо систему двох диференціальних рівнянь першого порядку щодо двох шуканих функцій:

$$q = q(t); \quad \dot{q} = \dot{q}(t) \tag{1.8.5}$$

Вирішуючи цю систему методом Рунге-Кутта з використанням початкових умов: при $t=t_0$ маємо $q=q_0$ і $\dot{q} = \dot{q}_0$ одержуємо відповідь у табличній формі (див. праворуч). Ця таблиця дає не тільки залежності виду (1.8.5), але і залежність $\dot{q} = \dot{q}(q)$, тобто фазову криву.

t_0	q_0	$\dot{q}_0$
t_1	q_1	$\dot{q}_1$
t_2	q_2	$\dot{q}_2$
t_3	q_3	$\dot{q}_3$
...	...	...

Розглянемо приклад застосування чисельного методу. Нехай маємо постійну приведену масу a(q)=1 і потенціальну енергію, задану формулою:

$\Pi=3q^4-64q^3+438q^2-1080q+1300$

Ця енергія побудована як інтеграл від узагальненої сили:

$Q=-12(q-2)(q-5)(q-9)$

У тих точках, у яких сила обертається в нуль, потенціальна енергія має екстремуми (рис. 1.8.1).

При чисельному інтегруванні диференціальних рівнянь важливу роль грає правильний вибір кроку інтегрування h. У даному випадку рішення цієї задачі можна полегшити в такий спосіб. Побудуємо фазову траєкторію для випадку відсутності тертя (α=0) застосувавши, як у попередньому параграфі, закон збереження енергії. Повну енергію обчислимо через початкові дані. Нехай при t_0=0 буде $q_0 = 0, \dot{q}_0 = 0$. Тоді E=П(0)=1300. Закону збереження енергії відповідає замкнута фазова крива.

Вирішуємо тепер рівняння (1.8.4 методом Рунге-Кутта при α =0 і знову будуємо ту ж фазову криву. Якщо крок чисельного інтегрування обраний занадто великим, то побудовані різними способами криві будуть істотно відрізнятися друг від друга. Зменшуємо, у режимі діалогу, крок доти, поки криві не співпадуть.

Такий «візуальний» метод

вибору кроку h дуже зручний при роботі із сучасними персональними комп'ютерами. Його безсумнівним достоїнством є простота, а також те, що вибір кроку робиться за інтегральним критерієм збігу точної і наближеної кривих, а не локально, як звичайно.

Обраний у такий спосіб крок можна використовувати і при $\alpha \neq 0$. На рис. 1.8.1 приведена фазова крива, що відповідає α=0.32. Вона має вид спіралі, поміщеної в замкнутий контур, що відповідає відсутності тертя. Спочатку в системи вистачає енергії переборювати потенціальний бар'єр, розташований між двома потенціальними ямами, але потім коливання загасають в одній з ям.

Цей же ефект видний і з графіків q=q(t) і $\dot{q} = \dot{q}(t)$, приведених на рис. 1.8.2. Спочатку графіки $\dot{q} = \dot{q}(t)$ мають характерні подвійні «горби», що відповідають проходженням системи через дві потенціальні ями; потім ці «горби» зникають. Система починає робити загасаючі коливання в околиці точки q=2.

Заздалегідь передбачити, у якій саме потенціальній ямі загаснуть коливання, неможливо. Незначна зміна значення коефіцієнта тертя з попереднього на α =0.33 приводить до загасань в іншій потенціальній ямі (рис 1.8.3, 1.8.4).

Подібний ефект сильної зміни кінцевих результатів при незначній зміні вихідних параметрів типовий для нелінійних систем. Особливо докладно подібні ситуації вивчаються в так називаній «теорії катастроф».

