Тема 2. Добуток визначників.

Нехай маємо два визначника $n-го$ порядку $|a_{ik}|$ і $|b_{ik}|$. Складаємо новий визначник $|c_{ik}|$, елементи якого обчислюються по одній з наступних формул

$$c_{ik}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sk}\,,\quad c_{ik}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{ks}\,,\quad c_{ik}=\sum_{s=1}^{n}a_{si}b_{sk}\,,\quad c_{ik}=\sum_{s=1}^{n}a_{si}b_{ks}\,.$$

При цьому величина визначника $|c_{ik}|$ дорівнює ***добутку визначників*** $|a_{ik}|$ і $|b_{ik}|$.

Приклад 1. Перемножити визначники $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&4&2\\4&5&4\end{vmatrix}$ і $\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-4&3\\1&-5&2\end{vmatrix}$, використовуючи всі чотири способи.

1) Множимо рядки на стовпці: $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&4&2\\4&5&4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-4&3\\1&-5&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&-26&13\\12&-35&19\\17&-52&27\end{vmatrix}$;

2) Множимо рядки на рядки: $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&4&2\\4&5&4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-4&3\\1&-5&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2&-3\\-4&-7&-13\\-3&-4&-13\end{vmatrix}$;

3) Множимо стовпці на стовпці $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&4&2\\4&5&4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-4&3\\1&-5&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}9&-35&18\\13&-47&24\\12&-37&17\end{vmatrix}$;

4) Множимо стовпці на рядки: $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&4&2\\4&5&4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-4&3\\1&-5&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&1&-6\\-3&1&-8\\4&7&1\end{vmatrix}$.

Приклад 2. Обчислити визначник $|A|=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\-b&a&d&-c\\-c&-d&a&b\\-d&c&-b&a\end{vmatrix}$ шляхом піднесення його до квадрату.

$$|A|^2=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\-b&a&d&-c\\-c&-d&a&b\\-d&c&-b&a\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a&b&c&d\\-b&a&d&-c\\-c&-d&a&b\\-d&c&-b&a\end{vmatrix}=\{помножимо\ рядки\ на\ рядки\}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix}=$$

$$=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4.$$

Тоді $|A|=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

Приклад 3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$, представивши його у вигляді добутку визначників.

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & y_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}=0$$

для $n>2$.

Якщо $n=2$

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 \end{vmatrix}=1+x_2y_2+x_1y_1+x_1y_1x_2y_2-1-x_1y_2-x_2y_1-x_2y_1x_1y_2=$$

$$=(x_2-x_1)(y_2-y_1)$$

Матриці A і B називаються ***переставновочними***, якщо $AB=BA$.

Приклад 4. Знайти всі матриці, що є переставновочними з матрицею

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$