

# **Вибрация и динамическая устойчивость гидроагрегата.**

Тарасов В. Н.  
ООО «ДИАМЕХ 2000»

*В работе рассматриваются физические процессы, происходящие в гидрогенераторах с реактивной турбиной. Анализируются механизмы неустойчивости, вызывающие кавитацию и повышенную вибрацию. Рассчитано на широкий круг специалистов.*

Гидроэнергетика составляет весомую часть общей энергетической системы и относится к возобновляемым источникам энергии. Поэтому не удивительно, что в настоящее время происходит подъём общественного интереса к этой области техники. Надёжность работы гидроэнергетического оборудования в значительной степени определяется его вибрационным состоянием. Повышенная вибрация, являясь объективным показателем имеющихся дефектов, приводит к ускоренному износу и выходу из строя ответственных элементов и узлов.

Поскольку вибрационный сигнал это сумма сигналов от всех элементов и узлов механизма, в ряде случаев по анализу вибрации можно определить и качественные изменения состояния оборудования. Но в этом состоит и слабость такого анализа, поскольку выделить из вибрационного сигнала важные информативные компоненты – задача весьма непростая. Кроме хорошей аппаратуры, необходимо и понимание физических явлений, формирующих этот сигнал. Особенно это касается интерпретации гидромеханических процессов, происходящих при работе гидротурбины.

К сожалению, и до настоящего времени нет адекватного понимания этих процессов. Традиционно, объяснением многих непонятных эффектов была турбулентность и кавитация [Л. 3-8]. Гидротурбина в основном рассматривалась как статический объект, рассчитанный на обеспечение максимального КПД преобразования. В литературе очень мало работ, посвящённых динамическому поведению гидроагрегатов.

В данной работе сделана попытка ликвидировать этот пробел и выработать подход, позволяющий объяснить многие гидромеханические эффекты, сопровождающиеся повышенной вибрацией и кавитацией. [Л. 3]. А также объяснить некоторые явления, общепризнанного объяснения которым пока ещё нет. Поэтому некоторые положения можно считать дискуссионными.

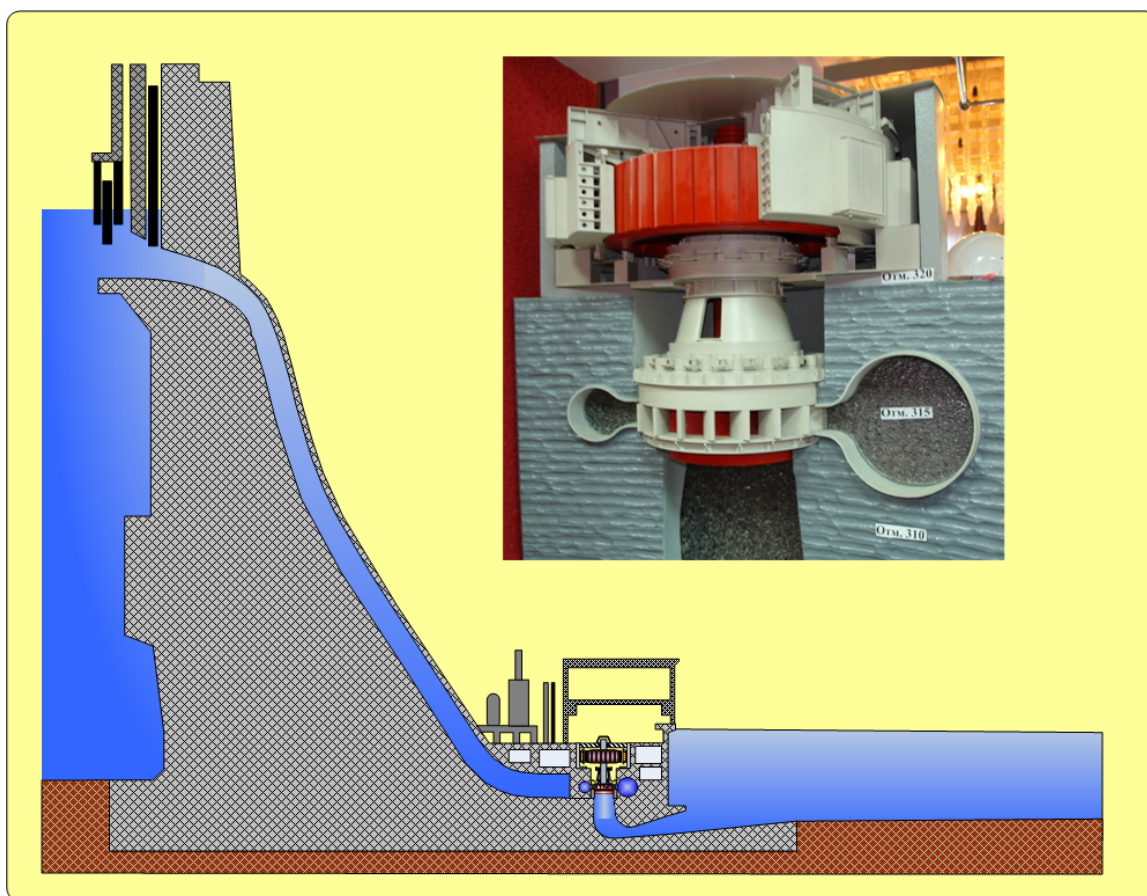
## **1. Принцип работы гидрогенератора. Электромеханическая модель агрегата.**

Гидроэлектрическая станция (ГЭС) состоит из гидротехнических сооружений, создающих концентрацию энергии воды и создание напора, и энергетического оборудования, преобразующего эту энергию в электроэнергию. Основное сооружение гидроэлектрической станции это плотина, создающая водохранилище и перепад уровней между верхним (ВБ) и нижним бьефом (НБ) и здание ГЭС, в котором размещаются гидравлические турбины, генераторы, электрическое и механическое оборудование.

Вода под действием силы тяжести движется по водоводу из верхнего бьефа в нижний, вращая рабочее колесо (РК) турбины. Преобразование энергии воды в гидротурбине происходит с высокой эффективностью. КПД современных гидротурбин составляет более 90% [Л. 4-5]. Гидротурбина и генератор, соединённые вместе образуют гидрогенератор или гидроагрегат (ГА).

Гидротурбины разделяются на два класса: активные и реактивные. В активной турбине преобразуется кинетическая энергия потока. В реактивной турбине на лопастях РК преобразуется как кинетическая, так и потенциальная энергия воды. Самым

распространённым на сегодняшний день типом ГА является, пожалуй, вертикальный агрегат с реактивной гидротурбиной (Рис.1).



*Рис.1 Общий вид гидроагрегата.*

Основными элементами, обеспечивающими работу такой гидротурбины являются: направляющий аппарат (НА) и спиральная камера (СК). НА служит одновременно, как для регулирования расхода воды через гидротурбину, так и для создания осесимметричного, закрученного потока воды. Вода поступает на лопатки НА из спиральной камеры, имеющей форму улитки, предварительно пройдя через каналы между колоннами статора. Поток воды после НА приобретает вихревое движение - циркуляцию и подобен водовороту. После воздействия на лопасти РК поток практически полностью теряет циркуляцию и направляется в отсасывающую трубу, необходимую для повышения КПД гидроагрегата. При её отсутствии кинетическая энергия потока после РК терялась бы безвозвратно. В расширяющейся отсасывающей трубе скорость потока уменьшается, а давление увеличивается. Кинетическая энергия потока преобразуется в потенциальную, которая используется самой турбиной.

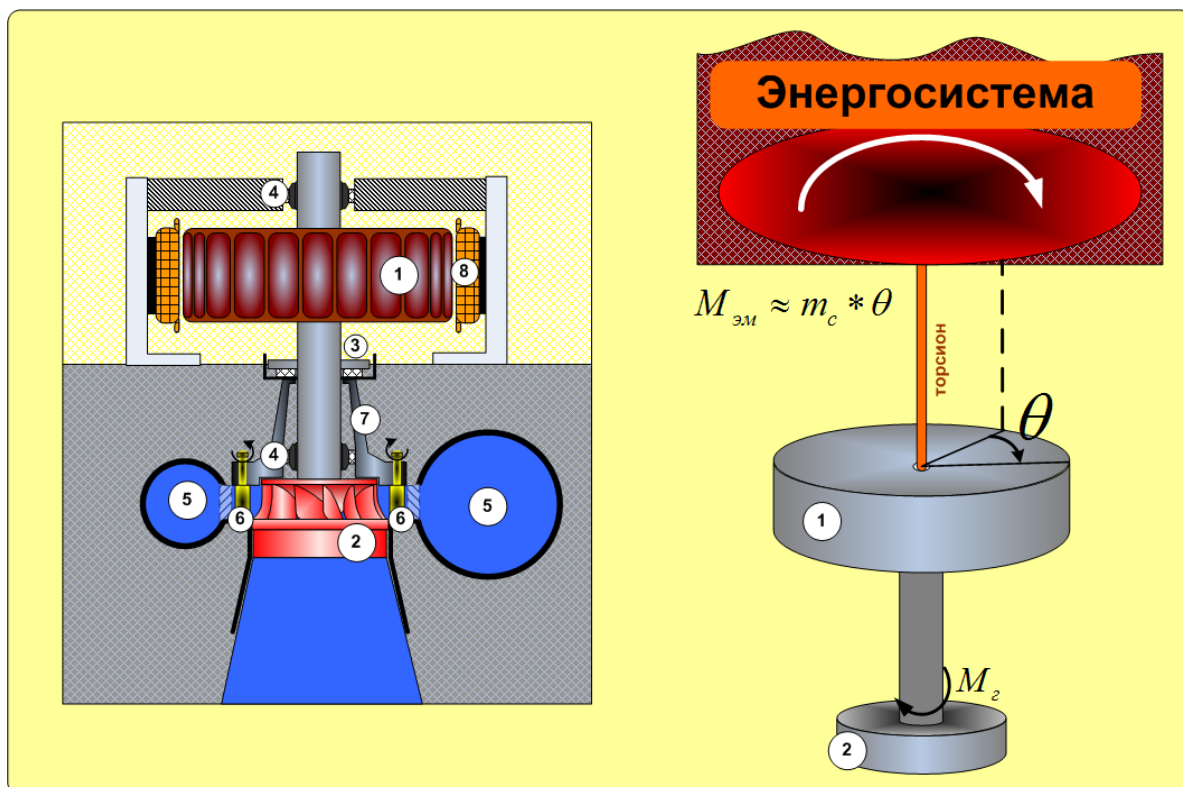
Напорный водовод - обычно труба постоянного сечения, которая служит для подачи воды в СК турбины. Диаметр трубы выбирают так, чтобы её гидравлическое сопротивление потоку составляло небольшую часть от общего сопротивления.

