3.2.3. Властивості функції

1. Функція $y = f(x)$ називається
- монотонно зростаючою;
- строго монотонно зростаючою;
- монотонно спадною;
- строго монотонно спадною;

якщо для кожної пари $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 < x_2)$

виконується нерівність
- $f(x_1) \le f(x_2)$;
- $f(x_1) < f(x_2)$;
- $f(x_1) \ge f(x_2)$;
- $f(x_1) > f(x_2)$.

2. Функція $y = f(x)$ називається
- парною;
- непарною;
- загального виду (ні парна, ні непарна)

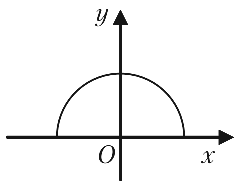
якщо для кожного x із X
- $f(-x) = f(x)$
- $f(-x) = -f(x)$
- не виконується жодна з попередніх властивостей

Приклади.

1. Парність (рис. 3.8). Осьова симетрія.

2. Непарність (рис. 3.9). Симетрія відносно точки (наприклад, точки O).

3. Функція загального виду: ні парна, ні непарна (рис. 3.10).



Функція $y = f(x)$ називається *періодичною*, якщо існує відмінне від нуля число T, таке, що для всіх значень x з області визначення X виконується рівність:

$$f(x + T) = f(x).$$

Число T називається *періодом функції*.

Ілюстрація періодичності — рис. 3.11.

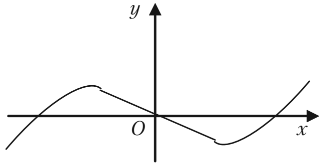


Рис. 3.9.

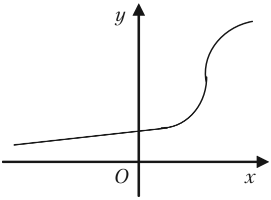


Рис. 3.10.

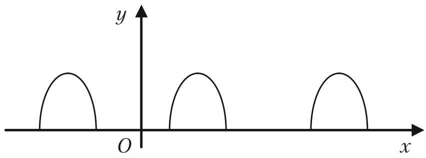


Рис. 3.11.

3.2.4. Функція, обернена до даної

Розглянемо взаємно однозначну функцію $y = f(x)$. Це означає, що кожному y із множини Y також відповідає одне і тільки одне значення x із X (рис. 3.12).

Функцією, оберненою до функції $y = f(x)$ $(x \in X,\ y \in Y)$, називається відповідність між множинами Y та X, при якій кожному елементу з Y відповідає єдине значення з X.

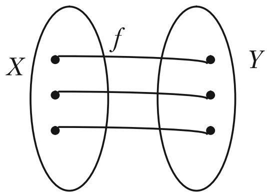


Рис. 3.12.

Позначення:

$$f^{-1}: Y \to X;$$
$$x = f^{-1}(y).$$

Якщо в рівності $x = f^{-1}(y)$ y замінити на x, а x виразити через y, дістанемо функцію $y = f^{-1}(x)$. Цю функцію можна також називати *оберненою до утвореної*. Функції $y = f(x)$ та $y = f^{-1}(x)$ називаються *взаємно оберненими*.

Геометрична інтерпретація

Графіки двох взаємно обернених функцій симетричні відносно бісектриси квадрантів I та III (рис. 3.13).

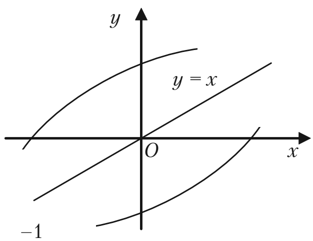


Рис. 3.13.

Приклад.

Знайдемо функцію, обернену до

$$y = -2x + 4 \quad (\text{рис. } 3.14).$$

Замінимо y на x, а x на y:

$$-2y = x - 4,$$

або

$$y = -0{,}5 + 2.$$

3.2.5. Поняття складної (складеної) функції

Нехай маємо рис. 3.15.

Функція $y = F(u)$, де $u = g(x)$ є, у свою чергу, деякою функцією, називається складною (складеною) функцією, або суперпозицією (композицією) двох функцій.

$$F = f \circ g = f(g(x)).$$

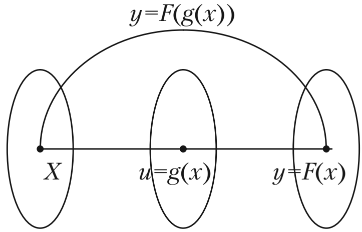


Рис. 3.15.

Приклади.

1) $y = \sin^3 x$ — це композиція двох функцій:

$$y = F(u) = u^3 \quad \text{і} \quad u = \sin x;$$

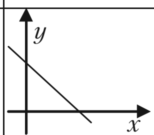
2) $y = \sin x^3$ — це композиція двох функцій:

$$y = F(u) = \sin u \quad \text{і} \quad u = x^3.$$

3.2.6. Основні елементарні функції

I. Лінійною називається функція виду $y = ax + b$, де а, $b \in R$.

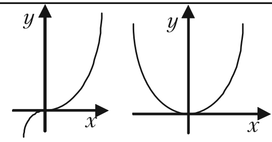
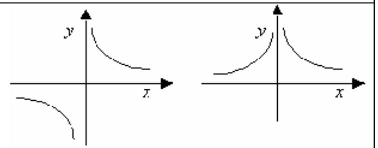
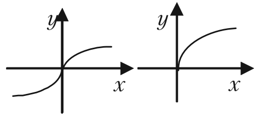
Властивості