Для повноти викладу матеріалу приведемо тексти програм мовою програмування «Турбо Паскаль 7.0», за допомогою яких було виконано чисельне інтегрування в розглянутих випадках. Програми складені так, що їхня зміна для застосування до рішення інших задач не представляє труднощів. Не повинні виникати труднощі і при переході до більш сучасного засобів програмування у середі візуального програмування Delphi. Цьому сприяє блочна структура програм.

```
unit URK;
interface
type Fright=procedure(xe:extended;w:array of extended;n:integer;
   var z: array of extended);
procedure RK1ST(x:extended;y,w,z:array of extended;h:extended;
   F:Fright;n:integer;var xe:extended;var ye:array of extended);
implementation
procedure RK1ST;
var a: array [1..5] of extended;
k,j,n1: integer; h2: extended;
begin n1:=n-1; h2:=h/2;
   a[1]:=h2; a[2]:=h2; a[5]:=h2; a[3]:=h; a[4]:=h; xe:=x;
   for k:=0 to n1 do begin h2:=y[k]; ye[k]:=h2; w[k]:=h2 end;
   for j:=1 to 4 do
   begin F(xe,w,n,z); xe:=x+a[j];
      for k:=0 to n1 do
      begin w[k]:=y[k]+a[j]*z[k];
         ye[k]:=ye[k]+a[j+1]*z[k]/3
      end;
   end;
end;
end.

Unit InGra;
{Ініціація графіки}
Interface
Uses Graph;
Var gmx,gmy,dmx,dmy: Word;
Procedure InGR;
Implementation
Procedure InGR;
var gt,gm: Integer;
Begin
gt:=9;
gm:=2;
InitGraph(gt,gm,''); gmx:=GetMaxX; gmy:=GetMaxY;
```

```
   dmx:=(gmx+1) div 64; dmy:=(gmy+1) div 48
end;
end.

program risf;
uses urk,crt,graph,ingra;
var xg,yg: integer;
   q,qt,t,te: extended;
y,ye,w,z: array [0..1] of extended;
procedure F(xe: extended; w: array of extended; n: integer;
   var z: array of extended); far;
begin z[0]:=w[1];
      z[1]:=-12*(w[0]-2)*(w[0]-5)*(w[0]-9)-0.33*w[1];
end;
function P(q: extended): extended;
begin P:=(((3*q-64)*q+438)*q-1080)*q+1300;
end;
begin ingr;line(20,200,420,200);moveto(405,197);lineto(420,200);
   lineto(405,203);line(40,20,40,220);moveto(37,35);
   lineto(40,20);lineto(43,35);
   q:=-0.3;
   repeat
      xg:=round(40+q*360/12); yg:=round(200-P(q)/10);
      if q=-0.3 then moveto(xg,yg) else lineto(xg,yg);
      q:=q+0.1;
   until q>11.5;
   line(20,70,420,70);line(100,195,100,205);
   line(190,195,190,205);line(310,195,310,205);
   line(20,340,420,340);moveto(405,337);lineto(420,340);
   lineto(405,343);line(40,230,40,450);moveto(37,245);
   lineto(40,230); lineto(43,245);
   q:=-0.3;
   repeat qt:=1300-P(q);
      if qt<0 then qt:=0 else qt:=sqrt(2*qt);
      xg:=round(40+q*360/12); yg:=round(340-qt*2.5);
      if q=-0.3 then moveto(xg,yg) else lineto(xg,yg);
      q:=q+0.01
   until q>11.5;
   q:=-0.3;
   repeat qt:=1300-P(q);
      if qt<0 then qt:=0 else qt:=-sqrt(2*qt);
      xg:=round(40+q*360/12); yg:=round(340-qt*2.5);
      if q=-0.3 then moveto(xg,yg) else lineto(xg,yg);
      q:=q+0.01
   until q>11.5;
   t:=0; y[0]:=0; y[1]:=0;
   moveto(40,340);
   repeat RK1ST(t,y,w,z,0.001,F,2,te,ye);
      xg:=round(40+ye[0]*360/12); yg:=round(340-ye[1]*2.5);
      lineto(xg,yg);
      t:=te; y[0]:=ye[0]; y[1]:=ye[1]
   until te>4;
   readln; closegraph
```

```
end.

program rist;
uses urk,crt,graph,ingra;
var xg,yg: integer;
   q,qt,t,te: extended;
y,ye,w,z: array [0..1] of extended;
procedure F(xe: extended; w: array of extended; n: integer;
   var z: array of extended); far;
begin z[0]:=w[1];
      z[1]:=-12*(w[0]-2)*(w[0]-5)*(w[0]-9)-0.33*w[1];
end;
begin ingr;line(20,200,420,200);moveto(405,197);lineto(420,200);
   lineto(405,203);line(40,20,40,220);moveto(37,35);
   lineto(40,20);
   lineto(43,35); line(400,195,400,205); outtextxy(400,210,'4');
   t:=0; y[0]:=0; y[1]:=0;
   moveto(40,200);
   repeat RK1ST(t,y,w,z,0.001,F,2,te,ye);
      xg:=round(40+te*360/4); yg:=round(200-ye[0]*15);
      lineto(xg,yg);
      t:=te; y[0]:=ye[0]; y[1]:=ye[1]
   until te>4;
   line(40,230,40,460);moveto(37,245);lineto(40,230);
   lineto(43,245);
   line(20,350,420,350); moveto(405,347); lineto(420,350);
   lineto(405,353);
   line(35,65,45,65); outtextxy(25,65,'9');
   line(400,345,400,355); outtextxy(405,360,'4');
   setlinestyle(3,0,0); line(40,65,400,65); setlinestyle(0,0,0);
   t:=0; y[0]:=0; y[1]:=0;
   moveto(40,350);
   repeat RK1ST(t,y,w,z,0.001,F,2,te,ye);
      xg:=round(40+te*360/4); yg:=round(350-ye[1]*2);
      lineto(xg,yg);
      t:=te; y[0]:=ye[0]; y[1]:=ye[1]
   until te>4;
   line(35,250,45,250); outtextxy(15,250,'50');
   line(35,450,45,450); outtextxy(5,450,'-50');
   readln; closegraph
end.
```

