Практичне заняття № 4. Послідовності. Границі послідовності.

Приклад 1. Для заданої послідовності записати її перші чотири члени:

а) $x_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$; б) $x_1 = \begin{cases} -n^2, n - \text{непарне}, \\ \dfrac{n-1}{n}, n - \text{парне}; \end{cases}$ в) $x_1 = 1; x_n = \dfrac{x_{n-1}}{2} + 1, n > 1$.

Розв'язання. Підставимо у вирази для x_n послідовно $n = 1,\ n = 2,\ n = 3,\ n = 4$.

а) $x_1 = \dfrac{1}{1\cdot 2} = \dfrac{1}{2},\ x_2 = \dfrac{1}{2\cdot 3} = \dfrac{1}{6}.\ x_3 = \dfrac{1}{3\cdot 4} = \dfrac{1}{12},\ x_4 = \dfrac{1}{4\cdot 5} = \dfrac{1}{20}$:

б) $n = 1 -$ непарне, $x_1 = -1^2 = -1$, $n = 2$ – парне, $x_2 = \dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2}$, $n = 3$ – непарне, $x_3 = -3^2 = 9$, $n = 4$ – парне, $x_4 = \dfrac{4-1}{4} = 3$;

в) послідовність задана рекурентним способом, $x_1 = 1$ – задане, $x_2 = \dfrac{x_1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$,

$x_3 = \dfrac{x_2}{2} + 1 = \dfrac{3/2}{2} + 1 = \dfrac{7}{4},\ x_4 = \dfrac{x_3}{2} + 1 = \dfrac{7/4}{2} + 1 = \dfrac{15}{8}$.

Приклад 2. Довести обмеженість послідовностей: а) $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$; б) $x_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$.

Розв’язання. а) $x_n = \frac{n^2}{n^2+1} = \frac{\left(n^2+1\right)-1}{n^2+1} = 1 - \frac{1}{n^2+1}$. З останньої рівності випливає, що $\frac{1}{2} < x_n < 1$, тобто $\left|x_n\right| < 1$, тому послідовність $\left\{x_n\right\}$ обмежена.

б) $\left|x_n\right| = \left|\sin\frac{n\pi}{4}\right| \le 1$. Послідовність обмежена.

Приклад 3. Довести, що послідовність $\left\{x_n\right\}$ зростає, якщо $x_n = \frac{2n-1}{3n+2}$.

Розв'язання. Покажемо, що $x_{n+1} > x_n$, тобто $x_{n+1} - x_n > 0$. $x_{n+1} = \frac{2\left(n+1\right)-1}{3\left(n+1\right)+2} = \frac{2n+1}{3n+5}$,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n+1}{3n+5} - \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{\left(2n+1\right)\left(3n+2\right)-\left(2n-1\right)\left(3n+5\right)}{\left(3n+5\right)\left(3n+2\right)} = \frac{7}{\left(3n+5\right)\left(3n+2\right)} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Отже, $x_{n+1} > x_n$, послідовність $\left\{x_n\right\}$ зростає.

Приклад 4. Довести, що послідовність $\left\{x_n\right\}$ спадає, якщо $x_n = \frac{2n+1}{6n-5}$.

Розв’язання. Для спадної послідовності $x_{n+1} < x_n$, тому $x_{n+1} - x_n < 0$. Для заданої послідовності

$$x_{n+1} = \frac{2\left(n+1\right)+1}{6\left(n+1\right)-5} = \frac{2n+3}{6n+1}.$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n+3}{6n+1} - \frac{2n+1}{6n-5} = \frac{\left(2n+3\right)\left(6n-5\right)-\left(2n+1\right)\left(6n+1\right)}{\left(6n+1\right)\left(6n-5\right)} = -\frac{16}{\left(6n+1\right)\left(6n-5\right)} < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $x_{n+1} - x_n < 0$, то $x_{n+1} < x_n$, послідовність $\left\{x_n\right\}$ спадає.

Приклад 5. Довести, що послідовність $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + 1,\ n > 1$ зростає.

Розв'язання. При $n > 1$ маємо: $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n}{2} + 1 - x_n = 1 - \dfrac{x_n}{2}$. Для доведення зростання заданої послідовності покажемо, що $x_{n+1} - x_n = 1 - \dfrac{x_n}{2} > 0$. Для цього покажемо, що $x_n < 2$. Використаємо метод математичної індукції. $x_1 = 1 < 2$. Нехай для довільного $n = k$ виконується нерівність $x_{k+1} = \dfrac{x_k}{2} + 1 < 2$. Покажемо, що звідси випливає істинність нерівності і при $n = k + 1$, тобто $x_{k+2} = \dfrac{x_{k+1}}{2} + 1 < 2$. Дійсно, при $x_{k+1} < 2$ отримуємо, що $x_{k+2} = \dfrac{x_{k+1}}{2} + 1 < \dfrac{2}{2} + 1 = 2$. Отже, $x_{k+1} < 2 \Rightarrow x_{k+2} < 2$. Згідно з методом математичної індукції $x_n < 2\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Отже, $x_{n+1} - x_n = 1 - \dfrac{x_n}{2} > 0$, тому послідовність зростає.