X	*Y*	Парність	Монотонність	Періодичність	Графік
$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	Загального виду (ні парна, ні непарна), $a \neq 0$; якщо $a=0$ – парна	$a>0$ – зростаюча; $a<0$ – спадна; $a=0$ – стала	Неперіодична при $a \neq 0$, $a=0$ – періодична з будь-яким періодом	 Пряма лінія

II. Функція $y = x^a$, де a — будь-яка дійсна стала, називається ***степеневою***.

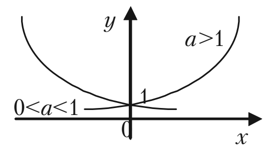
Наведемо властивості степеневої функції, які залежать від показника a:

1. $x^0 = 1,\ x \neq 0$.
2. $x^a x^b = x^{a+b}$.
3. $x^a : x^b = x^{a-b}$.
4. $\left(x^a\right)^b = x^{ab}$.
5. $(xy)^a = x^a y^a$.

Показник степеня	*X*	*Y*	Парність	Монотонність	Періодичність	Графік
$a = n$, $n \in N$	$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$, якщо n – непарне; $(0;+\infty)$, якщо n – парне;	Непарна, якщо n – непарне; парна, якщо n – парне	Зростаюча на $(-\infty;+\infty)$, якщо n – непарне; спадна на $(-\infty;0]$ і зростаюча на $[0;+\infty)$, якщо n – парне	Неперіодична	 n – непарне n – парне
$a = -n$, $n \in N$	$(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$	$(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, якщо n – непарне; $(0;+\infty)$, якщо n – парне	Непарна, якщо n – непарне; парна, якщо n – парне	Якщо n – парне, зростаюча на $(-\infty;0)$ і спадна на $(0;+\infty)$; якщо n – непарне, спадна на $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$	Неперіодична	 n - непарне n - непарне
$a = 1/n$, $n \in N$	$(0;+\infty)$, якщо n – парне; $(-\infty;+\infty)$, якщо n – непарне	$(0;+\infty)$, якщо n – парне; $(-\infty;+\infty)$, якщо n – непарне	Непарна, якщо n – непарне; загального виду (ні парна, ні непарна), якщо n – парне	Зростаюча на $(-\infty;+\infty)$, якщо n – непарне; зростаюча на $(0;+\infty)$, якщо n – парне	Неперіодична	 n – непарне n – парне

III. Функція $y = a^x$, якщо $a>0$, $a \neq 0$, називається ***показниковою функцією.***

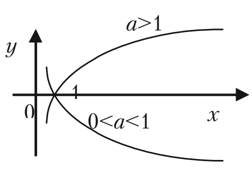
Властивості

X	*Y*	**Парність**	**Монотонність**	**Періодичність**	**Графік**
$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;0)$	Загального вигляду (ні парна, ні непарна)	Якщо $a>1$ – зростаюча на $(-\infty;+\infty)$; якщо $0<a<1$ – спадаюча на $(-\infty;+\infty)$	Неперіодична	

Основні формули:

1. $a^0 = 1$, $a \neq 0$.
2. $a^x a^y = a^{x+y}$.
3. $a^x : a^y = a^{x-y}$.
4. $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$.
5. $(ab)^x = a^x b^x$.

IV. Функція $y = \log_a x$, якщо $a > 0$, $a \neq 1$, називається ***логарифмічною функцією***. Логарифмічна та показникові функція взаємо обернені.

X	*Y*	**Парність**	**Монотонність**	**Періодичність**	**Графік**
$(0;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$	Загального вигляду (ні парна, ні непарна)	Якщо $a>1$ – зростаюча на $(0;+\infty)$; якщо $0<a<1$ – спадаюча на $(0;+\infty)$	Неперіодична	

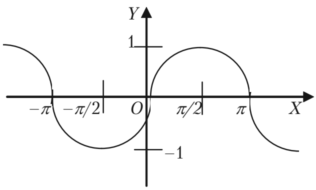
Основні формули:

1. $\log_a 1 = 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.
2. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
3. $\log_a a = 1$.
4. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.
5. $\log_{a^r} b^p = \dfrac{p}{r}\log_a b$.

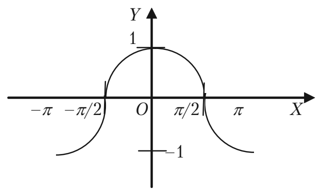
V. Функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ називаються ***тригонометричними.***

Функ-ція	*X*	*Y*	Парність	Монотонність	Періодич-ність
$y=\sin x$	$(-\infty;+\infty)$ $[\frac{\pi}{2}+2\pi n;$ $\frac{3\pi}{2}+2\pi n]$	$[-1;\ 1]$	Непарна	Зростаюча на $[0;\ \frac{\pi}{2}]$; спадна на $[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n]$	Періодична $T = 2\pi n$; $T_{\min}=2\pi$
$y=\cos x$	$(-\infty;+\infty)$	$[-1;\ 1]$	Парна	Зростаюча на $[-\pi+2\pi n;2\pi n]$; спадна на $[2\pi n;\pi+2\pi n]$	Періодична $T = 2\pi n$; $T_{\min}=2\pi$
$y=\operatorname{tg} x$	$(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;$ $\frac{\pi}{2}+2\pi n)$	$(-\infty;+\infty)$	Непарна	Зростаюча	Періодична $T = \pi n$; $T_{\min}=\pi$
$y=\operatorname{ctg} x$	$(\pi n;\ \pi+\pi n)$	$(-\infty;+\infty)$	Непарна	Спадна	Періодична $T = \pi n$; $T_{\min}=\pi$

