4. Застосування математичного аналізу у економічних дослідженнях

4.1 Деякі функціональні залежності, що їх використовують при розв'язанні економічних задач

Найпростішими функціями, що їх використовують у економіці, є функції попиту та пропозиції, які вже згадувалися у попередньому розділі. *Функція попиту* $d = d(p)$ – це залежність попиту d на деякий товар від його ціни p. *Функція пропозиції* $s = s(p)$ – це залежність пропозиції s деякого товару від його ціни. Для функцій попиту та пропозиції $d = d(p)$ та $s = s(p)$ у економічних дослідженнях часто використовують обернені функції $p = p(d)$ та $p = p(s)$, що характеризують залежність ціни товару від його пропозиції чи попиту.

Приклад 4.1. Нехай функція попиту на товар має вигляд: $d = 150 - 0,2p$. Знайти обернену до неї функцію, що моделює залежність ціни від попиту на товар. При якій ціні на товар попит на нього становитиме 130 одиниць?

Розв'язання. Виразимо змінну p через змінну d з заданої функції попиту.

$$d = 150 - 0,2p \Rightarrow 0,2p = 150 - d \Rightarrow p = 750 - 5d.$$

Якщо попит на товар становить 130 одиниць, то відповідна ціна товару складе $750 - 5 \cdot 130 = 100$ г.о.

Приклад 4.2. Функція попиту на товар визначається рівнянням $q = 600 - 2p$, де q – обсяг попиту на товар у штуках, p – його ціна, г.о. Функція пропозиції цього товару описується рівнянням $s = 300 + 4p$, q – обсяг пропозиції товару, штук. Визначити точку рівноваги на ринку цього товару.

Розв'язання. Визначаємо точку рівноваги на ринку цього товару з умови $q(p) = s(p)$ або $600 - 2p = 300 + 4p$. Звідси $6p = 300$, $p = 50$ г.о. Цій ціні відповідає обсяг товару 500 одиниць.

При дослідженні поведінки суб'єктів економічної діяльності використовують також функцію корисності. *Функція корисності* – це суб'єктивна кількісна оцінка споживачем корисності u для нього певної кількості x товару. *Однофакторна виробнича функція* – залежність обсягу виробництва продукції підприємства від витрат ресурсу, що використовують для цього. *Функція витрат* – залежність виробничих витрат I від кількості виробленої продукції.

Вказані функції є прикладами функцій однієї змінної. Для побудови формул, що визначають ці функції, використовують статистичні методи обробки результатів спостережень, зокрема, метод найменших квадратів.

Нехай M – це загальна кількість грошей, V – швидкість їх обігу (кількість разів, коли грошова одиниця бере участь у розрахунках в середньому на рік), Y – національний продукт (вартість готових товарів та послуг, вироблених у країні), P – рівень цін (середнє зважене значення цін готових товарів та послуг, виражене відносно базового показника, прийнятого за одиницю. Зв'язок між цими показниками визначається *рівнянням обміну Фішера* $M = \dfrac{P \cdot Y}{V}$. Це основне рівняння класичної кількісної теорії грошей. Якщо величини *Y* та *V* є сталими, то з рівняння Фішера отримуємо лінійну функцію, що виражає залежність грошової маси *M* від рівня цін *P*. Лінійну функцію, що моделює залежність загальної кількості грошей *M* від величини національного продукту *Y*, також отримуємо при фіксованих значеннях *P* та *V*.

Якщо *P* та *Y* є сталими, то маємо обернено пропорційну залежність між *M* та *V*.

4.2. Застосування похідної у економіці

Розглянемо економічний зміст похідної на прикладі однофакторної виробничої функції $y = f(x)$, що моделює зв'язок між обсягом y виробленої за одиницю часу продукції та обсягом х витраченого на виробництво ресурсу. Нехай таким ресурсом є витрати людської праці, виражені у кількості працівників, що задіяні у виробництві або кількості відпрацьованих людино-годин. Нехай на сьогодні кількість працівників дорівнює *a*. Використовуючи поняття диференціалу, можна записати наближену рівність: $f(a+1) \approx f(a) + f'(a)$. Якщо кількість працівників є великою, то ця наближена рівність є достатньо точною. У цьому випадку значення похідної $f'(a)$ означає додаткову продукцію, яку виробляє за одиницю часу новий працівник, залучений до виробництва.

Нехай p – ціна одиниці продукції, а v – заробітна плата працівника за одиницю часу. Якщо $p \cdot f'(a) > v$, то підприємству потрібно найняти додаткового працівника, оскільки він надає підприємству більший доход, ніж отримувана ним плата за роботу.