Главным элементом турбины является рабочее колесо, которое преобразует энергию потока в механическую энергию. Поэтому тип турбины определяется формой РК. В современной гидроэнергетике в основном применяют два типа реактивных гидротурбин: осевые и радиально-осевые.

Осевые турбины используются на ГЭС с перепадом высот до 60 м. Для повышения КПД лопасти таких турбин делают поворотными. Такие турбины называют поворотными или турбинами Каплана (по имени изобретателя).

Для напоров 50 - 500 м применяют турбины Френсиса. Лопасти таких турбин имеют сложную кривизну. Поэтому поток в проточной части движется по радиусу и по оси, и их называют радиально-осевыми (РО) турбинами. Самые мощные турбины, работающие при высоких напорах и расходах, это именно РО турбины.

Гидроагрегат (Рис. 2) содержит синхронный генератор и РК турбины (2), соединённых вместе жёстким, обычно полым разборным валом. Вес конструкции воспринимается подпятником (3). В радиальном направлении вал фиксируется 2-3 подшипниками (4). Нижний турбинный подшипник обычно резиновый с водяной смазкой, остальные подшипники и подпятник – масляные. Поток воды на РК поступает из спиральной камеры (5) и регулируется лопаткам направляющего аппарата (6). Гидравлический тракт перекрыт массивной крышкой турбины (7), на которой обычно расположен подпятник. Лопатки НА поворачиваются с помощью мощного гидропривода.



**Рис.2 Электромеханическая модель гидрогенератора.**

Синхронный генератор состоит из ротора (1), который представляет собой большой электромагнит, и обмоток статора (8). При вращении ротора вращается и создаваемое им магнитное поле, и в статоре вырабатывается электроэнергия. Поскольку частота вращения агрегата невелика, обычно 1-3 Гц, генератор содержит несколько пар полюсов. За один оборот ротора через любое сечение статора проходит  $k$  пар полюсов, поэтому частота напряжения и тока в обмотках статора увеличивается в  $k$  раз и составляет 50 Гц.

Уравнение вращения ротора агрегата:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_г + M_{эл} \quad (1)$$

где  $J$  - момент инерции ротора,  $\omega$  - частота вращения,  $M_{эл}$  - электрический момент,  $M_г$  - гидравлический момент.

При работе генератора в составе энергосистемы, в статоре течёт ток. Этот ток создаёт своё магнитное поле, которое тормозит вращение ротора. При этом возникает электромагнитный момент [Л. 14-15], который в трёхфазной машине равен:

$$M_{эм} \approx \frac{3U}{\omega} \frac{E_0}{x_{qd}} \cos \theta * \theta = m_c * \theta \quad (2)$$

$\theta$  - угол нагрузки между векторами ЭДС ( $E_0$ ) и напряжения ( $U$ ),  $x_{qd}$  - приведённое синхронное сопротивление,  $\omega$  - угловая частота,  $m_c \approx \frac{3U}{\omega} \frac{E_0}{x_{qd}} \cos \theta$  - удельный синхронизирующий момент.

Энергосистему можно представить, как огромный маховик, вращающийся с постоянной частотой. Гидрогенератор моделируется маховиком, состоящим из ротора генератора и РК. Механической моделью связи гидрогенератора с энергосистемой может служить упругий торсион, с крутильной жёсткостью  $m_c$ . Угол закрутки торсиона  $\theta$  определяет режим работы гидрогенератора. Если  $\theta > 0$  - электроэнергия вырабатывается (генераторный режим), если  $\theta < 0$  - потребляется (моторный режим).

В генераторе есть демпферная обмотка, уменьшающая крутильные колебания ротора относительно энергосистемы. Электромагнитный момент этой обмотки равен:

$$M_D = \frac{k3U^2}{\omega r_2'} S = \frac{3U^2}{\omega^2 r_2'} \frac{d\theta}{dt} = D \frac{d\theta}{dt} \quad (3)$$

$S$  - скольжение ротора,  $k$  - число пар полюсов,  $r_2'$  - приведённое сопротивление скольжения. Теперь уравнение движения ротора агрегата можно записать в виде:

$$\frac{J}{k} \frac{d^2\theta}{dt^2} + D \frac{d\theta}{dt} + m_c \theta = M_e \quad (4)$$

Это уравнение гармонического осциллятора с собственной частотой  $\omega_0 \approx \sqrt{\frac{m_c k}{J}}$  и

добротностью  $Q_k \approx \omega_0 \frac{J}{kD} = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{m_c J}{k}}$

При воздействии возмущающего момента, синхронная машина будет совершать затухающие колебания. Они называются синхронными качаниями. При этом качается угол  $\theta$ . Соответственно меняются электрический момент и мощность генератора. Частота синхронных качаний машины обычно находится в диапазоне 0,5 - 3 Гц.

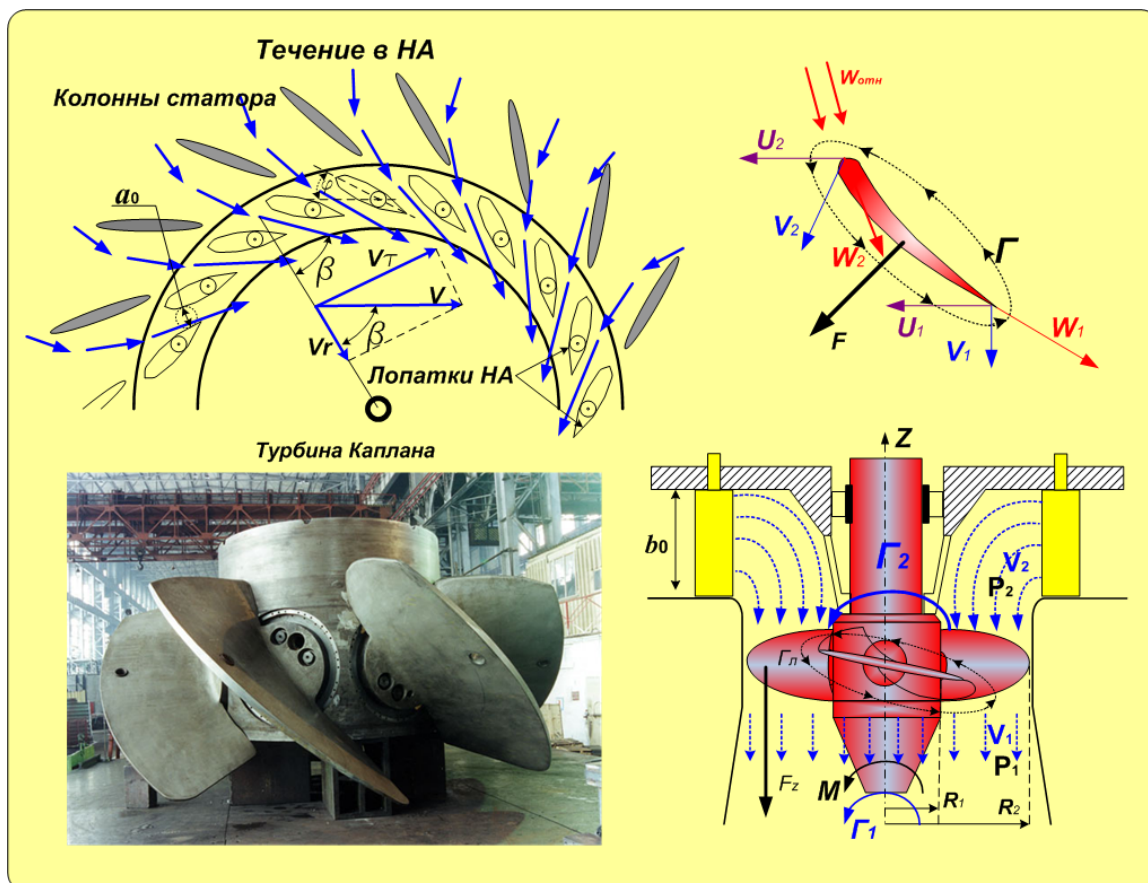
## 2. Течение в гидротурбине. Кавитационный жгут.

Вода поступает на лопасти РК, проходя между колоннами статора и лопатками НА. При этом поток воды приобретает вихревое движение – циркуляцию  $\Gamma = \oint \bar{V} \cdot d\bar{l} = \oint V_\tau \cdot dl_\tau$ . Как известно в идеальной жидкости циркуляция и момент импульса в свободном потоке сохраняется  $V_\tau * r - Const$ . Изменение момента импульса  $V_\tau * r$  частиц потока происходит на профильных элементах - колоннах, лопатках и лопастях. При этом около каждого профиля возникает своё вихревое движение, которое и изменяет интегральную циркуляцию. Определить направление скорости потока можно из кинематических соображений. При обтекании решётки профилей, скорость на выходе из решётки практически параллельна задним кромкам профилей.

В направляющем аппарате лопатки могут поворачиваться вокруг оси. При этом изменяется направление скорости потока на входе в РК и проходное сечение  $a_0$  между лопатками. Радиальная скорость потока  $V_r$  пропорциональна расходу через турбину, а тангенциальная  $V_t$  зависит от угла поворота лопаток. Изменяя угол поворота лопаток  $\varphi$ , мы изменяем угол вектора скорости  $\beta$  и циркуляцию потока на входе в РК.

$$\Gamma_2 = \frac{Q_v}{b_0} \operatorname{tg} \beta \quad (5)$$

$Q_v$  - объёмный расход через турбину,  $b_0$  - высота лопаток НА.



**Рис.3 Течение в осевой гидротурбине**

Проходя через лопасти РК, поток меняет величину и направление скорости. При обтекании каждой лопасти возникает гидродинамическая подъёмная сила перпендикулярная относительной скорости потока. Тангенциальная составляющая этой силы создаёт вращательный момент, осевая составляющая – осевую силу.