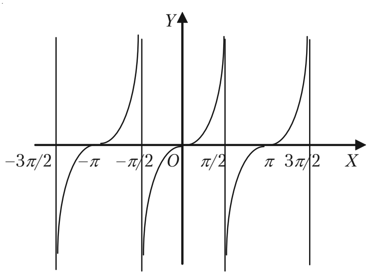
Графіки



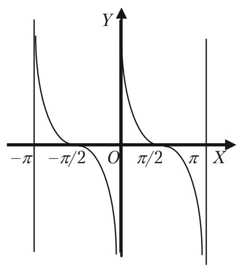
$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \operatorname{tg} x$



$y = \operatorname{ctg} x$

Основні формули:

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

2. $1 + \mathrm{tg}^2 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $\quad 1 + \mathrm{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$; $\quad \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{ctg}\, x = 1$.

3. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$;
   $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1-2\sin^2 x$;

   $\mathrm{tg}\, 2x = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1-\mathrm{tg}^2 x}$.

4. $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\quad \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

5. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$; $\quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$;

   $\mathrm{tg}\, 3x=\dfrac{3\,\mathrm{tg}\, x-\mathrm{tg}^3 x}{1-3\,\mathrm{tg}^2 x}$.

6. $\sin(x\pm y) = \sin x \cos y \pm \cos y \sin x$;
   $\cos(x\pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$.

7. $\mathrm{tg}(x\pm y) = \dfrac{\mathrm{tg}\, x \pm \mathrm{tg}\, y}{1\mp \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y}$.

8. $\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$;

   $\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$;

   $\sin x \sin y = \dfrac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$.

9. $\sin x + \sin y = 2 \sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$;

   $\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$;

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}.$$

10. $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$;

$\operatorname{tg} x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

11. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos\alpha$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\sin\alpha$;

$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp\sin\alpha$; $\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha$;

12. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\operatorname{ctg}\alpha$; $\operatorname{tg}(\pi \pm \alpha) = \pm\operatorname{tg}\alpha$;

$\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(\pi \pm \alpha) = \pm\operatorname{ctg}\alpha$.

VI. Функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ називаються ***оберненими тригонометричними функціями***. Вони є оберненими до функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Функція	***X***	***Y***	**Парність**	**Монотонність**	**Періодичність**
$y = \arcsin x$	$[-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	Непарна	Зростаюча	Неперіодична
$y = \arccos x$	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$	Ані парна, ані непарна	Спадна	Неперіодична
$y = \mathrm{arctg}\, x$	$(-\infty; +\infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	Непарна	Зростаюча	Неперіодична
$y = \mathrm{arcctg}\, x$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; \pi]$	Ані парна, ані непарна	Спадна	Неперіодична

Основні формули:

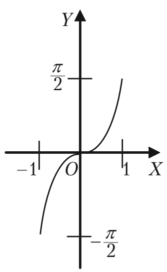
1. $\arcsin\alpha = -\arcsin(-\alpha) = \frac{\pi}{2}\arccos\alpha = \mathrm{arctg}\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$.

2. $\arccos\alpha = \pi - \arccos(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\alpha = \mathrm{arcctg}\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$.

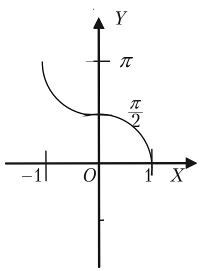
3. $\mathrm{arctg}\,\alpha = -\mathrm{arctg}(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arcctg}\,\alpha = \arcsin\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$.

4. $\mathrm{arcctg}\,\alpha = \pi - \mathrm{arcctg}(-\alpha) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,\alpha = \arccos\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$.

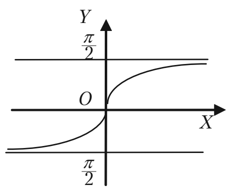
Графіки



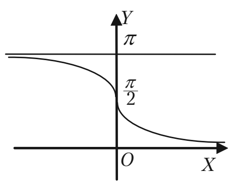
$y = \arcsin x$



$y = \arccos x$



$y = \mathrm{arctg}\, x$



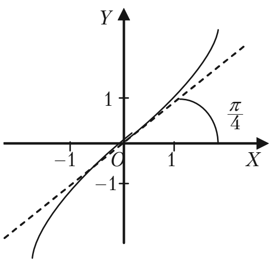
$y = \mathrm{arcctg}\, x$

VII. Функції $\mathrm{ch}\, x = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2}$, $\mathrm{sh}\, x = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2}$ називаються ***гіперболічним косинусом і синусом***, а функції $\mathrm{th}\, x = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{e^{x} + e^{-x}}$, $\mathrm{cth}\, x = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{e^{x} - e^{-x}}$ відповідно ***гіперболічним тангенсом і котангенсом***.