У розглянутій ситуації похідну виробничої функції у точці *a* називають *граничною продуктивністю праці*, на відміну від середньої продуктивності праці, що дорівнює відношенню $\dfrac{f(a)}{a}$.

Розглянемо введені раніше функції, що застосовуються у економічних дослідженнях та з'ясуємо економічний зміст їх похідних. Похідна функції попиту $d = d(p)$ наближено дорівнює зміні попиту при збільшенні ціни на товар на 1 г.о. Оскільки функція попиту є спадною, то абсолютне значення її похідної показує зменшення попиту на товар з боку споживачів при збільшенні його ціни на 1 г.о.

Похідна функції пропозиції $s'(p)$ наближено дорівнює зміні пропозиції товару при збільшенні його ціни на 1 г.о. Оскільки функція пропозиції є зростаючою, то величина цієї похідної дорівнює збільшенню пропозиції товару при збільшенні його ціни на 1 г.о., тобто $s'(p) > 0$.

Похідна $u'(x)$ функції корисності $u(x)$ надає приблизну оцінку додаткової корисності для споживача від придбання додаткової одиниці товару.

У цілому похідна $f'(x)$ відображає швидкість зміни значення функції відносно зміни аргументу. Багато економічних задач вимагають відповіді на запитання про те, на скільки процентів зміниться певний показник, що є функцією, якщо його аргумент зміниться на 1%. Для відповіді на це запитання використовують характеристику функції, яку називають її еластичністю.

4.3. Поняття еластичності та її застосування. Середні та граничні величини

Еластичність характеризує відносну зміну економічного показника під дією одиничної відносної зміни фактору, від якого він залежить за умови незмінності решти факторів, що впливають на досліджуваний показник. Іншими словами, еластичність показує, на скільки процентів зміниться досліджуваний показник, якщо фактор, від якого він залежить, збільшиться на 1%.

Нехай досліджується залежність економічного показника y від фактору x, значення якого впливають на значення y. Розглянемо випадок, коли спостерігається функціональна залежність $y = y(x)$. Швидкість зміни величини y відносно зміни величини x визначається похідною $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, проте її застосування у економічних дослідженнях здебільшого є незручним, оскільки величина похідної залежить від обраних одиниць виміру x та y. Тому для вивчення впливу зміни величини x на величину y у економіці застосовують не абсолютні, а відносні (процентні) зміни величин, що досліджуються. Зв'язок між змінами відносних величин оцінюють за допомогою еластичності.

Еластичністю функції $y = y(x)$ відносно змінної x називають границю відношення відносних змін величин y та x:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \right) = y'(x) \cdot \frac{x}{y}. \tag{4.1}$$

Формулу (4.1) можна записати у вигляді:

$$E_x(y) = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)}. \tag{4.2}$$

Якщо еластичність визначають наближено за дискретним набором даних, наприклад, заданих у вигляді таблиці, то замість (4.1) та (4.2) для обчислення еластичності у точці (x_1, y_1) використовують формулу:

$$E_x(y) = \frac{y_2 - y_1}{y_1} : \frac{x_2 - x_1}{x_1} = \frac{\Delta y_1}{y_1} : \frac{\Delta x_1}{x_1}. \tag{4.3}$$

Еластичність, обчислену за формулою (4.3), називають *кінцевою еластичністю*.

У економічних дослідженнях використовують також *середню (дугову) еластичність*:

$$E_x(y) = \frac{y_2 - y_1}{(y_1 + y_2)/2} : \frac{x_2 - x_1}{(x_1 + x_2)/2}, \tag{4.4}$$

а також *логарифмічну еластичність*

$$E_x(y) = \frac{\Delta(\ln y)}{\Delta(\ln x)} = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right) : \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right). \tag{4.5}$$

З означення еластичності (4.1) випливають основні властивості цього показника.

1. $E_{ax}(by) = E_x(y)$, тобто еластичність не залежить від одиниць виміру показників x та y.

2. Еластичності взаємно обернених функцій є взаємно оберненими величинами: $E_x(y) = \dfrac{1}{E_y(x)}$.

3. Еластичність добутку двох функцій дорівнює сумі їх еластичностей: $E_x(u \cdot v) = E_x u + E_x v$.

4. Еластичність частки функцій дорівнює різниці їх еластичностей: $E_x\left(\dfrac{u}{v}\right) = E_x u - E_x v$.