У блоці unit URK описаний процедурний тип Fright, необхідний для завдання правих частин у довільних системах диференціальних рівнянь першого порядку. Аргументами процедури є: xe – незалежна перемінна; w – вектор шуканих функцій; z – вектор похідних від шуканих функцій.

Далі в тім же блоці описана власне процедура Рунге-Кутта RK1ST, розрахована на один крок інтегрування системи диференціальних рівнянь першого порядку. Параметри процедури наступні: x – початкове значення аргументу; y – вектор початкових значень шуканих функцій; w, z – допоміжні вектора того ж розміру, що і y; h – крок інтегрування; F – ідентифікатор процедури, за допомогою якої обчислюються праві частини рівнянь; n – кількість рівнянь; xe=x+h; ye – вектор значень шуканих функцій при значенні аргументу, рівній xe.

Розрахунки в цій процедурі виконуються для системи рівнянь:

$$y'_k = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (k = 1,2,\dots,n) \tag{1.8.8}$$

по формулах:

$$y'_{k,j} = f_k(x + a_{j-1}, w_{1,j-1}, w_{2,j-1}, \dots, w_{n,j-1}) \tag{1.8.9}$$

$$w_{k,j-1} = y_j + a_{j-1} y'_{k,j-1} \quad (j = 1,2,3,4)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{4} a_{j+1} y'_{k,j} \quad \left(a_0 = 0,\ a_1 = a_2 = a_5 = \frac{h}{2},\ a_3 = a_4 = h\right)$$

Блок InGra забезпечує необхідні дії по ініціалізації графіки (за допомогою виклику процедури InGr).

Програма risf побудувала графіки на рис. 1.8.3. У ній описується процедура F типу Fright, що обчислює праві частини рівнянь (1.8.4) у рамках приклада, що розглядається, а також функція P, що задає обчислення потенціальної енергії (1.8.6). Програма спочатку будує графік П=П(q), а потім графік $\dot q = \dot q(q)$. Останній будується за допомогою процедури RK1ST, причому організований цикл, у якому результати обчислень на черговому кроці стають початковими умовами для наступного кроку.

Програма rist побудована в такий же спосіб, як risf, але служить побудові графіків q=q(t) і $\dot q = \dot q(t)$.

1.9. Диференціальні рівняння Гамильтона

Матеріал, викладений у двох попередніх параграфах, показує не тільки достоїнства, але і недоліки диференціальних рівнянь Лагранжа. І метод фазової площини, і чисельне інтегрування рівнянь вимагають рівноправності узагальненої координати q і узагальненої швидкості $\dot{q}$. Тим часом, у випадку одного степеня вільності, рівняння Лагранжа – це одне диференціальне рівняння другого порядку щодо однієї шуканої функції q=q(t). Функції $\dot{q} = \dot{q}(t)$ і $\dot{q} = \dot{q}(q)$ приходиться вводити в розгляд штучними прийомами. Наприклад, для цілей чисельного інтегрування одне диференціальне рівняння (1.8.3) замінено на два рівняння (1.8.4) з явно несиметричною формою запису рівнянь.