Определить величину вращательного момента можно из закона сохранения импульса и кинематических соображений. Рассмотрим для примера осевую турбину, РК которой напоминает воздушный винт самолёта. Форма лопастей турбина такова, что поток движется вдоль средней линии лопасти, а на выходе из РК направлен по касательной к ней, поэтому можно построить параллелограммы скоростей на передней и задней кромке лопасти (рис. 3). Абсолютная скорость потока на задней кромке лопасти  $V_1$  равна векторной сумме относительной скорости  $W_1$  (скорости потока относительно РК) и переносной скорости  $U_1$  (скорости вращения РК). Абсолютную скорость потока можно разложить на осевую  $V_z$  и тангенциальную составляющую  $V_t$ . Суммарный момент, действующий на лопасти РК, будет

равен изменению суммарного момента количества движения потока, происходящего при изменении тангенциальной скорости.

$$M_{ep} = \frac{\rho Q_v}{2\pi} (\Gamma_2 - \Gamma_1) \quad (6)$$

Это основное уравнения гидротурбины было получено Эйлером и носит его имя. Оно справедливо для всех типов лопастных гидромашин.

Согласно закону сохранения энергии механическая мощность турбины  $N_{.mex}$  равна:

$$N_{.mex} = \rho g H_{2-1} Q_v * \eta_z \quad (7)$$

$H_{2-1}$  - перепад напора (см. Приложение) на РК,  $\eta_z$  - гидравлический КПД турбины, поэтому

$$M_{ep} = \frac{\rho g H_{2-1} Q_v * \eta_z}{\omega} \quad (8)$$

$\omega$  - угловая скорость вращения.

Если вычислять подобным образом гидродинамическую осевую силу, можно придти к парадоксальному выводу. Допустим, циркуляция на входе равна нулю  $\Gamma_2 = 0$ . Поток раскручивает пропеллер и имеет на выходе циркуляцию  $\Gamma_1 = -2\pi M_{ep} / \rho Q_v$ , следовательно, у потока появляется тангенциальная скорость. Осевая скорость  $V_z$  сохраняется по закону сохранения расхода, следовательно, осевая сила равна нулю. Суммарная скорость потока после РК увеличивается  $V_1(r) = \sqrt{V_z^2 + (M / r \rho Q_v)^2}$ , получается «вечный двигатель». Ошибка заключается в том, что в реактивной турбине обязательно существует перепад давления ( $P_2 - P_1$ ), за счёт которого она и работает. Такую турбину раскручивает весь поток, и нужно учитывать изменение импульса и энергии всего гидравлического тракта. Осевая сила при этом будет равна  $F_z \approx \rho g H_{2-1} * \pi (R_2^2 - R_1^2)$  [Л. 4]. Поток действует на осевую турбину как на кольцевой поршень с площадью, равной площади вращающихся лопастей.

Получить эту формулу можно из теоремы Жуковского. Согласно теории, при обтекании профиля лопасти потоком жидкости, вокруг него возникает вихрь с циркуляцией  $\Gamma_l = (\Gamma_2 - \Gamma_1) / K_l$  ( $K_l$  - число лопастей). Систему лопастей можно заменить системой вихрей с циркуляцией  $\Gamma_l$ . В отличие от крыла самолёта, в реактивной турбине циркуляцию вокруг лопасти создаёт полный, а не только скоростной напор. При работе турбины в рабочем режиме  $\Gamma_1 \approx 0$ ;  $\eta_z \approx 1$ , поэтому  $\Gamma_l \approx 2\pi g H_{2-1} / (K \omega)$ , и  $W_{omh}(r) \approx \omega r$ . Сила, действующая на лопасть равна  $f \approx \rho \Gamma_l \int_{R1}^{R2} W_{omh}(r) dr$ . Проинтегрировав это выражение, получим:

$$F_z \approx \rho g H_{2-1} * S_l \quad (9)$$

$S_l$  - площадь кольца вращающихся лопастей.

Аналогично происходит обтекание РК турбины Френсиса. Разница заключается в том, что в верхней части РК поток направлен по радиусу. Поток движется, преодолевая центробежную силу, а вращающий момент создаётся за счёт силы Кориолиса. Нижняя часть РК работает как пропеллер. Формулы для определения момента и осевой силы будут верны и здесь. Нужно только в выражении для осевой силы брать площадь нижней «пропеллерной»

части РК. Эмпирически установлено [Л. 4], что осевая сила в РО турбине тоже равна  $F_z \approx k\rho g H_{2-1} S_{л}$ , где  $k$  зависит от геометрии турбины (коэффициента быстроходности РК)

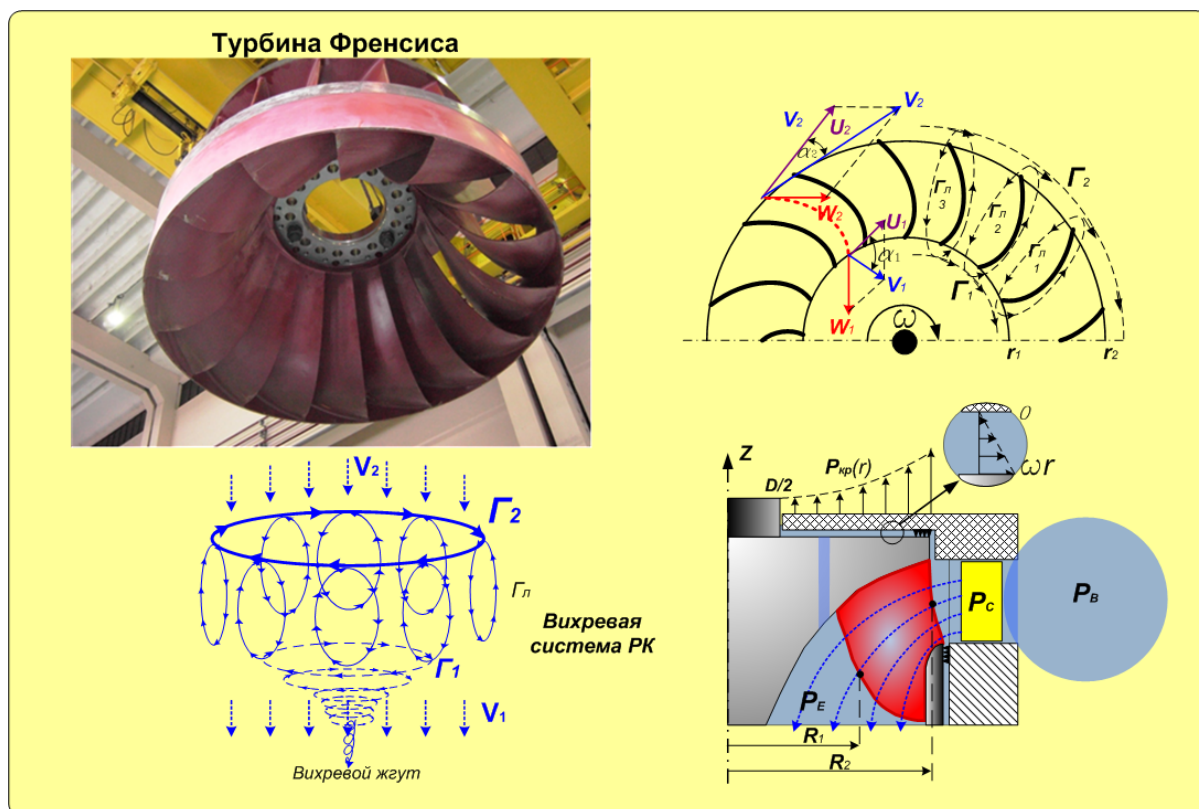


Рис.4 Течение в РО турбине.

В РО турбинах осевая сила создаётся ещё и давлением в зазоре между крышкой и РК. Верхняя часть РК работает как центробежный насос. Средняя скорость в зазоре примерно  $\omega * r / 2$ , поэтому под крышкой будет избыточное давление от набегающего потока. Поэтому в верхней части обода РК делают лабиринтные уплотнения, а в центре - разгрузочные отверстия. Ещё одна сила создаётся благодаря изменению направления движения потока  $F_z = k * \rho Q_v V_z$  [Л. 4]. Но обычно в быстроходных турбинах с неповреждёнными уплотнениями эти гидродинамические составляющие осевой силы невелики.

Нужно отметить, что обтекание лопасти гидротурбины имеет существенное отличие от обтекания крыла самолёта или лопасти вертолёта.

Обтекание крыла самолёта происходит в свободном пространстве. На него оказывает действие только поток воздуха в непосредственной близости от него. В гидротурбине поток замкнут. На РК создаётся перепад давления, на которое влияет весь столб воды в водоводе и отсасывающей трубе. Если где-нибудь в водоводе возникнут пульсации давления. Эти пульсации со скоростью звука передадутся на РК, вызывая пульсации осевой силы и вращательного момента. И наоборот, колебания РК вызывают пульсации давления в проточной части, которые со скоростью звука распространяются по водоводу и отсасывающей трубе. Поэтому можно сказать, что лопасти гидротурбины работают в режиме «замкнутого» обтекания.

Моделью РК может служить «активный поршень», состоящий из вращающихся лопастей. Он находится в трубе с потоком воды, тормозит этот поток и отбирает у него энергию. При этом как статические, так и динамические и нагрузки на поршень определяются его взаимодействием с водяным столбом. Например, изменение вращательного момента на гидротурбине очень быстро приведёт к изменению давлений по обеим сторонам «активного поршня», что приведёт к изменению осевой силы. Масштаб

времени этих процессов примерно равен времени прохождения волны сжатия-расширения по водоводу и отсасывающей трубе.  $\tau_1 \approx 2L/c$  Скорость такой волны определяется скоростью звука в воде и упругостью стенок водовода.

Реакция гидротурбины на изменение угла поворота лопаток НА, или лопастей РК более медленная. Поток в турбине должен перестроиться. Масштаб времени таких процессов примерно равен времени прохождения частичек воды по проточной части гидротурбины  $\tau_2 \approx l/u$ .

Самые медленные процессы это те, которые связаны с изменением расхода. Поток нужно перестроиться во всём гидравлическом тракте. Масштаб времени таких процессов  $\tau_3$ . Это время зависит как от инерции гидравлического тракта, так и от инерции ротора ГА.

Рассмотрим, например, какие динамические процессы будут происходить при работе гидроагрегата при малом повороте лопаток НА:

- ✓ Лопатка НА качнулась на закрытие.
- ✓ Изменился угол поворота лопатки  $\varphi$ , и возросла циркуляция на выходе из НА.
- ✓ Через время  $\tau_2 \approx l/u$  увеличился вращающий момент, действующий на РК, возросло противодействие турбины и по водоводу пошла волна сжатия.
- ✓ Возросла активная мощность. Ротор генератора начал увеличивать угол поворота  $\theta$  относительно энергосистемы.
- ✓ Через время  $\tau_1 \approx 2L/c$  возрос перепад давления на гидротурбине, перепад давления начал тормозить поток.
- ✓ Через время  $\tau_3$  поток затормозился, расход уменьшился, и всё вернулось к статической характеристике. Вращающий момент уменьшился, мощность уменьшилась.