5. Еластичність суми двох функцій знаходять за формулою:

$$E_x(u+v) = \frac{d(u+v)}{dx} \cdot \frac{x}{u+v} = \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\right) \cdot \frac{x}{u+v} = \frac{u \cdot E_x u + v \cdot E_x v}{u+v}.$$

Приклад 4.3. Знайти еластичність степеневої функції $y = x^k$.

Розв'язання. $E_x\left(x^k\right) = \dfrac{d\left(x^k\right)}{dx} \cdot \dfrac{x}{x^k} = kx^{k-1} \cdot x^{1-k} = k$.

Розглянемо основні показники еластичності, що використовуються у економічних дослідженнях.

1. *Еластичність попиту за ціною (пряма еластичність)* визначається за формулою $E_p(q) = \dfrac{dq/q}{dp/p} = \dfrac{dq}{dp} \cdot \dfrac{p}{q}$, де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту на нього. Вона показує відносну зміну у відсотках величини попиту на товар при зміні ціни цього товару на 1% та характеризує реакцію споживачів на зміну ціни товару.

2. *Перехресну еластичність попиту за ціною* знаходять за формулою $E_{p_j}(q_i) = \dfrac{dq_i/q_i}{dp_j/p_j} = \dfrac{dq_i}{dp_j} \cdot \dfrac{p_j}{q_i}$. Вона показує відносну процентну зміну величини q_i попиту на i-й товар при зміні ціни p_j на j-й товар, що заміщує чи доповнює i-й товар у споживанні, на 1%.

3. *Еластичність попиту за доходом* обчислюють за формулою: $E_l(q) = \frac{dq/q}{dl/l} = \frac{dq}{dl} \cdot \frac{l}{q}$, l – середня величина доходу споживачів. Вона характеризує відносну процентну зміну величини попиту на товар при збільшенні доходу споживачів на 1%. Додатна еластичність попиту за доходом спостерігається для нормальних (якісних) товарів, від'ємна – для малоцінних (низькоякісних).

4. *Цінова еластичність ресурсів* $E_p(R) = \frac{dR/R}{dp/p} = \frac{dR}{dp} \cdot \frac{p}{R}$ характеризує відносну зміну у відсотках величини R попиту на певний ресурс при зміні ціни цього ресурсу на 1%.

5. *Еластичність заміщення при виробництві одного ресурсу іншим* $E_{R_j}(R_i) = \frac{dR_i}{dR_j} \cdot \frac{R_j}{R_i}$ показує, на скільки процентів зміниться кількість R_i i-го ресурсу при збільшенні кількості R_j j-го ресурсу на 1%, так, що при цьому загальний обсяг виробництва не змінюється.

Приклад 4.4. Знайти рівноважну ціну та еластичність попиту й пропозиції за рівноважної ціни, якщо задано функцію попиту $q = -p^2 + 10p + 4$ та пропозиції $s = 2p - 16$.

Розв'язання. Знайдемо рівноважну ціну товару, для якої попит на нього дорівнює пропозиції. Маємо:

$$-p^2 + 10p + 4 = 2p - 16.$$

Звідси отримуємо квадратне рівняння $p^2 - 8p - 20 = 0$, коренями якого є значення $p_1 = -2$ та $p_2 = 10$. Оскільки від'ємний корінь не має економічного змісту, то рівноважна ціна $p = 10$ г.о. Значення попиту для цієї ціни $q(10) = -10^2 + 10 \cdot 10 + 4 = 4$, значення пропозиції $s(10) = 2 \cdot 10 - 16 = 4 = q(10)$. При $p = 10$ значення $\frac{dq}{dp} = -2p + 10 = -2 \cdot 10 + 10 = -10$, $\frac{ds}{dp} = 2$.

Еластичність попиту за ціною при $p = 10$ г.о. становить:

$$E_q(10) = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = -10 \cdot \frac{10}{4} = -12{,}5\%,$$

еластичність пропозиції:

$$E_s(10) = \frac{ds}{dp} \cdot \frac{p}{s} = 2 \cdot \frac{10}{4} = 5\%.$$

4.4 Граничні величини у економіці

Сумарною величиною називають будь-яку функцію $F(x)$ незалежної змінної x. Прикладами сумарних величин у економіці є доход або витрати як функції обсягу виробництва, обсяг виробництва як функція витрат праці тощо.

Середню величину ($AF(x)$) визначають як відношення сумарної величини до незалежної змінної: $AF(x)=\dfrac{F(x)}{x}=\bar{F}$. Приклади середніх величин – середня виручка, середні витрати, середній доход.