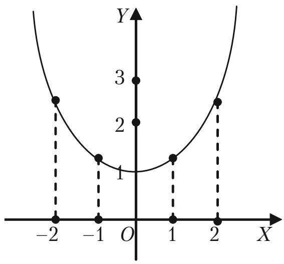
Для гіперболічних функцій справджуються співвідношення:

1. $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.
2. $\mathrm{sh}\, 2x = 2\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x$.
3. $\mathrm{th}\, x\, \mathrm{cth}\, x = 1$.
4. $\mathrm{th}\, x = \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$.

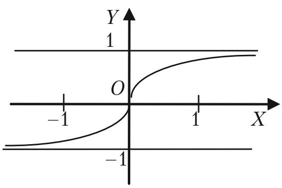
Наведемо графіки головних гіперболічних функцій:



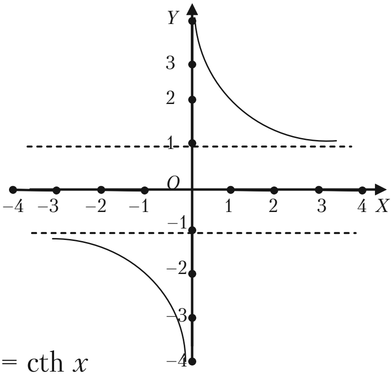
$y = \mathrm{sh}\, x$



$y = \mathrm{ch}\, x$



$y = \mathrm{th}\, x$



$y = \mathrm{cth}\, x$

3.2.7. Елементарні функції

Із основних елементарних функцій решту елементарних функцій дістають:

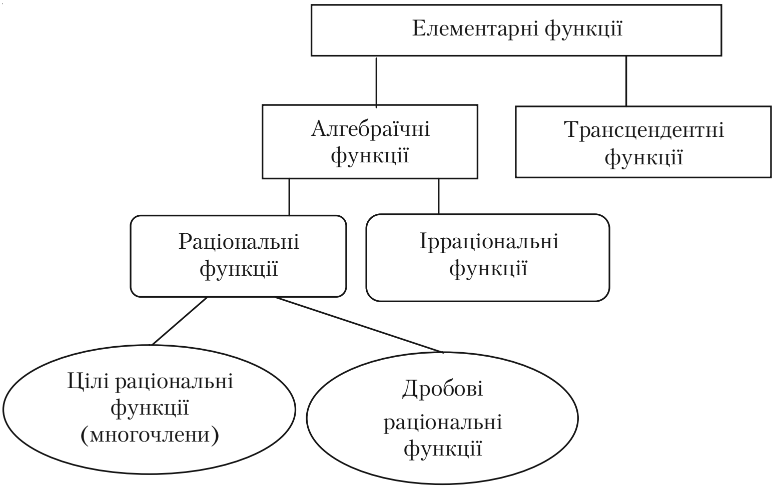
1) за допомогою алгебраїчних дій;

2) побудовою складної (складеної) функції.

Функції, які дістають з основних елементарних функцій за допомогою скінченого числа алгебраїчних дій і скінченого числа операцій, що полягають у побудові складної функції, називаються елементарними.

Скажімо, $y = \dfrac{(x\cos x)^4}{x + 6^{8x}} + \sqrt[17]{6^x} + 5$ — елементарна функція.

Класифікація функцій



Функція $y = P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$; $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$ називається ***многочленом n-го степеня***.

Наприклад, $y = ax^2 + a_1x + 67$, $a, a_1 \in R$.

Функція $y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$ називається ***дробово-раціональною функцією***.

Функція, до складу дій над аргументом якої входить дія добування кореня, називається ***ірраціональною функцією***.

3.2.8. Деякі неелементарні функції

1. $y = |x|$ — абсолютне значення, або модуль числа (рис. 3.16).
2. $y = [x]$ — ціла частина числа (рис. 3.17).
3. $y = \{x\}$ — дробова частина числа (рис. 3.18).

4. $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ — знак числа (рис. 3.19).

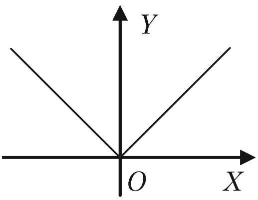


Рис. 3.16.

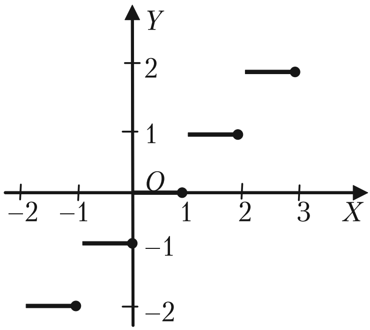


Рис. 3.17.

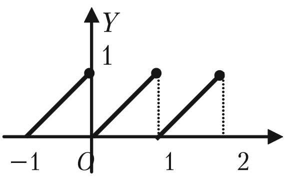


Рис. 3.18.

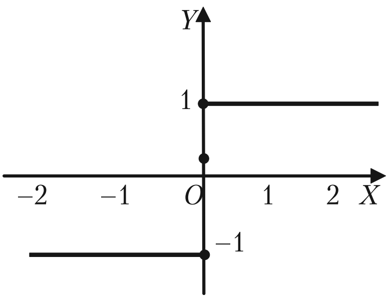
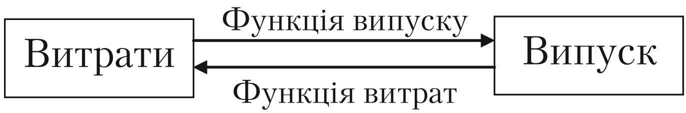


Рис. 3.19.