При высоком КПД поток выходит из турбины практически незакрученным  $\Gamma_1 \approx 0$ . Однако при переходных процессах, нерасчётных режимах и прочих нештатных ситуациях в отсасывающей трубе образуется вихревой, или кавитационный жгут. Его появление связано с большой остаточной циркуляцией после РК. С подобными вихревыми структурами приходится достаточно часто встречаться в жизни. Их масштабы от маленькой воронки в раковине до гигантских тайфунов.

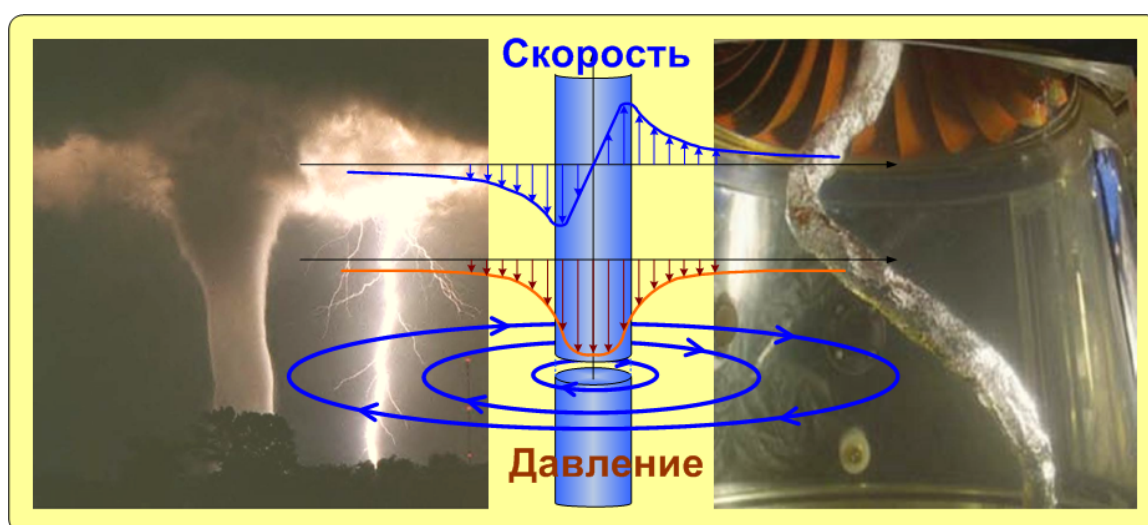


Рис.5 Вихревой жгут.

Поскольку, в свободном потоке циркуляция сохраняется  $V_\tau * r = Const$ , при приближении к центру жгута тангенциальная скорость потока увеличивается, а давление падает. В самом центре жгута градиент скорости увеличивается настолько, что начинает



сказываться трение. Поэтому центр или ядро вихря движется как твёрдое тело. В ядро вихря засасывается воздух и парогазовые пузырьки, образующиеся при работе турбины (рис. 5) и жгут становится видимым.

В нормальном режиме, при движении потока по расширяющейся отсасывающей трубе этот вихрь постепенно теряет свою интенсивность и выходит на поверхность НБ в виде антивоворота или «поганки». Если вихрь попадает в суживающееся течение, то происходит его усиление, за счёт работы внешней среды, преодолевающей центробежную силу. Примером тому может служить смерч или торнадо.

При достижении некоторой критической мощности, в вихре развивается гидродинамическая неустойчивость. Жгут может начать двигаться и прецессировать. Мощный вихрь уже представляет опасность для тех тел, которые встречаются на его пути.

Например, если лёгкий самолёт попадает в вихревой след аэробуса, на него обрушиваются огромные пульсации давления и скорости, что часто заканчивается катастрофой. На сам же аэробус этот вихрь влияния, практически, не оказывает.

То же происходит и в проточной части гидротурбины. Мощный вихревой жгут представляет опасность, например, для облицовки отсасывающей трубы и других элементов ниже по потоку. Но на течение в РК он почти не влияет. Кавитационный жгут едва ли может влиять на пульсации давления, вибрацию и кавитацию в гидротурбине, поскольку - он их следствие.

### 3. Динамическая устойчивость гидротурбины . Волновые эффекты.

Динамическая устойчивость - понятие сложное. Под ней обычно понимается способность объекта возвращаться к установившемуся режиму после воздействия возмущающих факторов. Теоретический анализ устойчивости динамической системы примерно производится по следующей схеме. В районе рабочей точки уравнения движения линеаризуются, а затем определяется реакция системы на малые возмущения. Если эти возмущения затухают – система устойчива. Если возмущения усиливаются – система неустойчива.

Применительно к гидротурбине это значит, что пульсации давления и скорости потока, а также другие возмущающие параметры, неизбежно возникающие при её работе, не должны существенно изменять характеристики турбины, и не приводить к значительному увеличению нагрузки на элементы конструкции. Отсюда понятно, что наличие в гидротурбине высокооборотных резонансов снижает её устойчивость. При этом могут возникать вынужденные колебания с большой амплитудой, а при наличии механизмов положительной обратной связи и автоколебания.

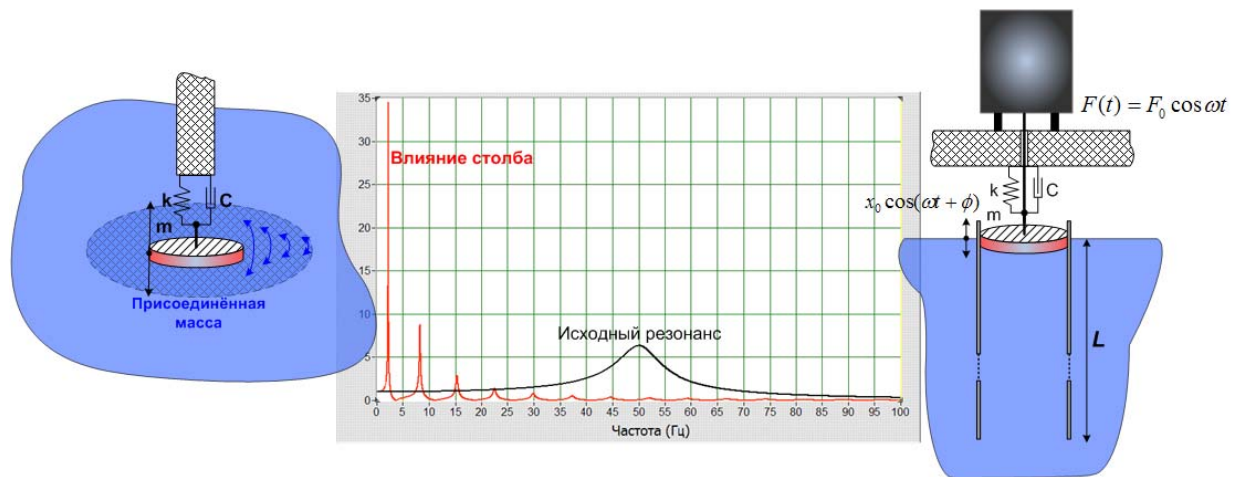
Исторически сложилось так, что расчёт и проектирование гидротурбины проводится, в основном, для статических режимов работы и базируются на характеристиках, получаемых при испытаниях его уменьшенной модели – копии. Такой подход позволяет описывать поведение гидроагрегата при стационарных и сравнительно медленных переходных процессах, происходящих при изменении режимов работы. Однако адекватно описать более быстрые вибрационные процессы в проточной части и проанализировать динамическую устойчивость такой подход не в состоянии.

Рассмотрим пример. Простейшей динамической моделью лопасти гидротурбины является колебательная система, состоящая из поршня, пружины и демпфера (рис 6). Поведение системы описывается уравнением гармонического осциллятора с затуханием:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{C}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{K}{m} x = \frac{1}{m} F(t) \quad (10)$$

Пусть диаметр поршня 1 метр. При массе поршня  $m=1000$  Кг, жёсткости пружины  $K=1.0 \cdot 10^8$  н/м и коэффициенте демпфирования  $C=5.0 \cdot 10^4$  н/(м/с) резонансная частота

системы в воздухе будет  $f_0 \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \approx 50$  Гц. Добротность  $Q_k \approx \sqrt{Km}/C \approx 6$ . При воздействии на поршень возмущающей силы  $F_0 \cos(2\pi ft)$ , он будет совершать вынужденные колебания  $x_0 \cos(2\pi ft + \phi)$  с амплитудой:  $x_0 \approx \frac{F_0}{K} * \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{f^2}{f_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q_k}\right)^2}}$ . Максимальная амплитуда колебаний при резонансе будет  $x'_0 \approx \frac{F_0}{K} * Q_k$ .



**Рис.6 Влияние присоединённой массы.**

Из этих выражений видно, что такая модель динамически устойчива. При воздействии периодической силы в 1 тонну (пульсация давления на поршень около 0.1 атм), вибрация составит около 0.1 мм. При резонансной частоте 50 Гц она возрастёт до 0.6 мм, и этот резонанс находится далеко от диапазона рабочих частот гидротурбины.

Если поместить поршень в воду резонансная частота уменьшается примерно до 30 Гц, но в целом поведение системы существенно не изменится. Понижение частоты происходит за счёт «присоединённой массы» воды, колеблющийся вместе с поршнем.

Если заключить поршень в жёсткую трубу, погружённую в воду, частотная характеристика системы будет принципиально иной. Передаточную функцию можно найти из соотношения:

$$F_0 \exp(i\omega t + \phi) = -m\omega^2 x_0 \exp i\omega t + i\omega C x_0 \exp i\omega t + K x_0 \exp i\omega t - i\alpha x_0 \exp i\omega t * SZ(\omega; L)$$

где  $i\alpha x_0 * SZ(\omega; L) \exp i\omega t$  - сила взаимодействия с водяным столбом (см. Приложение).

Частотная характеристика системы при  $L=100$  м и коэффициенте потерь  $\beta = 0.01$ , представлена на рис. 5. Вместо одного низкодобротного резонанса, мы получаем целый спектр. Этот эффект имеет волновую природу и связан со сжимаемостью воды. Как известно скорость звука в воде около 1500 м/с, и столб воды в трубе имеет ряд своих собственных резонансов и антирезонансов.

Самую высокую добротность  $Q_k \approx 35$  будет иметь первый резонанс. Его частота, в основном, определяется массой воды в трубе  $\omega_0 \approx \sqrt{\frac{K}{m + \rho LS}}$  и составляет около 3 Гц.