Гранична (маржинальна) величина $MF(x)$ визначається як похідна сумарної величини $F(x)$ за змінною x: $MF(x)=\dfrac{dF}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta F}{\Delta x}$ у випадку, якщо сумарна величина змінюється неперервно. Якщо сумарна величина є дискретною, то маржинальна величина $MF(x)$ визначається як відношенні зміни $\Delta F(x)$ до зміни незалежної змінної Δx: $MF(x)=\dfrac{\Delta F(x)}{\Delta x}$. У цьому випадку маржинальну величину можна розглядати як зміну сумарної величини, викликану зміною аргументу на одиницю. Прикладами маржинальних величин у економіці є маржинальний прибуток, маржинальні витрати тощо.

Гранична величина, на відміну від сумарної або середньої величини, характеризує не стан, а процес зміни економічного об’єкту, тобто це динамічна характеристика. Гранична (маржинальна) величина відображає швидкість зміни певного економічного процесу.

Приклад 4.5. Залежність між виробничими витратами y та обсягом x продукції, що виробляє підприємство, визначається функцією $y=10x+50$. Визначити виробничі витрати при обсязі виробленої продукції 100 одиниць.

Розв’язання. Граничні витрати для обсягу виробництва x дорівнюють $y'(x)$. Оскільки у нашому випадку залежність між витратами та обсягом виробництва є лінійною, то граничні витрати для будь-якого обсягу виробництва, у тому числі і при $x=100$ є сталими, оскільки для будь-якого x $y'(x)=10$ г.о. Це означає, що виробництво додаткової одиниці продукції потребує 10 г.о. додаткових витрат.

Це значення можна було отримати по іншому:

$$y(101)-y(100)=10\cdot 101+50-10\cdot 100-50=10 \text{ (г.о.)}$$

У цьому прикладі функція витрат є лінійною, тому різниця $y(x+1)-y(x)$ співпадає зі значенням похідної $y'(x)$. У загальному випадку для нелінійної функції $y(x)$ різниця $y(x+1)-y(x)$ дорівнює $y'(x)$ лише наближено при великих значеннях x.

Приклад 4.6. Залежність між виробничими витратами y г.о. та обсягом виробництва x г.о. визначається рівністю $y=1000x-4x^2$. Визначити середні та граничні витрати, якщо обсяг виробництва становить x=10 г.о.

Розв'язання. Середні витрати для заданої функції виробничих витрат $y = F(x) = 1000x - 4x^2$ становлять $AF(x) = \frac{F(x)}{x} = \bar{F} = \frac{1000x - 4x^2}{x} = 1000 - 4x$. При x=10 г.о. $\bar{F}(10) = 1000 - 4 \cdot 10 = 960$ г.о. Граничні витрати $MF(x) = \frac{dF}{dx} = 1000 - 8x$. При x=10 г.о. $MF(10) = 1000 - 8 \cdot 10 = 920$ (г.о.).

4.5 Економічні застосування диференціального числення функцій кількох змінних

Розглянемо основні функції кількох змінних, що їх використовують у економічних дослідженнях. Їх одновимірні аналоги ми розглянули у п. 4.1.

Багатофакторна виробнича функція $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ виражає залежність обсягу y продукції, яку виробляє деяка економічна система, вираженого у натуральних чи грошових одиницях, від обсягів $x_1, x_2, ..., x_n$ n ресурсів, що використовуються для виробництва. Найбільш відомою виробничою функцією є виробнича функція Кобба-Дугласа $y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, де A, α, β – невід'ємні константи, $\alpha + \beta \le 1$, K – обсяг виробничих фондів у натуральному чи вартісному виразі (величина вкладеного у виробничий процес капіталу), L – величина трудових ресурсів у натуральному чи вартісному виразах (величина вкладеної праці). У деяких наукових працях з економічної теорії у функції Кобба-Дугласа приймають $\alpha + \beta = 1$.

Для виробничої функції $y = y(K, L)$ двох змінних K та L величина $l = \frac{y}{L}$ – це середня продуктивність праці у вартісному виразі, величина $k = \frac{y}{K}$ – середня фондовіддача, величину $f = \frac{K}{L}$ називають *фондоозброєністю* (це вартість виробничих фондів, що приходиться на одиницю витрат на робочу силу або на одного робітника).

Лінії рівня виробничої функції називають *ізоквантами*. Для виробничої функції Кобба-Дугласа рівняння сімейства ізоквант має вигляд: $AK^{\alpha}L^{\beta} = c = \text{const}$. Лінії, ортогональні до ізоквант виробничих функцій, називають ізоклиналями цих функцій.