Існують і важливі теоретичні питання, відповіді на який утруднені в рамках рівнянь Лагранжа.

У загальному випадку проблема полягає в тому, що для рівнянь Лагранжа полем дії є n-вимірний простір конфігурацій $q_1,\ldots,q_n$, у той час як для рішення теоретичних і практичних задач необхідно розглядати фазовий простір $q_1,...,q_n;\dot{q}_1,...,\dot{q}_n$ удвічі більшої розмірності. Той спосіб, яким вводився в розгляд такий простір вище (при n=1), незадовільний, зокрема, і тому, що незалежними перемінними є тільки узагальнені координати, а узагальнені швидкості визначаються однозначно як похідні за часом від узагальнених координат.

Гамильтон запропонував інший варіант диференціальних рівнянь руху, у якому усунуті всі зазначені недоліки. Замість узагальнених координат він запропонував використовувати так називані узагальнені імпульси:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1,...,n) \tag{1.9.1}$$

Зміст назви стає зрозумілим, якщо розглянути прямолінійний рух матеріальної точки уздовж прямої Ox, коли:

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}; \quad p = \frac{dT}{d\dot{x}} = m\dot{x} \ , \tag{1.9.2}$$

тобто узагальнений імпульс збігається зі звичайним імпульсом.

У загальному випадку, відповідно до (1.6.16), з (1.9.1) одержуємо:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_j = p_i \quad (i = 1,...,n) \tag{1.9.3}$$

Вирішуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь (1.9.3) знаходимо узагальнені швидкості як лінійні комбінації узагальнених імпульсів:

$$\dot{q}_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} p_k \quad (j = 1,...,n) \tag{1.9.4}$$

Підставляючи (1.9.4) у (1.5.6) одержуємо вираження для кінетичної енергії вже у виді квадратичної форми узагальнених імпульсів:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(q_1,...,q_n) p_i p_j \tag{1.9.5}$$

Виходячи з цього, будуємо функцію Гамильтона:

$$H = T + \Pi = H(q_1,...,q_n; p_1,...,p_n) \tag{1.9.6}$$

Це є вираження для повної енергії системи як функції узагальнених координат і узагальнених імпульсів.

Опускаючи відповідні викладення, що називаються перетвореннями Лежандра, приведемо остаточний результат. З використанням функції Гамильтона будуються 2n диференціальних рівнянь Гамильтона, що мають вид:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1,...,n) \tag{1.9.7}$$

Вирішуючи ці рівняння, необхідно знайти 2n шуканих функцій:

$$q_i = q_i(t), \; p_i = p_i(t) \quad (i = 1,...,n) \tag{1.9.8}$$

Відмінною рисою рівнянь Гамильтона є їхня зовнішня простота і симетричність. Завдяки цьому них називають канонічними.

Простір 2n вимірів $q_1,\ldots,q_n$; $p_1,\ldots,p_n$ називається фазовим простором. У цьому просторі усі величини рівноправні і незалежні між собою. Один з важливих наслідків цієї рівноправності полягає в збільшених можливостях заміни вихідних функцій на якісь інші, більш зручні для рішення рівнянь.

При введенні поняття узагальнених координат було підкреслено, що їх можна вибирати нескінченно великою кількістю способів. Практика показує, що найчастіше перехід до нових координат значно спрощує рівняння і полегшує рішення задач. Але зміна узагальнених координат приводить до однозначної зміни відповідних узагальнених швидкостей.

Рівняння Гамильтона дозволяють перетворювати не тільки узагальнені координати, але й узагальнені імпульси, що значно збільшує можливості як теоретичних досліджень, так і практичних додатків цих рівнянь.

У рамках викладених вище підходів важливо те, що мовою рівнянь Гамильтона найбільше природно вводиться поняття фазового простору (фазової площини при n=1). Крім того, рівняння Гамильтона, у силу своєї форми, дуже зручні для чисельного інтегрування.

Розглянемо, як приклад застосування рівнянь Гамильтона, задачу про котіння колеса з вантажем на ободу (приклад 3 з параграфа 1.5). Тут єдиною узагальненою координатою є кут повороту колеса φ. Відповідно до (1.5.20), знаходимо єдиний узагальнений імпульс:

$$p = \frac{dT}{d\dot{\varphi}} = a(\varphi)\dot{\varphi} \tag{1.9.9}$$

Величина p у даному випадку є кінетичним моментом колеса з вантажем щодо точки торкання колеса з дорогою (точки К на мал. 1.5.3).