3.2.9. Основні елементарні функції, які використовуються в економічних дослідженнях

Функцію, що виражає залежність між сумарними витратами на виробництво певного товару та його вартістю, називається *однофакторною виробничою функцією*.

Функція, в якій роль незалежної змінної виконують витрати, а залежна змінна визначає обсяг випуску, називається *функцією випуску*.



В функції витрат, навпаки, незалежна змінна — випуск, а залежна змінна — витрати.

а) Нехай витрати у на виробництво продукції складаються із умовно-сталих і умовно-змінних витрат. Якщо умовно-змінні витрати прямо пропорційні обсягу випуску x і складають a_1x одиниць, а умовно-сталі витрати рівні a_0 одиниць, то функція витрат має вигляд:

$$y = a_1x + a_0 \quad (a_1 > 0, a_0 > 0, x \geq 0).$$

Це — лінійна функція. З такими функціями ми маємо справу при побудові балансової моделі.

б) За допомогою однофакторної виробничої функції можна описати залежність обсягу виробництва від витрат деякого специфічного виду ресурсу.

В ролі такого ресурсу часто виступають трудові ресурси, основні виробничі фонди, об’єм капіталовкладень, різні види сировини. При цьому витрати всіх інших ресурсів, що приймають участь в виробництві, вважають сталими.

Так, за допомогою функції виду:

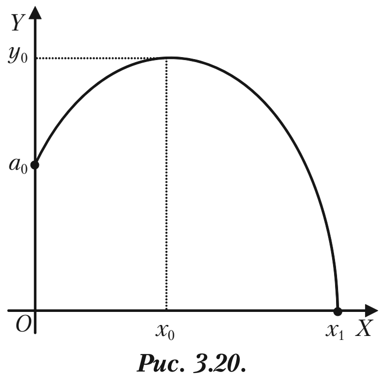


Рис. 3.20.

$$y = a_0 + a_1x - a_2x^2 \quad (a_0 > 0;\ a_1 > 0;\ a_2 > 0;\ x \geq 0)$$

можна охарактеризувати залежність врожайності у деякої сільськогосподарської культури від кількості x внесених добрив.

При відсутності добрив врожайність становить a_0 одиниць. Із збільшенням об'єму використаних добрив урожай спочатку зростає і при $x = x_0$ досягає найбільшого значення. Подальше збільшення витрат добрива стає нерозумним. Воно приводить до зниження врожаю і навіть до повної втрати.

Функція виду $y = a_0 + a_1x - a_2x^2$ — квадратична виробнича функція.

в) Гіперболічна залежність $y = a_0 + \dfrac{a_1}{x}$ $(a_0 > 0;\ a_1 > 0;\ x > 0)$ застосовується, наприклад, для моделювання залежності витрат y на одиницю продукції, що випускається від об'єму виробництва x (рис. 3.21).

Витрати на одиницю продукції, що випускається, мають постійну складову a_0 і змінну $\dfrac{a_1}{x}$. Величина $\dfrac{a_1}{x}$ змінюється із збільшенням x. Це означає, що із збільшенням об'єму виробництва частка змінних витрат необмежно спадає. При великому об'ємі виробництва ($x \to \infty$) витрати на одиницю продукції дуже мало відрізняються від постійного доданку a_0 ($y \to a_0$).

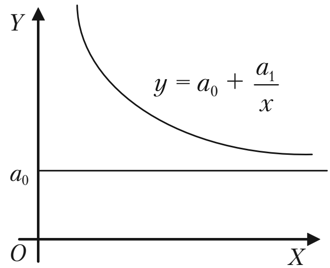


Рис. 3.21.

г) Експоненціальна виробнича функція $y = a_0 e^{a_1 x}$ $(a_0 > 0;\ a_1 > 0;\ x > 0)$ застосовується, наприклад, для моделювання залежності витрат y на одиницю продукції, що випускається, від об'єму виробництва x (рис. 3.22). В початковий момент часу $x = 0$ об'єм виробництва $y = a_0$. Крутизна кривої на малюнку залежить від величини коефіцієнтів a_0 і a_1.

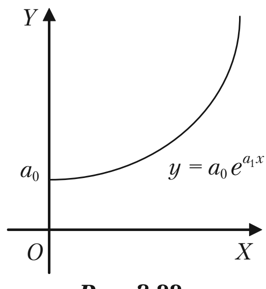


Рис. 3.22.

Залежність виду $y = a_0 e^{a_1 x}$ має місце і в наступній ситуації. Якщо на банківський рахунок кладеться сума a_0 то через x років на рахунку буде сума y, якщо банк сплачує a_1% річних.

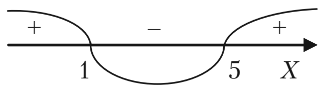
д) Попит і ціна — взаємо залежні величини. За певних умов попит на деякий товар є функцією ціни. Нехай q — попит на товар p — ціна товару. Залежність між попитом і ціною називають функцією попиту $q = f(p)$. Залежність між ціною і попитом можна розглянути як функцію ціни від попиту $p = \varphi(q)$. Прикладом функції можуть бути $q = ae^{-2p}$; $p = \ln\sqrt{\dfrac{5}{q}}$.