Функція корисності $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ відображає суб'єктивну числову оцінку конкретною особою корисності u набору n товарів, x_i – кількість одиниць i-го товару. Лінії чи поверхні рівня функції корисності $u = u(x_1, x_2, ..., x_n) = c, c - const$, називають *кривими (поверхнями) байдужості*. Тут для двох наборів товарів з однаковою корисністю u споживачу байдуже, який з них вибрати.

Функція витрат $I = I(y_1, y_2, ..., y_n)$ – це залежність витрат I від обсягів $y_1, y_2, ..., y_n$ n ресурсів, що використовуються у процесі виробництва.

У п. 4.1 розглянуто рівняння обміну Фішера $M = \dfrac{P \cdot Y}{V}$, що виражає залежність загальної кількості грошей *M* від швидкості їх обігу *V*, національного продукту *Y*, рівня цін *P*. Величина *M* є функцією трьох змінних *V*, *Y*, *P*.

Розглянемо економічний зміст частинних похідних функцій кількох змінних на прикладі виробничої функції Кобба-Дугласа.

Зафіксуємо поточний стан підприємства, що характеризується значеннями *K* та *L*. Їм відповідає обсяг виробництва продукції $y = y(K, L)$. Нехай L – кількість робітників. Якщо найняти ще одного робітника, то приріст обсягу виробництва становитиме $\Delta y = y(K, L+1) - y(K, L)$. Цей частинний приріст наближено дорівнює: $\Delta y \approx \dfrac{\partial y}{\partial L}(K, L) \cdot \Delta L = \dfrac{\partial y}{\partial L}(K, L)$, оскільки приріст $\Delta L = 1$.

Таким чином, частинна похідна від виробничої функції по змінній *L* (величині трудових ресурсів або праці) наближено дорівнює додатковій вартості продукції, виробленої одним додатково найнятим робітником. Тому цю частинну похідну називають *граничною продуктивністю праці*. Для функції Кобба-Дугласа вона дорівнює:

$$\frac{\partial y}{\partial L}(K, L) = \beta A K^{\alpha} L^{\beta - 1}$$

Якщо збільшити на одиницю вартість виробничих фондів, то додаткова вартість виробленої продукції становитиме $\Delta y = y(K+1, L) - y(K, L) \approx \dfrac{\partial y}{\partial K}(K, L)$. Цю частинну похідну

$$\frac{\partial y}{\partial K}(K, L) = \alpha A K^{\alpha - 1} L^{\beta}$$

називають *граничною фондовіддачею*.

Гранична продуктивність праці та гранична фондовіддача є абсолютними величинами. У економічних дослідженнях у багатьох випадках доводиться визначати, на скільки процентів зміниться обсяг виробництва, якщо кількість певного виду ресурсів збільшиться на 1%, тобто визначати еластичність обсягу виробництва за певним видом ресурсів. Поняття еластичності було раніше розглянуто для функції однієї змінної, де еластичність визначалася за формулою $E_x(y) = y'(x) \cdot \dfrac{x}{y}$. Для функцій кількох змінних похідну замінюють на частинну похідну за змінною, для якої розраховують еластичність. Так для виробничої функції Кобба-Дугласа еластичність обсягу виробництва за працею становить

$$E_L(y) = \frac{\partial y}{\partial L} \cdot \frac{L}{y} = \beta A K^{\alpha} L^{\beta-1} \cdot \frac{L}{A K^{\alpha} L^{\beta}} = \beta,$$

еластичність обсягу виробництва за працею відповідно дорівнює:

$$E_L(y) = \frac{\partial y}{\partial K} \cdot \frac{K}{y} = \alpha A K^{\alpha-1} L^{\beta} \cdot \frac{K}{A K^{\alpha} L^{\beta}} = \alpha.$$

Отже, з економічної точки зору параметри α та β у виробничій функції Кобба-Дугласа – це значення еластичності обсягу виробництва відповідно за працею та капіталом

Для спрощення складних обчислень на практиці часто використовують лінеаризацію функцій кількох змінних. Вона полягає у заміні функції $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ у околі точки $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ лінійною функцією

$$g(x_1, x_2, ..., x_n) = u\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right) + \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right) \cdot \left(x_1 - x_1^*\right) +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial x_2}\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right) \cdot \left(x_2 - x_2^*\right) + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right) \cdot \left(x_n - x_n^*\right).$$

При цьому різниця $u(x_1, x_2, ..., x_n) - g(x_1, x_2, ..., x_n)$ у околі точки $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ є нескінченно малою величиною того ж порядку, що й відстань між точками $(x_1, x_2, ..., x_n)$ та $\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$. При лінеаризації залежність приросту лінійної функції, що є апроксимацією заданої функції, від аргументів прямо пропорціональна приростам відповідних аргументів. При цьому коефіцієнтом пропорціональності є значення відповідної частинної похідної у точці $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$.