Приведённый расчёт показывает, что влияние столба воды снижает динамическую устойчивость модели. Например, при возмущениях реальных для проточной части

(пульсация давления 0.1 атм. на частоте 3 Гц) амплитуда перемещений поршня составила бы около 3,5 мм.

Если соединить поршень с мощным вибратором и начать возбуждать такие колебания, мы увидим, что на нижней поверхности поршня появляются и схлопываются кавитационные пузырьки. Разрежение под поршнем стало меньше давления насыщенных паров воды. Особенно много таких пузырьков будет в центре. Это связано с тем, что поршень начнёт прогибаться и самая большая амплитуда вибрации будет в центре диска. Если увеличивать амплитуду колебаний, пузырьки превратятся в каверны и начнут схлопываться с ощутимыми гидроударами. Если продолжать эксперимент, то через некоторое время на поверхности поршня и стенках трубы, граничащей с поршнем, появятся кавитационные разрушения.

Аналогичный эффект может происходить и при работе гидротурбины. Как показано выше, РК гидротурбины работает в режиме «замкнутого» обтекания. При вертикальных колебательных движениях, РК ведёт себя как поршень в трубе. Поэтому результаты расчётов и экспериментов, полученных в случае свободного обтекания [Л. 4,10], будут некорректны. Благодаря влиянию водяного столба в водоводе и отсасывающей трубе, у лопастей РК изменяются собственные формы колебаний. При достаточно большой длине столба первые низкочастотные формы могут попасть в зону рабочих частот гидротурбины. При этом гидротурбина может стать динамически неустойчивой. При резонансах будет происходить значительное повышение вибрации и все сопутствующие этому явлению эффекты.

Влияние водного столба приводит к изменению не только частот, но и форм собственных колебаний. При синфазных формах колебаний лопастей удельная нагрузка от присоединённой массы воды будет значительно выше, чем нагрузка от собственной массы и распределена примерно равномерно по площади. Поэтому динамический центр масс смещается, а прогиб относительно тонких участков увеличивается. Колебания принимают «более выпуклую» форму. Особенно сильно этот эффект должен проявляться в высоконапорных турбинах с длинными водоводами.

#### **4. Автоколебания в проточной части. Вибрационная кавитация.**

В отечественной и мировой гидроэнергетике накопилось достаточно много случаев, когда поломки гидротехнического оборудования сопровождались повышенной вибрацией и кавитацией. Традиционно, объяснением многих непонятных эффектов была неустойчивость турбулентного движения жидкости в проточной части турбины. Однако очень часто эти явления связаны с проблемами динамической устойчивости самой механической конструкции. Рассмотрим некоторые элементы гидротурбин, которые при определённых обстоятельствах, могут потерять устойчивость.

##### Неустойчивости лопаток направляющего аппарата.

Рассмотрим поведение лопатки НА. Уравнение движения лопатки:

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + C \frac{d\alpha}{dt} + K_0 \alpha = M_z + \tilde{M} \quad (11)$$

Где  $\alpha$  – угол атаки лопатки,  $J$  - момент инерции,  $C$  - вязкое трение,  $K_0$  – крутильная жёсткость крепления лопатки,  $M_z$  - постоянный гидравлический момент от потока воды,  $\tilde{M}$  - возмущающий момент от пульсаций потока.

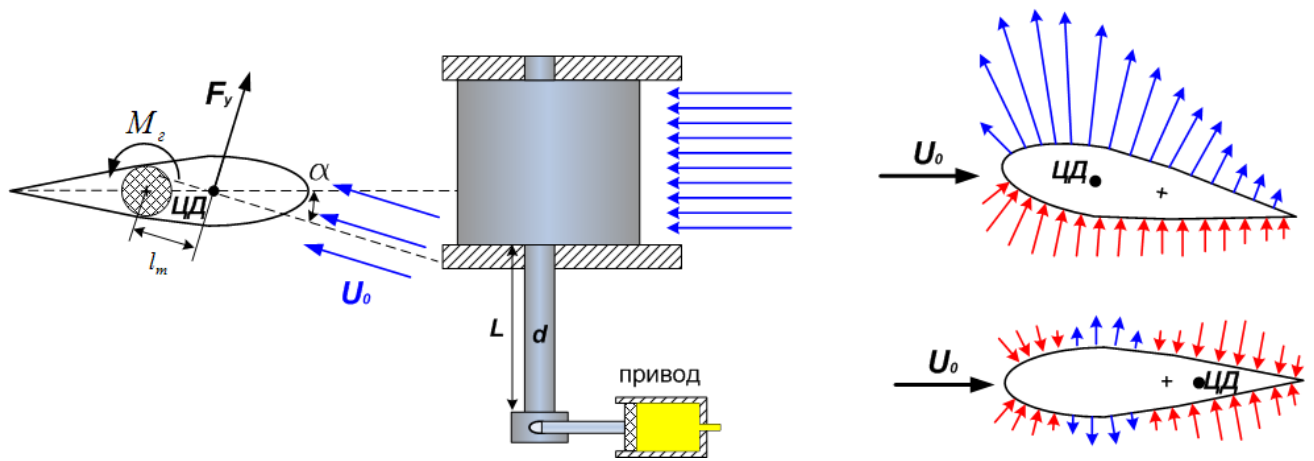


Рис.7 Обтекание лопаток НА..

Поскольку гидравлический момент равен силе, умноженной на расстояние от центра давления профиля до оси вращения, запишем  $M_z = C_y(\alpha) * l_m(\alpha) \frac{\rho u_\infty^2}{2} S_l$

где  $C_y(\alpha)$  - коэффициент подъёмной силы, а  $l_m(\alpha)$  - плечо силы.

НА сконструирован так, чтобы гидравлические силы действовали на закрытие лопаток. Поэтому ось вращения профиля лопатки размещена позади центра давления. Обозначив коэффициент гидравлического момента как  $M_z(\alpha) = C_y(\alpha) * l_m(\alpha)$  уравнение (2) можно написать в форме.

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + C \frac{d\alpha}{dt} + \frac{1}{J} \left( K_0 - \frac{\rho u_\infty^2}{2} * \frac{M_z(\alpha) S_l}{\alpha} \right) * \alpha = \tilde{M}(t) \quad (12)$$

При отсутствии потока это уравнение описывает гармонический осциллятор с собственной частотой  $\omega_0 \approx \sqrt{\frac{K_0}{J}}$  и добротностью -  $Q_k \approx \sqrt{K_0 J} / C$ . Крутильная жёсткость

лопатки достаточно высока  $K_0 = \frac{k_{мех} * k_{прив}}{k_{мех} + k_{прив}}$ , где  $k_{мех}$  - механическая жёсткость самой

лопатки, а  $k_{прив}$  - жёсткость привода. При отсутствии потока лопатка устойчива, Однако при обтекании, возникают гидродинамические силы, уменьшающие крутильную жёсткость

$K' = K_0 - \frac{\rho u_\infty^2}{2} * \frac{dM_z(\alpha)}{d\alpha} S_l$ . Эти силы возрастают пропорционально скоростному напору

потока  $\frac{\rho u^2}{2}$  или квадрату расхода, поэтому резонансная частота колебаний лопаток уменьшается, а добротность увеличивается. Особенно неприятно этот эффект может проявиться при проблемах в приводе НА.

Поскольку расход через турбину пропорционален открытию лопаток, при некотором критическом открытии НА, поведение лопаток может стать неустойчивым. Небольшие пульсации потока, будут вызывать их значительные отклонения.

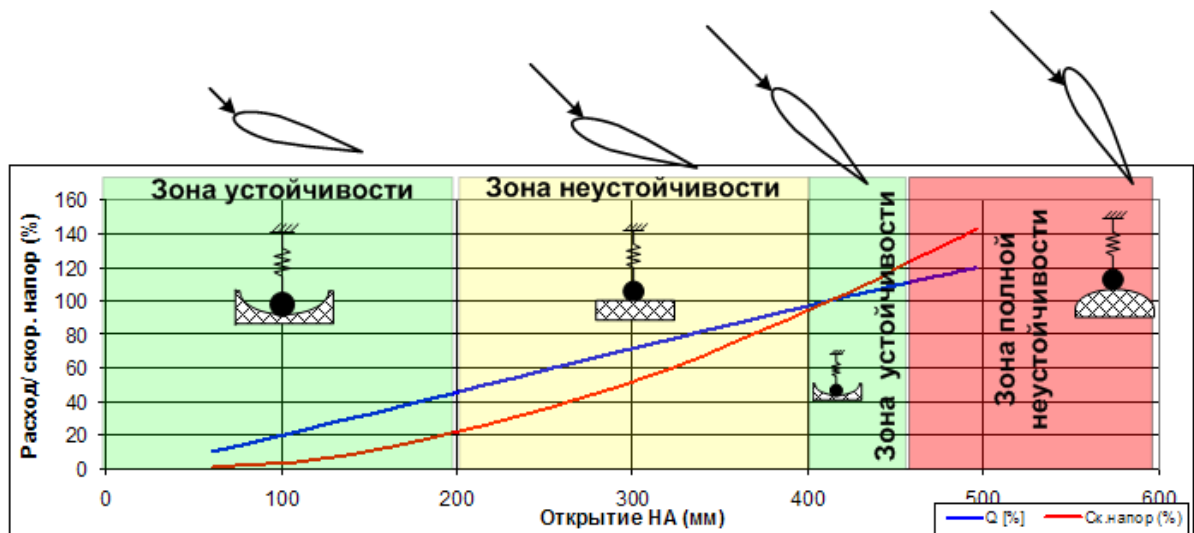


Рис.8 Зоны неустойчивости НА.

При дальнейшем открытии НА, появляется небольшая зона временной устойчивости. Её существование связано с тем, что при малой подъемной силе, центр давления и фокус профиля\*\* смещается к задней кромке [Л. 9]. Для симметричных профилей, зона временной устойчивости находится в районе нулевых углов атаки (т.е. примерно при параллельном положении лопаток и потока после колонн статора). При этом, положительная обратная связь исчезает, динамическая жёсткость лопаток увеличивается. Однако при дальнейшем открытии НА и выходе из этой зоны, динамическая жёсткость резко падает. При критической скорости потока, определяемой из соотношения  $\frac{\rho u^2}{2} * \frac{dM_z(\alpha)}{d\alpha} S_n \geq K_0$ , лопатки полностью теряет устойчивость. Они ведут себя просто как задемпфированная масса. При дальнейшем увеличении скоростного напора, возвращающая сила становится отрицательной. Лопатки не будут совершать самостоятельных автоколебаний, но способны усиливать возмущения потока.