З (1.9.9) одержуємо:

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{a(\varphi)} \tag{1.9.10}$$

Звідси:

$$T = \frac{a(\varphi)\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{p^2}{2a(\varphi)}; \quad a(\varphi) = m_1R^2 + I + 2mR^2(1 - \cos\varphi) \tag{1.9.11}$$

Функція Гамильтона буде (з урахуванням вираження для потенційної енергії (1.5.16)):

$$H = T + \Pi = \frac{p^2}{2a(\varphi)} + mgR(1 - \cos\varphi) \tag{1.9.12}$$

Звідси відразу одержуємо формулу для фазових кривих:

$$p = \pm\sqrt{2a(\varphi)\left[H - mgR(1 - \cos\varphi)\right]} \tag{1.9.13}$$

Фазовий портрет системи, побудований відповідно до цієї формули (при $m=1$, $m_1=1$, $R=1$, $I=1$) приведений на рис. 1.9.1. На тому же рисунку приведений і фазовий портрет на площині $\varphi,\dot{\varphi}$, який неважко було побудувати з використанням формули (1.9.10). Результати, приведені на рис. 1, нагадують фазовий портрет математичного маятника, але з помітними відмінностями, викликаними перемінною приведеною масою $a=a(\varphi)$, графік якої також приведений на рис. 1.9.1.

Перейдемо до побудови рівнянь Гамильтона; у даному випадку їхній буде два:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p};\quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \varphi} \tag{1.9.14}$$

Обчислюємо відповідні похідні:

$$\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{a(\varphi)};\quad \frac{da}{d\varphi}=2mR^2\sin\varphi \tag{1.9.15}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi}=-\frac{p^2}{2a^2(\varphi)}\frac{da}{d\varphi}+mgR\sin\varphi,$$

одержуючи:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{p}{a(\varphi)} \tag{1.9.16}$$

$$\frac{dp}{dt}=\left[\frac{Rp^2}{a^2(\varphi)}-g\right]mR\sin\varphi$$

Вирішуємо цю систему рівнянь Гамильтона методом Рунге-Кутта при наступних початкових умовах: при $t_0=0$ дані $\varphi_0=0.99\pi$, $p_0=0$. Це відповідає початку руху з нерухомого стану, у якому точковий вантаж є близьким до найвищого положення. Отримані залежності $\varphi=\varphi(t)$ і $p=p(t)$ зображені на рис. 1.9.2. Там же зображена і залежність $\dot{\varphi}=\dot{\varphi}(t)$, знайдена за допомогою (1.9.10).

На рис. 1.9.2 графіки зображені для двох періодів коливань колеса. Розгляд цього і попереднього рисунків дозволяє побачити характерні риси поводження колеса з вантажем на ободу. Особливо яскраво ці особливості виявляються при обраних початкових умовах Перебуваючи досить довго поблизу стану нестійкої рівноваги, колесо потім швидке розганяється і проходить стан з нижнім положенням вантажу з різким стрибком швидкості – ривком, після чого знову «зависає» поблизу стану з верхнім положенням вантажу. Такій різкій зміні швидкості сприяє значна зміна приведеної маси за час одного періоду коливань.

Відзначимо особливості зміни узагальненого імпульсу p. У той момент часу, коли кутова швидкість колеса досягає максимуму, на графіку для узагальненого імпульсу спостерігається «провал». Це зв'язано з тим, що узагальнений імпульс дорівнює добутку кутової швидкості і приведеної маси (1.9.9), а приведена маса в даний момент часу різко зменшується.

Висновки

Розглянуті в даній главі основні положення аналітичної механіки показують відносну простоту і високу ефективність її методів при рішенні задач динаміки складних систем. Особливо відзначимо, що аналітична механіка виявляється однаково придатною і для традиційних аналітичних методів рішення задач і для застосування сучасних чисельних методів.

Існує ще досить багато важливих питань, які варто розглянути в рамках аналітичної механіки, однак спочатку розглянемо немеханічні застосування теорії звичайних диференціальних рівнянь, після чого буде легше оцінити актуальність методів аналітичної механіки далеко за її первісними межами і стане ясним, які додаткові проблеми варто розглянути.