Розглянемо можливості лінеаризації виробничої функції на прикладі виробничої функції Кобба-Дугласа. Зафіксуємо поточний стан підприємства, тобто значення праці *L*, капіталу *K*, а також обсяг виробництва $y(K, L)$, що відповідає цим значенням.

При невеликих змінах капіталу та праці dK та dL замінимо зміну обсягу виробництва Δy повним диференціалом $dy = \frac{\partial y}{\partial K}dK + \frac{\partial y}{\partial L}dL$, що наближено дорівнює Δy. Величина $\frac{\partial y}{\partial L}$ – це гранична продуктивність праці, $\frac{\partial y}{\partial K}$ – гранична фондовіддача. Отже, $\frac{\partial y}{\partial K}dK$ – це вартість додаткової продукції, виробленої додатковим числом робітників dL, а $\frac{\partial y}{\partial L}dL$ – вартість додаткової продукції, виробленої за рахунок залучення додаткових виробничих фондів dK.

Отже, при невеликій зміні кількості робітників та кількості виробничих фондів зміна вартості виробленої продукції наближено дорівнює сумі вартостей додаткової продукції, виробленої за рахунок залучення додаткових робітників та додаткової продукції, виробленої за рахунок вводу в дію додаткових виробничих фондів. Для підрахунків можна використовувати граничну продуктивність праці та граничну фондовіддачу для поточного стану виробництва (до змін кількості робітників та виробничих фондів).

Розглянемо диференціальні властивості функції корисності. Функція корисності $u(x_1, x_2, .., x_n)$ *n* змінних відображає суб'єктивну числову оцінку індивідом корисності *u* набору *n* товарів $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, де x_i – кількість *i*-го товару. Будемо вважати, що кожний товар є бажаним, тобто зі зростанням кількості товару при незмінній кількості решти товарів корисність набору зростає. Вважаємо також, що функція корисності диференційовна до других похідних включно. Частинну похідну $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ називають *граничною корисністю i*-го товару. З властивостей функції корисності випливає, що всі її частинні похідні є додатними. Вектор-градієнт $\frac{\partial u}{\partial X} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ називають *вектором граничних корисностей*. Використання граничних корисностей дає можливість аналізу поведінки суб'єктів економічної діяльності.

Важливою властивістю функції корисності є те, що зі збільшенням споживання товару його гранична корисність зменшується, тобто другі частинні похідні виду $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0$. Цю властивість називають *першим законом Госсена*.

До функцій корисності відносять, наприклад, *функцію вартості* $u(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$, неокласичну функцію $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, де α, β – невід'ємні сталі, такі, що $\alpha + \beta \le 1$.

4.6 Застосування інтегрального числення у економічних дослідженнях

Застосування визначеного інтеграла у економічних дослідженнях ґрунтується на можливості подання багатьох економічних величин у вигляді інтегральних сум. Розглянемо задачу про обчислення кількості товару, виробленого за певний проміжок часу.

Нехай функція $y = f(t)$ описує зміну інтенсивності деякого виробництва. Знайдемо кількість товару Q, виготовлену за проміжок часу $[0; T]$. Для цього розіб'ємо відрізок $[0; T]$ на n проміжків точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = T$. Кількість товару ΔQ_i, вироблена за проміжок часу $[t_{i-1}, t_i]$, наближено можна знайти за формулою: $\Delta Q_i \approx f(c_i) \cdot \Delta t_i, c_i \in [t_{i-1}, t_i], \Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i = 1, 2, ..., n.$ Тоді кількість товару $Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta t_i$. При $\max_{1 \le i \le n} \Delta t_i \to 0$ отримуємо:

$$Q = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta t_i = \int_0^T f(t) dt.$$

Приклад 4.7. Знайти денний обсяг виробництва продукції, якщо продуктивність праці на протязі робочого дня змінюється у залежності від часу (у годинах) за формулою $f(t) = -0{,}1t^2 + 0{,}8t + 10$, а тривалість робочого дня складає 8 годин.

Розв'язання. Обсяг виробництва продукції

$$Q=\int_0^T f(t)\,dt=\int_0^8\left(-0{,}1t^2+0{,}8t+10\right)dt=\left(-0{,}1\cdot\frac{t^3}{3}+0{,}4t^2+10t\right)\Bigg|_0^8\approx 88{,}53.$$

Розглянемо приклади застосування визначеного інтеграла при розв'язуванні деяких інших економічних задач.