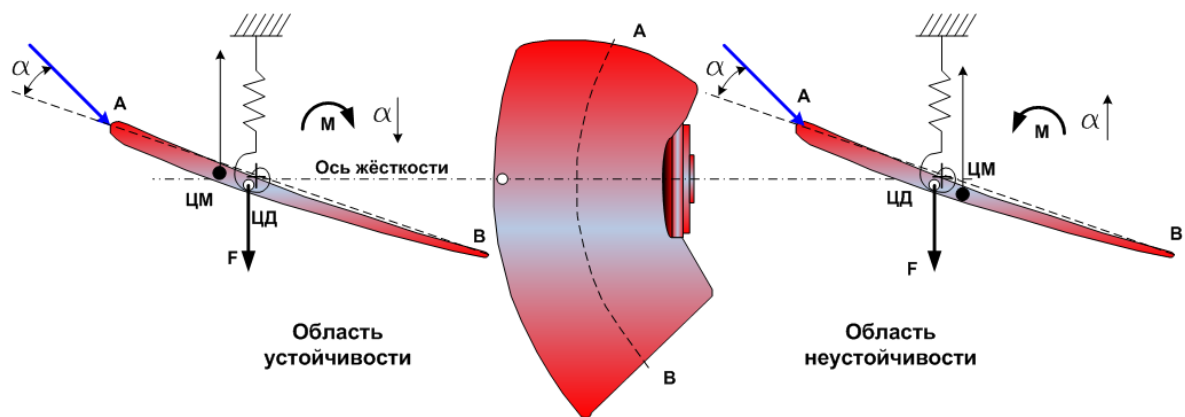
#### Неустойчивость лопастей рабочего колеса.

Несколько по-другому будут вести себя лопасти РК. Для первых, синфазных форм колебаний, лопасти РК эквивалентны поршню. Любые колебания этого поршня вызывают колебания всей массы воды в гидравлическом тракте и наоборот. Поэтому при анализе их колебательных движений в первом приближении, импеданс гидравлического тракта можно рассчитать по формуле (26). Для других форм колебаний явление сложней.

Рассмотрим синфазные колебания лопастей ПЛ турбины.

Лопать, закреплённая на шарнире - это колебательная система с двумя степенями свободы. Она может совершать изгибные и крутильные колебания. При отсутствии гидродинамических сил эти колебания независимы и описываются уравнениями типа (10-11). При обтекании между изгибными и крутильными колебаниями появляется связь. При маховых движениях лопасти появляется вращательный момент. Этот момент вызывает кручение лопасти и изменение угла атаки, которое вызывает дополнительную подъемную силу. При положительной обратной связи между этими колебаниями могут возникнуть совместные изгибно-крутильные автоколебания – флаттер.

Рассмотрим маховое и крутильное движение относительно шарнира лопасти. Вдоль лопасти проведём ось жёсткости, вокруг которой происходит кручение. Эта ось примерно совпадает с осью шарнира. Рассмотрим среднее сечение лопасти (рис.9)



**Рис.9 Условие устойчивости лопасти.**

В сечении выделим три точки: Центр масс, центр давления и центр жёсткости. Как известно из теории флаттера, движение будет устойчиво, если центр масс располагается впереди центра давления. При этом маховые движения создают вращательный момент, уменьшающий угол атаки. Поэтому случайные колебания затухают. Если центр масс сместить за центр давления, маховые движения будут создавать вращательный момент, увеличивающий угол атаки. При этом увеличивается подъёмная сила и маховые движения возрастают. Возникают автоколебания - флаттер.

В предыдущем разделе показано, что при колебании «активного поршня» на его поверхность будет действовать добавочное динамическое давление от присоединённой массы столба воды в водоводе  $\rho LS$ . Причём эффект воздействия присоединённой массы будет распределен примерно равномерно по площади лопасти. Как правило, это явление должно сопровождаться смещением ЦМ к задней кромке. Такие эффекты могут происходить как в осевых, так и в РО турбинах.

В отличие от авиации, где возникновение флаттера часто приводит к уничтожению летательного аппарата, в гидродинамике есть естественный механизм, ограничивающий нарастание автоколебаний. Этот механизм – кавитация. При возникновении кавитации энергопотребление резко возрастает и дальнейшего увеличения вибрации уже не происходит.

Считается, что основной причиной кавитационной эрозии являются турбулентные пульсации потока [Л. 4-8,13]. При обтекании лопасти образуются зоны пониженного давления. Если давление ниже давления насыщенного пара, жидкость начинает вскипать и в этих зонах образуются пузырьки, заполненные паром. Поток они сносятся в зону повышенного давления и там, под воздействием турбулентных пульсаций, схлопываются на поверхности лопасти. После схлопывания жидкость по инерции движется к поверхности и возникает микрогидроудар с колоссальным давлением, разрушающим металл. В гидродинамической теории кавитационной эрозии есть несколько непонятных моментов:

- Как оторвавшиеся пузырьки могут оказаться обратно на поверхности лопасти. Ведь толщина пограничного слоя всё время увеличивается. Частицы внешнего потока могут вернуться на поверхность только в том случае, если есть сначала отрыв, а затем присоединение пограничного слоя. Здесь не тот случай.
- Почему возможно столь резкое схлопывание пузырька. Ведь в это движение вовлекается окружающая жидкость, обладающая инерцией. При огромных ускорениях, сопровождающих кавитационное схлопывание, в окружающей жидкости будет возникать большое отрицательное давление. Должны образовываться новые пузырьки, демпфирующие микрогидроудар.

- Почему образование раковин кавитационной эрозии не прекращает, а наоборот усиливает эрозию. Ведь в раковинах образуется застойные зоны. Микрогидроудары уже никак не смогут преодолеть несколько миллиметров водяной подушки.

Логичным объяснением этих явлений может быть только то, что пузырьки схлопываются там же где и появляются. Пульсации давления, необходимые для образования и схлопывания пузырьков, возникают при вибрации поверхности. При этом инерция жидкости, окружающей пузырёк, не мешает, а помогает.

Если принять, что такой механизм кавитации возможен, многое становится понятным. При образовании даже небольших повреждений поверхности, пузырьки, образующиеся при отрицательных давлениях, уже не так быстро сносятся потоком. Раковина прогрессирует. При достаточно глубоких повреждениях, на дне раковины образуется парогазовая прослойка, которая демпфирует удары. Рост раковины замедляется.

Если посмотреть на пятна кавитационных разрушений лопастей, приведённые в литературе [Л. 4-5,8]. То их расположение трудно связать с областями локального повышенного или пониженного давления. Скорее их расположение совпадает с местами пучностей собственных форм колебаний, или другими областями повышенной вибрации. При этом эрозия возникает на нижней поверхности, где давление меньше на величину напора. Многие мероприятия, прекращающие образование раковин, например наварка рёбер жёсткости около раковин, установка буртиков на краях лопастей ПЛ турбин и т.п., больше влияют не на изменение гидродинамических характеристик лопастей, а на изменение их колебательных характеристик.

Как известно причиной турбулентных пульсаций потока является неустойчивость течения жидкости. При некоторых критических параметрах потока, определяемых числом Рейнольдса, случайные волны возмущений в жидкости не затухают, а усиливаются. При этом происходит качественное изменение структуры потока. Из стационарного, ламинарного, поток переходит в турбулентное. Частицы жидкости более не текут по своим стабильным траекториям, линии тока меняются в пространстве и времени, поток стохастически пульсирует и перемешивается. Вполне вероятно, что в гидротурбине происходит уникальное, нигде более не встречающееся сочетание механизмов неустойчивости. Течение происходит не только при больших числах Рейнольдса, но и на податливой, вибрирующей поверхности. В условиях замкнутого объёма, содержащего длинные водоводы, которые могут служить резонаторами для волн возмущения. Серьёзная задача для большой науки.

Учитывая то, что на собственные формы колебания сильно влияет импеданс водяного столба, который сам зависит от скорости звука в отсасывающей трубе. Можно понять, почему впуск воздуха под РК часто уменьшает вибрацию и кавитацию в проточной части.

## **5. Механизмы неустойчивости мощных РО турбин.**

Как известно, многие РО турбины имеют зоны неустойчивой работы в диапазоне 30-70% от номинальной нагрузки. В этих диапазонах наблюдается кавитация, повышенная вибрация и снижение КПД [Л. 3,7,8]. Такие эффекты не происходят при модельных испытаниях. Напорная характеристика турбины всюду устойчива. На ней нет восходящих ветвей, способных вызвать явление типа помпажа. А у натуральных турбин в некоторых зонах появляются пульсации давления в проточной части, снижается КПД. Возникают кавитация и гидроудары. Наблюдается значительное качание мощности гидроагрегата. В результате этого неприятного явления уменьшается регулировочный диапазон, гидроагрегат не может выйти на проектную мощность. А иногда это приводит к поломкам и аварийным ситуациям.

Объяснить это явление можно с позиции волновой теории. Как известно у высоконапорных и средненапорных ГЭС, которые оснащаются такими турбинами, достаточно длинные водоводы. Потери на трение в таких водоводах малы. Добротность водовода, как колебательной системы, весьма велика и составляет несколько сотен. Поэтому в таких водоводах может существовать система стоячих волн. При определённых условиях эти волны могут возбуждаться при работе гидроагрегата, и накапливать большую энергию. А иногда в системе водовод – гидроагрегат могут возникать автоколебания. Рассмотрим механизм возбуждения таких колебаний.

Как уже рассматривалось выше, синхронный генератор в энергосистеме ведёт себя как гармонический осциллятор. В частотном диапазоне 0,5-3 Гц у него пологий низкодобротный резонанс. Это значит, что гидрогенератор очень чувствителен к колебаниям крутящего момента (пульсаций давления в водоводе) в этом частотном диапазоне. При этом колебания момента  $\tilde{M}_z = \frac{Q}{\omega} * \tilde{P}$ , согласно (4), будут приводить к колебаниям угла нагрузки между гидрогенератором и энергосистемой с амплитудой

$$\theta_0 \approx \frac{\tilde{M}_z}{D} \sqrt{\frac{J}{km_c}}$$

У длинного водовода наоборот – примерно в этом частотном диапазоне находится первый антирезонанс  $Z \approx \infty$ . Пучность давления и узел скорости (см. Приложение). Противодействие гидротурбины на частоте антирезонанса практически не оказывает никакого эффекта на колебания расхода в водоводе  $\tilde{Q}_v = \tilde{P}/(ZS) \approx 0$ . Поэтому в системе водовод – гидрогенератор - энергосистема возникает совместная форма собственных колебаний, частота которой определяется в основном водоводом  $f_0 \approx c/4L$ .

