Лекція 1. Методи обчислення визначників $n-го$ порядку

Для обчислення визначників $n-го$ порядку не існує загального метода. До визначників того чи іншого спеціального виду застосовують різні методи обчислення, які приводять до виразів більш простих, ніж безпосереднє обчислення визначника за визначенням.

1. *Метод приведення визначника до трикутного виду.*

Цей метод полягає у перетворенні визначника до такого вигляду, при якому всі елементи, що лежать по один бік однієї з діагоналей, дорівнюють нулю. У випадку побічної діагоналі шляхом зміни порядку рядків (або стовпців) на обернений зводиться до випадку головної діагоналі. Отриманий визначник дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

Приклад 1. Обчислити визначник порядку n

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Віднімемо перший рядок від усіх інших

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -I \\ -I \\ \\ -I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}.$$

Приклад 2. Обчислити визначник $D=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}.$

Віднімемо перший рядок від усіх інших

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ -I \\ -I \\ \\ -I \end{matrix}=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \dots & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x-a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n-x \end{vmatrix}=$$

$$=(a_1-x)(a_2-x)(a_3-x)\cdots(a_n-x)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \dots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}_{I+II+III+\dots+N}=$$

$$=(a_1-x)(a_2-x)(a_3-x)\cdots(a_n-x)\begin{vmatrix} 1+\frac{x}{a_1-x}+\frac{x}{a_2-x}+\frac{x}{a_3-x}+\dots+\frac{x}{a_n-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \dots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=(a_1-x)(a_2-x)(a_3-x)\cdots(a_n-x)\left(1+\frac{x}{a_1-x}+\frac{x}{a_2-x}+\frac{x}{a_3-x}+\dots+\frac{x}{a_n-x}\right).$$

Приклад 3. Обчислити визначник $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

Приклад 4. Обчислити визначник $D=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}$

2. Метод рекурентних співвідношень

Цей метод полягає в тому, що заданий визначник розкладають по елементам рядка або стовпця і виражають його через визначники такого ж виду, але нижчого порядку. Отриману рівність називають рекурентним співвідношенням. Цей метод використовується, наприклад, для визначників виду

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \beta & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & \alpha+\beta & \beta & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \beta & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & \alpha+\beta & \beta & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta)\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \beta & \dots & 0 \\ \alpha & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix} -$$

$$-\beta\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \dots & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

Отримали рекурентне співвідношення $D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$. Позначимо $\alpha+\beta = p$, $\alpha\beta = q$ і розглянемо відповідне характеристичне рівняння

$$x^2 - px + q = 0.$$

Якщо x_1, x_2 – корені характеристичного рівняння, тоді заданий визначник дорівнює $D_n = C_1(x_1)^n + C_2(x_2)^n$. Коефіцієнти C_1 і C_2 знайдемо з початкових умов $D_1 = \alpha$ і $D_2 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha \\ \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

Приклад 5. Обчислити визначник $D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot D_{n-1} - 3 \cdot 2 \cdot D_{n-2}$$

Отримали рекурентне співвідношення $D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$. Відповідне характеристичне рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$ має корені $x_1 = 3,\ x_2 = 2$. Загальний розв'язок має вигляд $D_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 2^n$. Щоб знайти C_1 і C_2 обчислимо $D_1 = |5| = 5$ і $D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 19$. Тоді отримаємо систему $\begin{cases} C_1 \cdot 3^1 - C_2 \cdot 2^1 = 5 \\ C_1 \cdot 3^2 - C_2 \cdot 2^2 = 19 \end{cases}$.

Розв'язком системи буде набір $C_1 = 3$ і $C_2 = -2$.

Отже, остаточно $D_n = 3 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

Приклад 6. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}0&1&1&\dots&1\\1&a_1&0&\dots&0\\1&0&a_2&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&0&0&\dots&a_n\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{n+1+1}\begin{vmatrix}1&1&\dots&1&1\\a_1&0&\dots&0&0\\0&a_2&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&a_{n-1}&0\end{vmatrix}+a_n\begin{vmatrix}0&1&1&\dots&1\\1&a_1&0&\dots&0\\1&0&a_2&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&0&0&\dots&a_{n-1}\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{n+2}\cdot 1\cdot(-1)^{1+n}\begin{vmatrix}a_1&0&\dots&0\\0&a_2&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&a_{n-1}\end{vmatrix}+a_nD_n=-a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_n(-a_1a_2\cdots a_{n-2}+a_{n-1}D_{n-1})=$$

$$=-a_1a_2\cdots a_{n-1}-a_1a_2\cdots a_{n-2}a_n-\dots-a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n.$$

3. Визначник Вандермонда.

Визначник Вандермонда має вигляд $D_n=\begin{vmatrix}1&1&\dots&1\\x_1&x_2&\dots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\dots&x_n^2\\\dots&\dots&\dots&\dots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\dots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}$. Обчислимо визначники для $n=2$ і $n=3$: $D_2=\begin{vmatrix}1&1\\x_1&x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1$,

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\x_1^2&x_2^2&x_3^2\end{vmatrix}\begin{matrix}\\-I\cdot x_1\\-II\cdot x_1\end{matrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1\\0&x_2^2-x_2x_1&x_3^2-x_3x_1\end{vmatrix}=$$

$$=(x_2-x_1)(x_3^2-x_3x_1)-(x_3-x_1)(x_2^2-x_2x_1)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$

У визначнику порядку n віднімемо від кожного рядку попередній рядок, помножений на x_1

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\dots&1\\x_1&x_2&\dots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\dots&x_n^2\\\dots&\dots&\dots&\dots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\dots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&\dots&1\\0&x_2-x_1&\dots&x_n-x_1\\0&x_2^2-x_2x_1&\dots&x_n^2-x_nx_1\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&x_2^{n-1}-x_2^{n-2}x_1&\dots&x_n^{n-1}-x_n^{n-2}x_1\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & \dots & x_n-x_1 \\ x_2^2-x_2x_1 & \dots & x_n^2-x_nx_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-1}-x_2^{n-2}x_1 & \dots & x_n^{n-1}-x_n^{n-2}x_1 \end{vmatrix}=(x_2-x_1)\dots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}=$$

$$=(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)D_{n-1}=(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots(x_n-x_2)D_{n-2}=\dots=$$

$$=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)\,.$$

4. Метод представлення визначника у вигляді суми визначників.
Деякі визначники легко обчислюються шляхом розкладу їх в суму визначників такого самого порядку відносно рядків або стовпців.

Приклад 7. Обчислити визначник

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2 & b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & \dots & a_1+b_n \\ b_1 & a_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & a_n & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & a_1+b_n \\ b_1 & b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2 & b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & \dots & a_1+b_n \\ b_1 & a_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & a_n & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \dots & a_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_2 & \dots & a_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_2 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_2 & \dots & b_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ b_1 & a_2 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & a_n & \dots & a_n \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & \dots & b_n \\ b_1 & a_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & a_n & \dots & b_n \end{vmatrix}=0$$

Але $D_1=|a_1+b_1|$, $D_2=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}=(a_1-a_2)(b_2-b_1)$. Починаючи з $n\ge 3$ визначник $D_n=0$.

5. Теорема Лапласа.

Приклад 8. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$

Приклад 9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Приклад 10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ y_1 & y_2 & \cos\beta & \sin\beta \\ z_1 & z_2 & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$