3.2.10. Розв'язання прикладів

Приклад 3.6. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{6x - x^2 - 5}$.

Розв'язок. Так як аргумент x знаходиться під радикалом, то функція у буде мати дійсні значення тільки при таких значеннях x, при яких підкореннвий вираз невід'ємний. Повинна виконуватися нерівність:

$$6x - x^2 - 5 \geq 0$$



або

$$x^2 - 6x + 5 \leq 0.$$

Розв'язуємо

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 5.$$

Одержуємо

$$(x - 1)(x - 5) \leq 0.$$

Методом інтервалів знаходимо $1 \leq x \leq 5$.

Приклад 3.7. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{\lg\dfrac{5x - x^2}{4}}$.

Розв'язок. Підкореневий вираз повинен бути невід'ємний:

$$\lg\frac{5x - x^2}{4} \geq 0.$$

Звідки:

$$\frac{5x - x^2}{4} \geq 1, \quad \text{або} \quad x^2 - 5x + 4 \leq 0.$$

Розв'язавши нерівність, одержуємо: $1 \leq x \leq 4$.

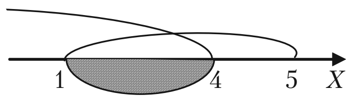
Приклад 3.8. Знайти область визначення функції

$$y = \arcsin\frac{x-3}{2} - \lg(4 - x).$$

Розв'язок. Згідно з властивостями оберненої тригонометричної та логарифмічної функції маємо:

$$\begin{cases} -1 \leq \dfrac{x-3}{2} \leq 1 \\ 4 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x - 3 \leq 2 \\ x < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 + 3 \leq x \leq 2 + 3 \\ x < 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ x < 4 \end{cases}$$



Отже, $1 \leq x \leq 4$.

3.2.11. Побудова графіків функцій

Для побудови графіка функції $y = f(x)$ задають аргументу x декілька допустимих значень i, користуючись аналітичним виразом функції, обчислюють відповідні значення функції.

Якщо, наприклад, взяти значення аргументу $x = x_1$, $x = x_2$, ... , $x = x_n$, то відповідні їм значення функції будуть:

$$y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2), \ldots ,\ y_n = f(x_n).$$

Ці значення записують в таблицю:

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Після цього беремо прямокутну систему координат, вибираємо масштабну одиницю і будуємо точки: $M_1(x_1; y_1)$; $M_2(x_2; y_2)$; ... ; $M_n(x_n; y_n)$. Одержані точки з'єднаємо плавною лінією. Ця лінія дає ескіз графіка функції.

Вкажемо прийоми, які полегшують побудову графіка функції в ряді випадків:

а) Якщо функція парна, то її графік розміщений симетрично відносно осі Oy. Таким чином, графік парної функції будемо будувати так: побудуємо тільки частину графіка цієї функції, що розміщений праворуч від осі Oy, тобто при складанні таблиці числових значень функції будемо задавати аргументу тільки додатні значення і значення рівне нулю, якщо це значення належить області існування функції. А потім будуємо «дзеркальне відображення» відносно осі Oy графіка, що одержали раніше.

б) Якщо функція непарна, то її графік розміщений симетрично відносно початку координат. Для побудови графіка непарної функції необхідно побудувати тільки ту частину графіка, яка розміщена праворуч від осі Oy, тобто частину, що відповідає додатним значенням аргументу (і значенню $x = 0$, якщо 0 належить області існування функції). А потім побудуємо криву, що симетрична відносно початку координат, кривій, яку побудували раніше.

в) Якщо відомий графік функції $y = f(x)$, то, щоб побудувати графік функції $y = f(x + c)$, необхідно перенести графік функції $y = f(x)$ відносно осі Ox на c одиниць масштабу праворуч, якщо $c < 0$, і ліворуч, якщо $c > 0$.

г) Графік функції $y = f(x) + b$ одержуємо із графіка функції $y = f(x)$ перенесенням цього графіка на b одиниць масштабу вгору, якщо $b > 0$, і вниз, якщо $b < 0$.

д) Графік функції $y = Af(x)$ одержуємо із графіка $y = f(x)$ множенням всіх його ординат на A при збереженні величини відповідних абсцис.

е) Графік функції $y = f(kx)$ $(k > 0)$ одержуємо із графіка функції $y = f(x)$ діленням всіх абсцис цього графіка на k, якщо $k > 1$, та множенням їх на $\frac{1}{k}$, якщо $0 < k < 1$, при збереженні величин відповідних ординат.

Застосовуючи послідовно ці прийоми, можна, знаючи графік функції $y = f(x)$, побудувати графік більш складної функції вигляду: $y = Af(kx + c) + b$.

3.2.12. Розв'язання прикладів

Приклад 3.27. Побудувати графік функції $y = 3x - 5$.

Розв'язок. Задану функцію не можна віднести ні до парних, ні до непарних:

$$y(-x) = -3x - 5 = -(3x + 5).$$

Областю її визначення є інтервал $(-\infty;+\infty)$. Функція лінійна, її графіком є пряма лінія, для побудови якої досить знати тільки дві її точки. Візьмемо два довільних значення аргументу x і обчислимо відповідні їм значення функції y.

x	2	0
y	1	–5

Побудуємо на площині дві точки $A(2;\ 1)$ і $B(0;\ -5)$. Графік показано на рис. 3.23.