В этом смысле водовод похож на органную трубу или другой духовой инструмент [Л. 12]. Поэтому можно условно назвать эту форму колебаний «органным резонансом». Для возбуждения автоколебаний такой трубы необходим колебательный элемент, который регулирует подачу энергии в трубу и сам зависит от колебаний давления в этой трубе. В гидроагрегате в роли такого элемента может выступать направляющий аппарат.

Согласно закону сохранения момента, вращающий момент на РК равен вращающему моменту на статоре гидротурбины. Этот момент распределяется между колонными статора и лопатками НА  $M_{ep} \approx M_{статор} + M_{НА}$ . Следовательно, изменение угла положения лопаток НА, приводящее к изменению крутящего момента гидротурбины, вызывает примерно такое же изменения момента, действующего на сам НА  $\tilde{M}_{ep} + \tilde{M}_{НА} = 0$ .

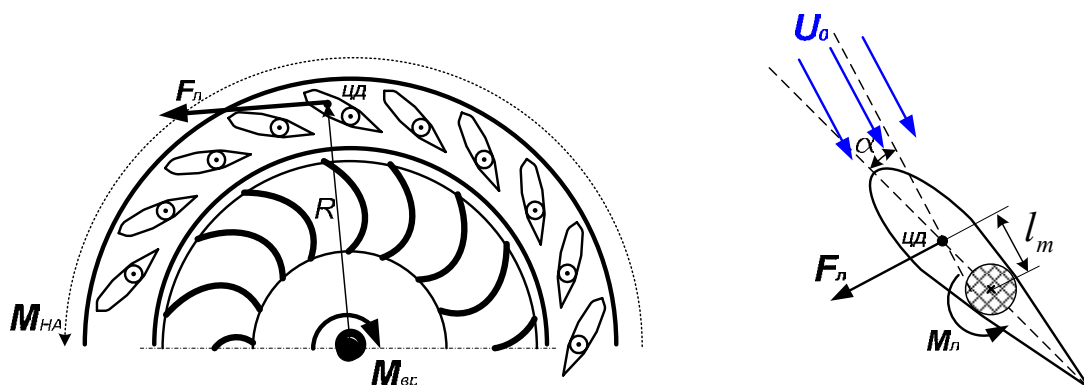


Рис.10 Механизм обратной связи.



Если лопатки случайно качнулись на закрытие на угол  $\tilde{\alpha}$ , циркуляция  $\Gamma_2$  возрастает, а скорость потока, вследствие инерции, остаётся прежней. Поэтому вращающий момент, действующий на РК, согласно (5) и (6) увеличивается  $\tilde{M} \approx \frac{\rho Q_v^2}{2\pi b_0} * \tilde{\alpha}$ , а на направляющий аппарат действует противоположный реактивный момент. Если ЦД лопатки расположен впереди оси вращения, на каждую лопатку действует добавочная сила, и вызывает момент на закрытие. При случайном качании на открытие происходит аналогичный эффект, и на лопатки подействует добавочный момент, действующий на открытие. Получается примерно как в органе – положительная обратная связь.

Но для возбуждения автоколебаний этого ещё не достаточно. Нужно чтобы выполнялись определённые амплитудные и фазовые соотношения между колебаниями лопаток и колебаниями вращательного и реактивного момента. Теоретический анализ этих эффектов весьма сложен. Можно сказать лишь то, что ликвидировать, или уменьшить, этот эффект можно повышением динамической жёсткости лопаток.

Механическая крутильная жёсткость лопаток, например турбины РО230/833, определяется в основном цапфой. Она оценивается величиной  $k_{мех} \approx \frac{\pi d^4 G}{32L} \approx 30 \text{ МН*м/рад}$  (при длине цапфы 2 м и диаметре 0,3 м). Это достаточно большая жёсткость. Добавочный гидравлический момент будет вызывать чрезвычайно малые угловые колебания лопатки. Оценить влияние привода, который может существенно снижать жёсткость лопаток, не просто. На него оказывают влияние много гидромеханических звеньев и электрогидравлическая система управления. Надёжно определить динамическую жёсткость можно экспериментально.

Если динамическая жёсткость недостаточна, возникают автоколебания. При этом происходят качание давления на входе в гидротурбину, вращательного момента, осевой нагрузки и качание лопаток НА. Благодаря этому происходит качание активной и реактивной мощности генератора. Возникает повышенная вибрация и кавитация. Эти качания передаются на другие агрегаты по электрическому и гидравлическому тракту.

Автоколебания усиливаются до тех пор, пока потери энергии на кавитацию и гидроудары в проточной части не сравняются с поступлениями энергии от основного потока воды. При этом амплитуда установившихся автоколебаний будет определяться потерями и нелинейными эффектами. Вследствие нелинейных взаимодействий начнут возбуждаться другие формы колебаний водовода.

Самые опасные формы колебаний – резонансные. В районе СК у них находится узел колебаний давления, поэтому их нелегко заметить. Их энергия, согласно (28), будет равна

$$E \approx \frac{S * L * \sum_i P_{0i}^2}{4\rho c^2 \beta^2} \quad \text{При СКЗ пульсаций давления резонансных колебаний всего 0.1 атм.}$$

энергия, накопленная ими в водоводе (L=240 и D=7.5 м.) более 20 Мдж. Если, раскачав такие колебания, закрывать НА, может произойти следующий эффект.

При закрытом НА, изменяются граничные условия в водоводе, поэтому эти резонансные колебания более не смогут существовать в виде собственных форм. Энергия начнёт выделяться в виде пульсаций давления. На закрывающиеся лопатки станут действовать очень мощные знакопеременные нагрузки. При этом может возникнуть цепная реакция. Не выдерживает привод, и аномальные колебания лопаток приводят к ещё большему усилению колебаний. Пока не наступит предел прочности.

## 6. Выводы.

Были рассмотрены физические процессы, происходящие в гидроагрегатах с реактивной турбиной. Проанализированы некоторые механизмы неустойчивости, способные вызывать повышенную вибрацию и кавитацию гидротурбин. Проведённый анализ показал, что:

- ✓ Существует ряд малоизученных процессов, снижающих динамическую устойчивость гидроагрегата.
- ✓ Благодаря этим процессам в гидроагрегате могут возникать автоколебания, сопровождающиеся сильной вибрацией и кавитацией.
- ✓ Некоторые механизмы неустойчивости можно объяснить только с помощью волновой теории, корректно учитывающей взаимодействие между водоводом, проточной частью турбины и отсасывающей трубой.
- ✓ В водоводах средненапорных и высоконапорных ГЭС может существовать система стоячих волн, обладающих большой энергией и существенно влияющих на работу гидротурбин.
- ✓ В ряде случаев, наличие зон неустойчивой работы у РО турбин вызвано возникновением автоколебаний в системе водовод – гидроагрегат. Эти автоколебания обусловлены волновыми эффектами и недостаточной динамической жёсткостью НА.
- ✓ Ликвидировать автоколебания и расширить рабочий диапазон мощности такого гидроагрегата можно путём модернизации НА.

Выводы, в основном, сделаны на основе теоретического анализа, требуют экспериментального подтверждения и подлежат дискуссионным обсуждениям.

## 7. Приложение.

Рассмотрим движение реальной сжимаемой жидкости в длинном трубопроводе, который соединён с большим резервуаром в сечении  $x = L$ . Жидкость из резервуара движется с постоянной скоростью  $U_0$ . При скоростях много меньших скорости звука, такое одномерное движение описывается уравнениями [Л. 14]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\lambda}{2d} U^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

Если в сечении  $x = 0$  действует гармоническое возмущение давления  $\tilde{P} = P_0 \exp(i\omega t)$ , то по трубопроводу будут распространяться волны возмущения давления и скорости  $\tilde{p}(x, t) : \tilde{u}(x, t)$ , причём возмущение давления на выходе из трубы  $\tilde{p}(L, t) = 0$ . Уравнения (21) можно линеаризовать и получить систему уравнений для возмущений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \alpha \tilde{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Где \*  $\alpha = \lambda U_0 / d = \frac{2\Delta P}{\rho U_0 L}$

Следуя общепринятой методике разделения переменных, будем искать решение в виде:  
 $\tilde{p} = p(x) \exp(i\omega t)$ ;  $\tilde{u} = u(x) \exp(i\omega t)$  и получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} (\alpha + i\omega)u(x) = -\frac{1}{\rho} \frac{dp(x)}{dx} \\ i\omega p(x) + \rho c^2 \frac{du(x)}{dx} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Продифференцировав первое уравнение по  $x$ , и подставив во второе, получим уравнение для давления:

$\frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{i\omega\alpha - \omega^2}{c^2} p$ , решением которого будет функция  $p(x) = A \operatorname{ch}(\gamma x) + B \operatorname{sh}(\gamma x)$ , где  $\gamma^2 = \frac{i\omega\alpha - \omega^2}{c^2}$ . Коэффициенты  $A$  и  $B$  ищутся из граничных условий  $p(0) = P_0$ ;  $p(L) = 0$ .