Приклад 4.8. Нехай на складі зберігають деякий витратний матеріал. Витрати зберігання одиниці цього матеріалу за одиницю часу дорівнюють h. Величина запасу матеріалу на складі є функцією часу *f(t)*. Знайти витрати на зберігання запасу матеріалу при його рівномірному витрачанні від Q до 0 за час T

Розв'язання. Витрати на зберігання матеріалу за час від a до b обчислюють за допомогою інтегралу $\int_a^b h\cdot f(t)\,dt$. При рівномірному витрачанні матеріалу за час T від величини запасу Q до нуля рівень запасу у момент часу t є лінійною функцією, причому $f(0)=Q,\ f(T)=0$. Отже, у цьому випадку маємо $f(t)=Q\left(1-\frac{t}{T}\right)$. Тоді витрати на зберігання запасу за час T становлять:

$$\int_0^T h\cdot Q\left(1-\frac{t}{T}\right)dt=hQ\cdot\left(t-\frac{t^2}{2T}\right)\Bigg|_0^T=hQ\cdot\left(T-\frac{T}{2}\right)=\frac{hQT}{2}.$$

Приклад 4.9. Нехай граничні витрати підприємства $f(Q)=Q^2+3Q+5$. Знайдіть сумарні витрати за умови, що постійні витрати дорівнюють 90 г.о.

Розв'язання. Граничні витрати визначаються як похідна сумарних витрат по обсягу виробництва, отже, для знаходження сумарних витрат потрібно знайти інтеграл по обсягу виробництва від граничних витрат:

$$F(Q)=\int f(Q)\,dQ=\int\left(Q^2+3Q+5\right)dQ=\frac{Q^3}{3}+\frac{3Q^2}{2}+5Q+C.$$

Оскільки сталі витрати мають місце і при відсутності виробництва ($Q=0$), то $F(0)=90$, то $C=90$ і сумарні витрати мають вигляд:

$$F(Q)=\frac{Q^3}{3}+\frac{3Q^2}{2}+5Q+90.$$

Запитання та завдання для самоперевірки

1. Надайте означення поняття функції.
2. Які функції називають парними? Які функції називають непарними? Наведіть приклади.
3. Які функції називають обмеженими? Наведіть приклади.
4. Надайте означення зростаючої, спадної, незростаючої та неспадної функції. Наведіть приклади.
5. Надайте означення функції, опуклої вгору та функції, опуклої вниз. Наведіть приклади.

6. Наведіть приклади функцій, що використовуються у економічних дослідженнях.
7. Сформулюйте означення похідної функції у точці.
8. Сформулюйте означення еластичності.
9. Наведіть формулу кінцевої еластичності
10. Наведіть формули середньої та логарифмічної еластичності
11. Чи залежить еластичність від одиниць виміру показників?
12. Наведіть формулу еластичності добутку, частки та суми двох показників.
13. Вкажіть основні види еластичності, що застосовуються у економічних дослідженнях.
14. Надайте означення сумарних, середніх та граничних величин у економіці. Наведіть приклади.
15. Наведіть приклади функцій кількох змінних, що використовуються у економічних дослідженнях.
16. Що називають ізоквантами та ізоклиналями виробничої функції?
17. Попит на товар описується рівнянням $q = 2400 - 100p$, пропозиція цього товару – $s = 1000 + 250p$, p – ціна товару. Визначте параметри рівноваги ринку. Яку кількість товару бажають придбати за ціною 3 г.о. за одиницю? Яку кількість товару буде запропоновано при ціні 5 г.о. за одиницю?
18. Як визначаються граничні величини у неперервному та дискретному випадках?
19. Нехай $s = 200p$ – функція пропозиції. Знайдіть обернену функцію, що виражає залежність ціни товару від величини пропозиції. При якій ціні величина пропозиції становитиме 1000 г.о.?
20. Чи є обмеженою функція Торнквіста $y = \dfrac{ax}{x+b}, a, b - \mathrm{const}$, що описує залежність попиту y на предмети першої необхідності від доходу x споживача?
21. Функція корисності повинна задовольняти дві умови: її перша похідна повинна бути додатною, а друга від’ємною. Зі змістовної точки зору корисність товару повинна зростати зі збільшенням його кількості, проте зростання кількості товару, що споживається супроводжується зменшенням його корисності. Переконайтесь у тому, що наведені нижче функції відповідають цим умовам функції корисності: а) $y = \ln x$; б) $y = \sqrt{x}$.
22. Залежність між виробничими витратами y (г.о.) та обсягом виробленої продукції x (г.о.) визначається функцією $y = 50x - 0,05x^3$. Знайти середні та граничні витрати, якщо обсяг виробництва складає 10 г.о.
23. Функція виробничих витрат підприємства має вигляд $y(x) = 0,1x^3 - 1,2x^2 + 5x + 250$. Знайти середні та граничні виробничі витрати. Обчислити їх значення, якщо обсяг виробництва x дорівнює 10 г.о.
24. Залежність обсягу u (од.) продукції, виробленого бригадою робітників, від часу t (год.) визначається рівністю $u(t) = -\dfrac{5}{6}t^3 + \dfrac{15}{2}t^2 + 100t$, $0 \le t \le 8$. Знайти продуктивність праці бригади робітників та швидкість її зміни через 1 годину після