Приклад 6. Довести, що число a є границею послідовності $\{x_n\}$, якщо а) $x_n = \dfrac{2n+1}{2n+5},\ a = 1$;

б) $x_n = \dfrac{1}{n!},\ a = 0$.

Розв'язання. Для доведення того, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, використаємо означення границі послідовності:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0\ |x_n - a| < \varepsilon$$

а) $\left|x_n - a\right| = \left|\dfrac{2n+1}{2n+5} - 1\right| = \left|\dfrac{2n+1-(2n+5)}{2n+5}\right| = \left|\dfrac{-4}{2n+5}\right| = \dfrac{4}{2n+5} < \varepsilon$.

З цієї невірності визначимо такий номер n_0, що $\forall n > n_0$ $\dfrac{4}{2n+5} < \varepsilon$. Отримуємо:

$$\frac{4}{2n+5} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{4-(2n+5)\varepsilon}{2n+5} < 0.$$

Оскільки знаменник $2n+5>0\ \forall n \in \mathbb{N}$, то $4-(2n+5)\varepsilon < 0$. Звідси $2n+5 > \dfrac{4}{\varepsilon}$, $n > \dfrac{2}{\varepsilon} - \dfrac{5}{2}$. З цієї нерівності випливає, що за n_0 можна вибрати будь-яке натуральне число більше $\dfrac{2}{\varepsilon} - \dfrac{5}{2}$, наприклад, $n_0 = \left[\dfrac{2}{\varepsilon} - \dfrac{5}{2}\right] + 1$. Тоді $\forall n > n_0$ $\left|x_n - a\right| = \left|\dfrac{2n+1}{2n+5} - 1\right| < \varepsilon$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{2n+5} = 1$.

б) Потрібно довести, що $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \left|\dfrac{1}{n!} - 0\right| = \dfrac{1}{n!} < \varepsilon \quad \forall n > n_0$.

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} < \frac{1}{2\cdot 2 \ldots \cdot 2} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Останню нерівність отримуємо, замінивши у знаменнику дробу $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$ кожен з множників 2, 3,…, n на 2. При цьому ми зменшуємо знаменник дробу і збільшуємо дріб.

З нерівності $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$ знаходимо, що $2^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} + 1$. За n_0 виберемо будь-яке натуральне число більше $\log_2 \frac{1}{\varepsilon} + 1$, наприклад, $n_0 = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right] + 2$. Тоді $\forall n > n_0 \; |x_n - a| = \left| \frac{1}{n!} - 0 \right| < \varepsilon$, отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

До **основних формул**, що використовуються при обчисленні границь послідовностей, відносять наступні:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, \; |a| < 1 \\ +\infty, \; a > 1, \\ \text{не існує}, \; a \le -1. \end{cases}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \; \alpha > 0$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \; a = \text{const}$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0, \quad |a| > 1$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \; a = \text{const}$.

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{\alpha_n} = \infty, \; c - \text{const}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0,$ якщо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e, \quad e=2,718281...$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\alpha_n\right)^{\frac{1}{\alpha_n}}=e$, де α_n – нескінченно мала послідовність.

Розглянемо типові приклади обчислення границь послідовностей.

Приклад 7. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n+4}{n^2+2n-1}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник та знаменник дробу на n^2 (старший степінь у чисельнику та знаменнику дробу). Отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{n^2+2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}$$

При $n\to\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ (це границі виду $\dfrac{c}{\infty}=0, c=\mathrm{const}$). Тому, використавши теореми про границі суми, різниці та частки послідовностей, маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{n^2+2n-1}=\frac{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{3+0+0}{1+0+0}=3.$$

Приклад 8. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n^3+7n-4}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник та знаменник дробу на n^3 (старший степінь у чисельнику та знаменнику дробу). Отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{n^3+7n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{1+\frac{7}{n^2}-\frac{4}{n^3}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^3}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^3}}=\frac{0+0}{1+0-0}=0.$$

Приклад 9. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+2n+3}{n^2+3n+1}$.

Розв'язання. Поділивши чисельник та знаменник дробу на n^4, знаходимо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n+3}{n^2+3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^3}+\frac{3}{n^4}}{\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}}=\frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^4}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}}=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty.$$

Зауваження. Нехай загальний член послідовності – це дріб, у чисельнику та знаменнику якого знаходяться многочлени або ірраціональні вирази. Нехай m – старший степінь чисельника, k – старший степінь знаменника. Тоді при $m=k$ границя послідовності дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях чисельника та знаменника, при $m<k$ ця границя дорівнює нулю, при $m>k$ вона дорівнює нескінченності.