В результате получим решение:  $p(x) = P_0 [\operatorname{ch}(\gamma x) - \operatorname{cth}(\gamma L) * \operatorname{sh}(\gamma x)]$

При малых потерях напора в трубе ( $\alpha \approx 0$ ),  $\gamma \approx i\frac{\omega}{c} + \frac{\alpha}{2c}$ , гиперболические функции комплексного аргумента можно упростить

$$p(x) \approx P_0 [\cos(kx) - \operatorname{cth}(\gamma L) \sin(kx)] \approx P_0 [\cos(kx) - \frac{\operatorname{ctg}(kL) + i\beta}{1 - i\beta * \operatorname{ctg}(kL)} \sin(kx)] \quad (24)$$

Где  $\beta = \frac{g\Delta H}{cU_0}$  - коэффициент потерь ( $\Delta H$  - потеря напора в трубе при средней скорости потока  $U_0$ ), а  $k = \frac{\omega}{c}$  - волновой вектор. Функцию скорости получим из уравнений (23), подставив функцию давления (24)

$$u(x) = \frac{dp}{dx} \frac{-1}{\rho(\alpha + i\omega)} \approx \frac{iP_0}{c\rho} [\sin(kx) + \frac{\operatorname{ctg}(kL) + i\beta}{1 - i\beta * \operatorname{ctg}(kL)} \cos(kx)] \quad (25)$$

Удельный механический импеданс столба жидкости равен:

$$Z = \frac{p(0)}{u(0)} = i\rho c \frac{1 - i\beta * \operatorname{ctg}(kL)}{\operatorname{ctg}(kL) + i\beta} = i\rho c \frac{\operatorname{tg}(kL) - i\beta}{1 + i\beta \operatorname{tg}(kL)} \quad (26)$$

Выражения (4) – (5) можно записать как:

$$\begin{cases} p(x) \approx P_0 [\cos(kx) - \frac{i\rho c}{Z} \sin(kx)] \\ u(x) \approx \frac{iP_0}{c\rho} [\frac{i\rho c}{Z} \cos(kx) + \sin(kx)] \end{cases} \quad (27)$$

Рассмотрим физический смысл, полученных решений. На рис. 21 приведён график амплитуды и фазы функции  $\frac{Z}{i\rho c} = \frac{\operatorname{tg}(kL) - i\beta}{1 + i\beta \operatorname{tg}(kL)}$  в зависимости от частоты колебаний (для водовода длиной  $L=240$ м. с коэффициентом потерь  $\beta = 1/500$ ).

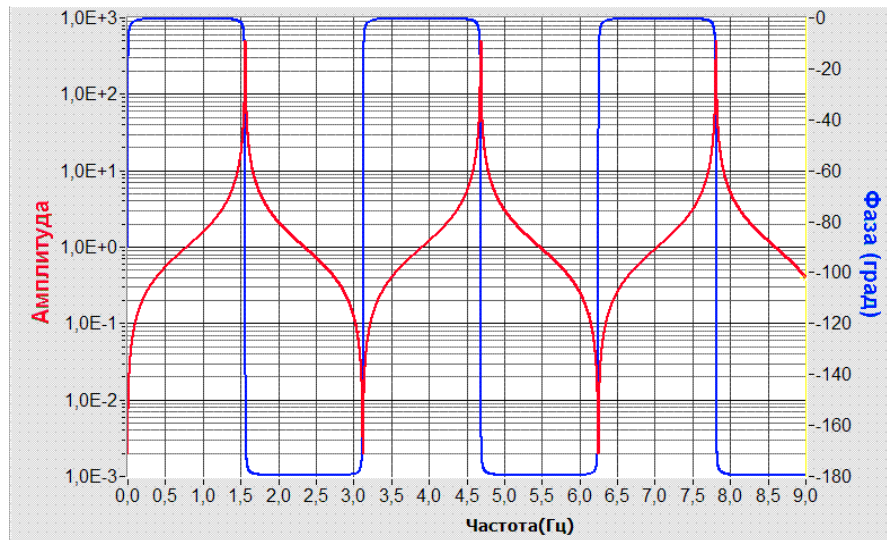


Рис.21 Функция импеданса.

При низких частотах удельный импеданс примерно равен  $Z \approx i\rho\omega L$ , столб жидкости ведёт себя как твёрдое тело массы  $M = \rho LS$ . При повышении частоты наблюдается ряд резонансов и антирезонансов. Это стоячие волны, соответствующие собственным формам колебаний столба жидкости. Амплитуды установившихся колебаний при этом зависят от потерь в трубопроводе. Формы колебаний в водоводе при резонансах и антирезонансах показаны на рис. 22.

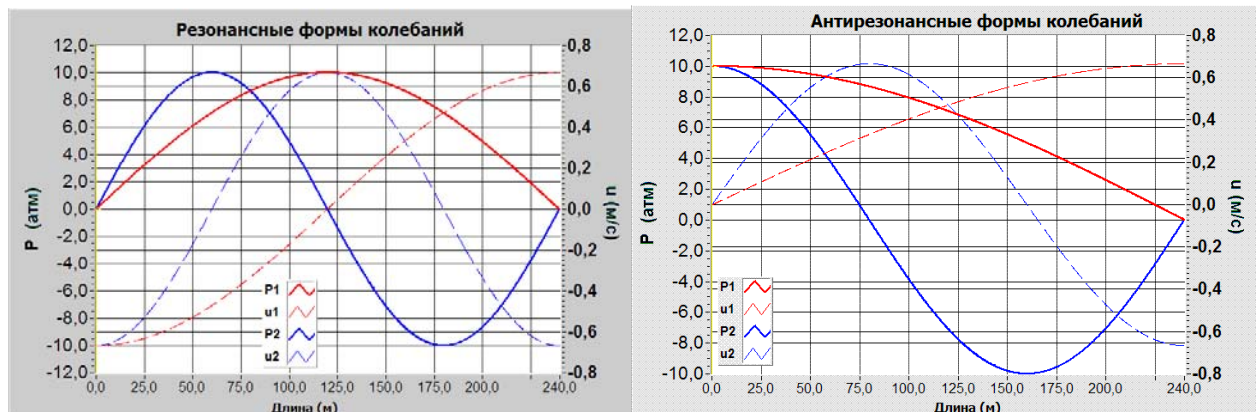


Рис.22 Собственные формы.

Антирезонансы ( $Z \rightarrow \infty$ ), возникают при условии  $tg(kL) = \infty$ , первый возникает при  $L = \lambda/4$  (четверти длины волны), остальные при  $L = \lambda/4 + N * \lambda/2$ . При антирезонансах в сечении  $x=0$  образуется пучности колебаний давления и узлы колебаний скорости. В сечении  $x=L$  наоборот, узлы давления и пучности скорости. Эти формы колебаний эффективно возбуждаются пульсациями давления.

Резонансы ( $Z \rightarrow 0$ ), возникают при условии  $tg(kL) = 0$ , первый резонанс возникает при  $L = \lambda/2$  (половине длины волны), остальные при  $L = \lambda/2 + N * \lambda/2$ . На концах трубопровода находятся узлы колебаний давления и пучности колебаний скорости. Давление внутри трубопровода при резонансе резко возрастает, амплитуда давления при этом обратно пропорциональна потерям  $\tilde{p} \approx p_0 / \beta$ . Эти формы колебаний эффективно возбуждаются пульсациями расхода.

Удельная энергия колебаний жидкости в трубопроводе равна  $E = T + \Pi$ . При гармонических колебаниях  $T \approx \Pi$ , поэтому  $E \approx \rho \bar{u}^2$ . Поскольку при резонансах

$\tilde{u} \approx \frac{P_{0i}}{\rho c \beta} \cos(kL) \exp(i\omega t)$ , а при антирезонансах  $\tilde{u} \approx \frac{P_{0j}}{\rho c} \cos(kL) \exp(i\omega t)$ , удельная энергия колебаний столба жидкости равна:

$$E \approx \frac{1}{4\rho c^2} \left( \frac{1}{\beta^2} \sum_i P_{0i}^2 + \sum_j P_{0j}^2 \right) \quad (28)$$

где  $P_{0i}$  - амплитуды давления резонансных, а  $P_{0j}$  - антирезонансных форм колебаний в сечении  $x=0$ .

Предыдущие формулы получены для открытой в сечении  $x=0$  трубы. Если труба закрыта, граничные условия будут другими:  $u(0) = 0$ ;  $p(L) = 0$ . В такой трубе могут существовать только колебания, имеющие в сечении  $x=0$  узлы скорости, а в сечении  $x=L$  узлы давления. Собственные колебания закрытой трубы возможны при условии  $tg(kL) = \infty$ , что соответствует антирезонансным колебаниям открытой трубы.

$$\begin{cases} p(x) \approx P_0 \cos(kx) \\ u(x) \approx \frac{iP_0}{c\rho} \sin(kx) \end{cases} \quad (29)$$

Резонансные формы колебаний открытой трубы здесь существовать не могут.

\* В гидроэнергетике удобно использовать гидравлическую форму [Л. 4] закона Бернулли:

$$H_c = Z + \frac{P}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} - Const \quad (30)$$

Где  $H_c$  - полный напор, физически означает полную удельную энергию потока.

$Z$  - геометрический напор,  $\frac{P}{\gamma}$  - пьезометрический напор ( $\gamma = \rho g$ ),  $Z + \frac{P}{\gamma}$  - физически означает удельную потенциальную энергию,  $\frac{u^2}{2g}$  - скоростной или динамический напор, физически означает удельную кинетическую энергию. ( $P$  - давление,  $u$  - скорость,  $\rho$  - плотность,  $g$  - ускорение свободного падения)

Потери удельной энергии потока учитывают в виде потери напора  $\Delta h_w$ . Обычно эти потери пропорциональны квадрату скорости  $\Delta h_w = \xi \frac{u^2}{2g}$ , где  $\xi$  - коэффициент местного сопротивления. Для длинной трубы  $\xi = \lambda \frac{L}{d}$ , где  $d$  - диаметр,  $L$  - длина трубы. Коэффициенты  $\xi$  и  $\lambda$  обычно определяются экспериментально.

\*\* центр давления и фокус немного разные вещи. Центр давления это точка приложения постоянной силы. Фокус - точка приложения прироста подъёмной силы.

## *Литература.*

1. Ландау Л. Д., Лившиц В. М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003.
3. Брызгалов В. И. Из опыта создания и освоения Красноярской и Саяно-Шушенской гидроэлектростанций. - Производственное издание.
4. Ковалёв Н. Н. Гидротурбины. - Л.: Машиностроение, 1971.
5. Кривченко Г. И. Гидравлические машины: Турбины и насосы. - М.: Энергия, 1978.
6. Кривченко Г. И. Гидромеханические переходные процессы в гидроэнергетических установках. - М.: Энергия, 1975.
7. Владиславлев Л. А. Вибрация гидроагрегатов гидроэлектрических станций. - М.: Энергия, 1972.
8. Штерн Е. П. Справочник по эксплуатации и ремонту гидротурбинного оборудования- М.: Энергоатомиздат, 1985.
9. Горлин С.М. Экспериментальная аэромеханика. – М.: Высш. шк, 1970.
10. Челомей В. Н. и др. Вибрации в технике. Т. 3 - М.: Машиностроение, 1980.
11. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. – М.: Наука, 1964.
12. Ф. Морз Колебание и звук. – Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949.
13. И. Пирсол Кавитация - М.: Мир, 1975.
14. Пилипенко В. В. И др. Кавитационные автоколебания и динамика гидросистем. - М.: Машиностроение, 1977.
15. Вольдек А. И. Электрические машины. - Л.: Энергия, 1978.
16. Копылов И.П. Электрические машины. - М.: Высш. шк, 2004.