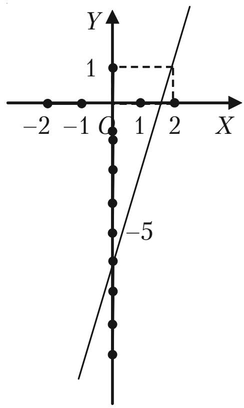


Рис. 3.23.

Приклад 3.28. Користуючись графіком функції $y = x^2$, побудувати графік функції $y = x^2 + 2x + 2$.

Розв'язок. Задану функцію представимо в вигляді $y = (x + 1)^2 + 1$. Виходячи із графіка функції $y = x^2$, спочатку побудуємо графік функції $y = (x + 1)^2$, перенесенням графіка $y = x^2$ відносно осі Ox вліво на 1. А потім графік $y = (x + 1)^2$ перенесемо вгору на 1 (рис. 3.24).

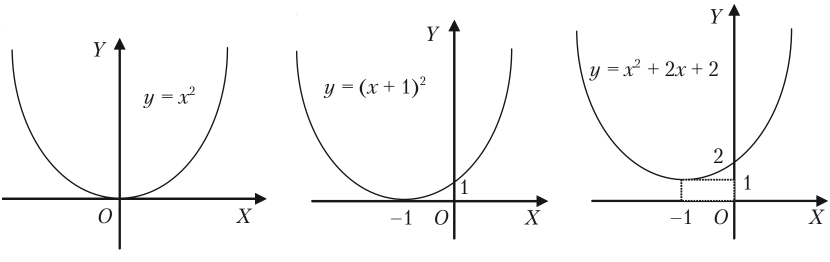


Рис. 3.24.

Приклад 3.29. Побудувати графік дробово-лінійної функції $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ враховуючи, що $ad - bc \neq 0$; $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$; $d > 0$.

Розв'язок. Чисельник дробу $ax + b$ поділимо на знаменник $cx + d$:

Приклад 3.31. Побудувати графік функції $y = (x-1)^3$.

Розв'язок. Функція $y = (x-1)^3$ визначена при всіх значеннях x $(-\infty < x < +\infty)$. Функція ні парна, ні непарна. Складемо таблицю числових значень функції для кількох довільних значень аргументу:

x	-1	0	1	2	3
y	-8	1	0	1	8

Побудуємо одержані точки і з'єднаємо їх плавною кривою (рис. 3.27).

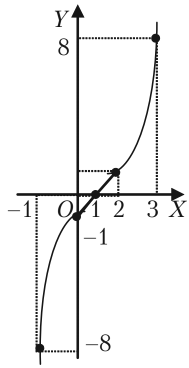


Рис. 3.27.

Приклад 3.32. Побудувати графік функції $y = 2^x$. Вважаючи цей графік початковим побудувати графіки функцій:

1) $y = 2^{-x}$; 2) $y = -2^x$; 3) $y = -2^{-x}$.

Розв'язок. Показникова функція $y = 2^x$ визначена при всіх значеннях x. Її областю існування є інтервал $(-\infty;+\infty)$. Складемо таблицю числових значень функції, надаючи аргументу довільних значень.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32

Побудуємо на площині ці точки, з'єднаємо їх плавною кривою і одержимо наближений графік заданої функції (рис. 3.28).

1) Графік функції $y = 2^{-x}$ симетричний графіку функції $y = 2^x$ відносно осі Oy, так як $y(x) = 2^x$, то $y(-x) = 2^{-x}$.

2) Графік функції $y = -2^x$ симетрична графіку $y = 2^x$ відносно вісі Ox.

3) Графік функції $y = -2^{-x}$ симетрична графіку функції $y = 2^{-x}$ відносно вісі Ox.

Перед розв'язанням приведених нижче прикладів введемо такі умови: якщо на кривих лініях, або на прямих поставлено стрілки, то це означає, що кінці цих ліній, на яких знаходяться стрілки не належать графіку функцій.

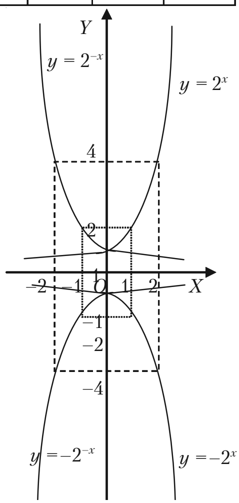


Рис. 3.28.

Приклад 3.33. побудувати графік функції

$$y=\begin{cases} x, \ \text{якщо } x \neq 2 \\ 5, \ \text{якщо } x = 2\,. \end{cases}$$

Розв'язок. Графік функції складається із всіх точок прямої $y = x$, крім точки (2; 2). Ця точка викинута з прямої. Вона поміщена в точку (2; 5). Це ізольована точка графіка функції (рис. 3.29).

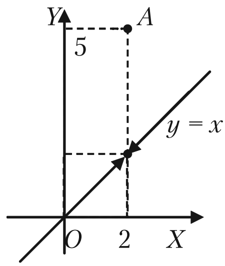


Рис. 3.29.