початку роботи та за 1 годину до її завершення.

25. Залежність між собівартістю одиниці продукції y (г.о.) та її валовим обсягом виробництва x (г.о.) визначається рівністю $y = 80000 - 500x$. Знайти еластичність собівартості за обсягом виробництва для обсягу виробництва 60 г.о.
26. Залежність між попитом q та ціною p одиниці продукції підприємства визначається співвідношенням $q = 18 - \sqrt{p}$. Знайти еластичність попиту за ціною. З'ясувати, при яких значеннях ціни попит є нейтральним, еластичним та нееластичним.
27. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд:

$$q = \frac{p+8}{p+2},\ s = p + 0,5;$$

де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту, s – пропозиції. Знайти: а) ціну рівноваги, яка урівноважує попит та пропозицію на ринку; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну попиту при збільшенні ціни на 5% у порівнянні з ціною рівноваги.

28. Як пов'язані між собою граничні та середні повні витрати підприємства, якщо еластичність повних витрат дорівнює 1?
29. Задано функцію $y(x)$ повних витрат підприємства на виробництво x одиниць продукції. Визначити зв'язок між значеннями еластичності повних та середніх витрат.
30. Залежність між виробничими витратами y (г.о.) та обсягом виробництва x (г.о.) є функцією $y = 10x - 0,04x^3$. Визначити середні та граничні витрати при $x = 5$ г.о.
31. Залежність повних витрат y (г.о.) від обсягу виробництва x (г.о.) є функцією $y = x^3 - 2x^2 + 96$. При якому обсязі виробництва граничні та середні витрати співпадають? Знайти еластичності повних та середніх витрат при заданому обсязі виробництва.
32. Знайти еластичність попиту q (од.) на товар при заданій його ціні p г.о., якщо а) $q + 10p = 50,\ p = 3$; б) $5q + 3p = 70,\ p = 10$; в) $p^2 + p + 4q = 26,\ p = 2$.
33. Залежність споживання y від доходу споживача x має вигляд: $y = \frac{ax}{x+b}$. Показати, що еластичність споживання за доходом залежить від значення параметра a та прямує до нуля при необмеженому зростанні доходу.
34. Нехай виробнича функція є виробничою функцією Кобба-Дугласа. Щоб збільшити обсяг виробництва на 3%, потрібно збільшити виробничі фонди на 6% або чисельність робітників на 9%. У минулому році один робітник за місяць виробляв продукції на 1 млн. г.о., всього на підприємстві 1000 робітників. Основні фонди оцінювалися в 10 млрд. г.о. Записати вираз для виробничої функції та знайти

величину середньої фондовіддачі.

35. Для виробничої функції Кобба-Дугласа $y = 1000K^{1/2}L^{1/3}$ знайти середню та граничну продуктивність праці, середню та граничну фондовіддачу, еластичності обсягу виробництва за працею та капіталом.
36. Для функції корисності $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}$ побудувати криві байдужості (лінії рівня функції корисності). Знайти вектор граничних корисностей. Перевірити виконання першого закону Госсена.
37. Знайдіть граничні корисності для наступних функцій корисності: а) $u = 3x_1 + 5x_2$; б) $u = \min\{x_1, 2x_2\}$.
38. Знайдіть сумарний доход *R*, якщо граничний доход $MR = 9 - 6Q$.
39. Визначте споживання С, якщо граничне споживання $C_Y = 0,5 + \frac{0,1}{\sqrt{Y}}$, причому споживання дорівнює 85 г.о., коли національний доход *Y* дорівнює 100 г.о.
40. Знайти зростання загальних витрат при зростанні виробництва від 6 до 10 одиниць продукції, якщо залежність маржинальних витрат *MF* підприємства від обсягу *x* виробництва визначається функцією $MF = -3x^2 + 200x + 60$.