Приклад 10. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{2n^6+3n^5-2n}-5n+1}{4n^2+2\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Старший степінь чисельника $m=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$, старший степінь знаменника $k=2$. Для даної послідовності $m<k$, тому границя дорівнює нулю.

Приклад 11. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n+2}{6n^2+7}$.

Розв'язання. Старший степінь чисельника $m=2$, старший степінь знаменника $k=2$. Маємо $m=k$, тому границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях чисельника та знаменника, тобто при n^2: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n+2}{6n^2+7}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

Приклад 12. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+...+n}{5n^3+1}$.

Розв'язання. Сума перших n натуральних чисел $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Отже, отримуємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+...+n}{5n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{5n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2(5n^3+1)}.$$

Старший степінь чисельника $m=2$, старший степінь знаменника $k=3$. Оскільки $m<k$, то границя даної послідовності дорівнює нулю.

Приклад 13. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3}{2n^2+2}-\dfrac{5n^2-1}{5n+1}\right)$.

Розв'язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3}{2n^2+2}=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-1}{5n+1}=\infty$. Маємо так звану невизначеність виду $(\infty-\infty)$. Виконаємо віднімання дробів у дужках.

$$\frac{2n^3}{2n^2+2}-\frac{5n^2-1}{5n+1}=\frac{2n^3(5n+1)-(5n^2-1)(2n^2+2)}{(2n^2+2)(5n+1)}=\frac{2n^3-13n^2+3}{10n^3+2n^2+15n+2}.$$

Отже, отримали $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3}{2n^2+2}-\dfrac{5n^2-1}{5n+1}\right)=\lim\dfrac{2n^3-13n^2+3}{10n^3+2n^2+15n+2}\underset{n\to\infty}{}=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$.

Приклад 14. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}\right)$.

Розв'язання. Помножимо та поділимо вираз $\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}$ на спряжений до нього вираз $\sqrt{2n+3}+\sqrt{n+1}$. Отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{2n+3}+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)-(n+1)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n+1}}=+\infty,$$

оскільки старший степінь чисельника $m=1$, старший степінь знаменника $k=\frac{1}{2}$, тобто $m>k$.

Приклад 15. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n!\cdot(n+1)-n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n!\cdot(n+1-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Розглянемо обчислення границь послідовностей, пов'язаних з використанням числа «e». Воно ґрунтується на застосуванні формули (9): $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e, \quad e=2,718281...$ Тут при $n\to\infty$ отримуємо так звану невизначеність виду $\left(1^{\infty}\right)$.

Формулу (9) часто застосовують у вигляді формули (10): $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\alpha_n\right)^{\frac{1}{\alpha_n}}=e$, де α_n – нескінченно мала послідовність, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

Приклад 16. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$.

Розв'язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{n}=\left(1^{\infty}\right)$. Маємо невизначеність виду $\left(1^{\infty}\right)$, тому потрібно застосувати формулу (10): $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\alpha_n\right)^{\frac{1}{\alpha_n}}=e$, де α_n – нескінченно мала послідовність. У нашому прикладі $\alpha_n=\dfrac{3}{n}$. Отримуємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}\cdot 3}=e^{3},$$

оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\alpha_n\right)^{\frac{1}{\alpha_n}}=e$.

Приклад 17. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+4}\right)^{2n+3}$.

Розв'язання. Маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+4}\right)^{2n+3}=\left(1^{\infty}\right)$, отже, потрібно застосувати формулу (10). Для цього виконаємо наступне перетворення загального члена послідовності:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+4}\right)^{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{n-1}{n+4}-1\right)\right)^{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{5}{n+4}\right)\right)^{2n+3}.$$

Тут $\alpha_n=-\dfrac{5}{n+4}$. Виділимо вираз виду $\left(1+\alpha_n\right)^{\frac{1}{\alpha_n}}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{5}{n+4}\right)\right)^{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{5}{n+4}\right)\right)^{-\frac{n+4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{n+4}\right)\cdot(2n+3)}=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5(2n+3)}{n+4}}=e^{-10}.$$

Домашнє завдання:

1. Довести обмеженість послідовностей: а) $x_n=\dfrac{2n-1}{\sqrt{n^2+4}}$; б) $x_n=2^{\cos n}$.

2. Довести, що послідовність $x_n=n^2-2n$ є необмеженою.

3. Обчислити границі: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5\sqrt{n^2+2}+4n}{2n+5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n\sqrt{n}+3n-1}{\sqrt{4n^5+2}-\sqrt{n}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3+2n^2-3}{5n+1}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n-1)}\right)$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-1}{3n^2+2n}\right)^{4n^2}$