Приклад 3.34. Побудувати графік функції, визначеної рівняннями:

$$y=\begin{cases} -2x-2, \ \text{якщо } x<-1; \\ -\sqrt{1-x^2}, \ \text{якщо } -1 \le x \le 1; \\ 2x-2, \ \text{якщо } x>1. \end{cases}$$

Розв'язок. Графіком функції $y = -2x - 2$ для значень $x < -1$ є пряма лінія, на якій необхідно взяти промінь, відповідний аргументу x на інтервалі $(-\infty;-1)$.

Графіком функції $y=-\sqrt{1-x^2}$ для значень $-1 \le x \le 1$ частина кола $x^2 + y^2 = 1$, що лежить в нижній пів площині.

Графіком функції $y = 2x - 2$ для значень $x > 1$ є пряма лінія, на якій необхідно взяти промінь, відповідний значенням аргументу x на інтервалі $(1;\infty)$.

В зображеному вигляді графік заданий функціями представлено на рис. 3.30.

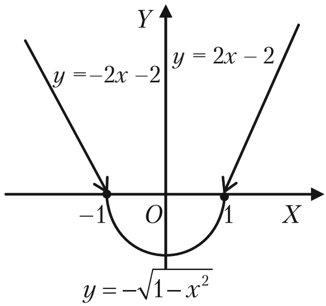


Рис. 3.30.

Приклад 3.35. Побудувати графік функції $y = x^2 - 4|x - 1|+1$ на відрізку [–6; 5].

Розв'язок. Звернемо увагу:

$$|x-1|=\begin{cases} (x-1), \text{якщо } 1 \le x \le 5 \\ -(x-1), \ \text{якщо } -6 \le x < 1 \end{cases}$$

Складемо таблицю значень функції $y = x^2 - 4|x - 1| + 1$, для значень аргументу x, що знаходяться на відрізку $[-6; 5]$.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	9	2	-3	-6	-7	-6	-3	2	1	2	5	10

Потім будуємо точки і з'єднуємо їх суцільною лінією, одержуємо шуканий графік (рис. 3.31).

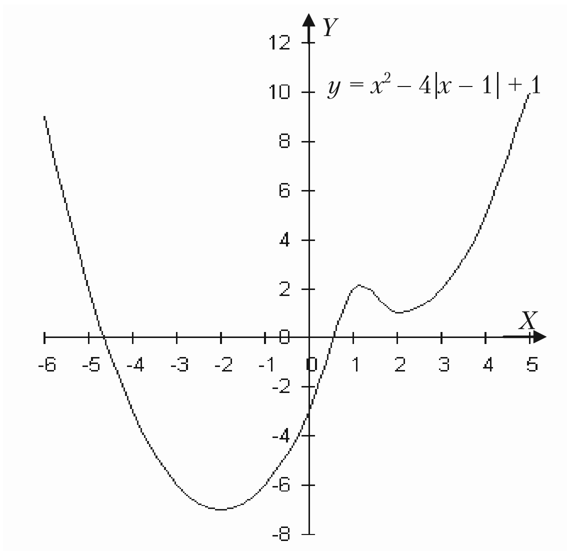


Рис. 3.31.

3.2.13. Приклади для самостійного розв'язання

3.36. Знайти область визначення заданих функцій:

1) $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$; 2) $y = \sqrt{5 - 2x}$; 3) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 3x + 2}$;

4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$; 5) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$; 6) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$;

7) $y = \arcsin\dfrac{x}{4}$; 8) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$; 9) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - |x|}}$;

10) $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2}$; 11) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$;

12) $y=\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+1}$;

13) $y=\dfrac{3}{4-x^2}+\lg(x^3-x)$; 14) $y=\lg(\sin(x-3))+\sqrt{16-x^2}$;

15) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

3.37. Яка із елементарних функцій має такі властивості: $f(1)=0$; $f(a)=1$; $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$?

3.38. Яка елементарна функція має такі властивості: $f(0)=1$; $f(1)=a$; $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$?

3.39. Побудувати графіки функцій, знаючи графік функції $y=x^2$.

1) $y=2x^2-5$; 2) $y=3-\dfrac{x^2}{2}$; 3) $y=\dfrac{1}{2}(x-2)^2-1$.

3.40. Побудувати графіки функцій:

1) $y=x^2-4x+3$; 2) $y=|x^2-4x+3|$; 3) $y=x^2-4|x|+3$;
4) $y=|x^2-4|x|+3|$; 5) $|y|=x^2-4x+3$.

3.41. Знаючи графік функції $y=\sin x$, побудувати графіки функцій:

1) $y=2\sin(x+1)$; 2) $y=1+3\sin 2x$; 3) $y=-2\sin 3(x-1)$.

3.42. Побудувати графіки функцій:

1) $y=\log_2|x|$; 2) $y=\log_3(3-x)$; 3) $y=\lg(x^2-x)$; 4) $y=|\log_2 x|$.

3.43. Побудувати графіки функцій:

1) $y=x|x|$; 2) $y=1-|x^2-1|$;

3) $y=\begin{cases}1-x, \text{ якщо } x\le 0;\\ 1+\sqrt{3x}, \text{ якщо } x>0.\end{cases}$

4) $y=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1}(x+3), \text{ якщо } x\ne 1;\\ 1, \quad \text{якщо } x=1.\end{cases}$