

## Лекція 2.2. Математичне моделювання

**Зміст.** Статистичні, фізичні та аналогові моделі. Класифікація моделей екосистем. Принципи побудови моделей. Блокові моделі. Промислові моделі. Методи визначення функцій регресії. Поняття макро та мікрокосмоса.

Статистична модель — абстрактна схема відношень між величинами, що характеризують властивості реального процесу, розробка якої здійснюється неформальним шляхом. Статистична модель являє собою процес генерування даних, часто в значно ідеалізованій формі.

У статистичній моделі поєднується інформація двох типів:

1. апіорі логічно обґрунтованих гіпотез щодо природи та характеру властивостей процесу, співвідношень і взаємозв'язків між ними;
2. емпіричних даних, які характеризують ці властивості.

Статистична модель зазвичай визначається за допомогою математичних рівнянь, які відносяться до однієї/кількох випадкових величин і інших невідповідних змінних. Таким чином, «модель є формальним поданням теорії» (Херман Адер з посиланням на Кеннет Болльна).

В цілому, статистичні моделі є частиною фундаменту статистичного висновування.

Використовуючи математичні терміни, статистична модель - це пара змінних  $(S, P)$ , де  $S$  - це множина спостережень (наприклад простір елементарних подій), а  $P$  - множина ймовірних розподілів на  $S$ .

Передбачається, що існує «істинний» розподіл ймовірностей, викликаний процесом, який генерує спостережувані дані. Виберемо  $P$  так, щоб зобразити множину розподілу, яка містить апроксимуючий розподіл. Немає строгої необхідності, щоб  $P$  містив дійсний розподіл, та й на практиці це трапляється рідко. Дійсно, як Burnham & Anderson константували, «Модель є спрощенням або наближенням до дійсності, а отже, не буде відображати всю реальність» - звідки і з'явилося твердження, що «всі моделі є неправильними».

Множина  $\mathcal{P}$  є у більшості випадків параметризованою:  $\mathcal{P} = \{ P_\theta : \theta \in \Theta \}$ . Множина  $\Theta$  визначає параметри моделі.

Параметризація зазвичай потрібна, аби мати різні значення параметрів, що приводять до різних розподілів, тобто  $P_{\theta_1} = P_{\theta_2} \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$  має виконуватися (іншими словами, вона повинна бути ін'єктивною). Параметризація, яка задовольняє умови, може бути ідентифікованою.

Статистична модель являє собою особливий клас математичної моделі. Статистичну модель від інших математичних моделей відрізняє те, що статистична модель не є детермінованою. Таким чином, у статистичній моделі, визначеної за допомогою математичних рівнянь, деякі зі змінних не мають конкретних значень, проте натомість мають розподіл ймовірностей, тобто деякі змінні є стохастичними.

Статистичні моделі часто використовуються навіть тоді, коли змодельований фізичний процес є детермінованим. Так, наприклад, підкидання монети, детермінований процес, але наразі він моделюється як стохастичний (через процес Бернуллі).

Статистичні моделі мають 3 основні цілі, згідно з теорією Konishi & Kitagawa:

1. Передбачення
2. Отримання інформації
3. Опис стохастичних структур

Передбачається, що існує «істинний» розподіл ймовірностей спостережуваних даних, викликаний процесом, генеруючим дані. Вибір моделі залежить від елементів з  $\mathcal{P}$ , яких апроксимація є найближчою до точного розв'язку.

Моделі можуть бути зіставлені один з одним для порівняння за допомогою пошукового аналізу даних або перевірки статистичних гіпотез. У пошуковому аналізі різноманітність моделей формулюється і оцінюється

залежно від того, наскільки добре кожна з моделей описує дані. При перевірці статистичних гіпотез раніше сформульована модель/моделі порівнюються з існуючими. Загальні критерії для порівняння моделей включають коефіцієнт детермінації, коефіцієнт Баєса, і перевірка відношенням правдоподібності.

Статичні моделі описують ті чи інші разові параметри об'єкта оригіналу, а динамічні – зміни цих параметрів у часі.

Приклад: температура тіла при одноразовому вимірі і графік її зміни протягом доби (“температурний лист”).

Розрізняють два основних види динамічних моделей (дискретну та безперервну).

Якщо характер вимірюваного параметра представлений набором його значень в деякі моменти тимчасового інтервалу, то таку модель називають дискретною.

Приклад: набір точок на температурному аркуші, відповідний значенням температури тіла при вимірюванні вранці і ввечері протягом декількох днів. Зазвичай ці значення виражають за допомогою чисел,  $t$  і  $E$  у цифровій формі.

То ж модель відображає динаміку вимірюваного параметра постійно за сигналами від датчика, то вона зазвичай представлена безперервною лінією (зокрема, температурної кривої), і така модель називається аналоговою. Типовим прикладом аналогової моделі є електрокардіограма.

Статистичне моделювання є історично найбільш розробленим, а сьогодні і найбільш популярним для використання при аргументації висновків у наукових роботах самого різного напрямку.

Методи статистичного моделювання використовуються для опису масових процесів, прогнозування, перевірки гіпотез, оцінки достовірності порівняльних результатів спостережень і експериментів і для прийняття оптимальних рішень.

У той же час потужний і добре розроблений апарат математичної статистики не дозволяє виявити причинно-наслідкові залежності між модельованими процесами (явищами), коли вони не відомі досліднику. Слід згадати і дуже давнє іронічне висловлювання одного з “математичних батьків” статистики: “Існує три види неправди (за збільшенням) – це брехня, нахабна брехня і статистика”.

У чому ж справа? Чому, з одного боку, багатовіковий відпрацьований математичний апарат підтвердження достовірності спостережуваних фактів і їх кількісної (!) Кореляції (збігу), а з іншого – “гірше нахабної брехні”? Відповідь проста. Апарат математичної статистики принципово не призначений для виявлення причинно-наслідкової залежності (зв'язків) між описаними подіями (спостереженнями). Він просто не придатний для цього. Він не може відповісти на питання “чому?”. Збіги в часі і просторі (кореляція) – скільки завгодно. Причинно-наслідкові висновки: “Вибачте, не можемо, не маємо права”. “Після цього – не означає внаслідок цього”, – стара, легко забувається істина. “Одночасно, і навіть в одному місці – не означає взаємопов'язано”. Може мати місце чиста випадковість.

Правда, існує сучасний апарат прикладної статистики, що володіє більш широкими можливостями, але він призначений для використання у відносно локальних областях.

Потужний розгалужений і витончений апарат статистичного моделювання повинен знати своє місце. Важливе, почесне, але тільки своє.

Є розхожим іронічний приклад “середньої температури по лікарні” як показнику якості її роботи. Однак пряме зіставлення таких значно серйозніших середньостатистичних показників, як загальна і навіть післяопераційна летальність (в лікарнях N і M), традиційно вважається достатнім для висновків про порівняльну якість їх роботи.

Слід пам'ятати, що істинність моделі не є гарантією її адекватності. Зокрема, це може бути зумовлено накопиченням похибок за необхідності виконання великого обсягу розрахунків. З іншого боку, адекватними можуть бути моделі, що не є істинними. Типовими прикладами є регресійні моделі, які дають змогу прогнозувати поведінку досліджуваної системи в деякому діапазоні зміни міною генеральних сукупностей вибірками обмеженого обсягу, використанням даних, підданих попередній статистичній обробці, тощо. Вона може бути зменшена тільки шляхом виконання повторних або додаткових експериментів та спостережень.

Похибка розрахункового алгоритму пов'язана зі спрощеннями та припущеннями, що роблять при заміні вихідної математичної моделі алгоритмом обчислень. Зокрема, більшість методів чисельного знаходження

інтегралів використовує заміну площі під кривою, що інтегрується, на суму площ відносно простих фігур. При цьому похибка інтегрування суттєво залежить від того, які саме фігури буде обрано для наближення, а також від кількості ділянок, на які розбивають інтервал інтегрування. Багато алгоритмів використовують ітераційні процедури, що теоретично можуть виконуватися нескінченно довго, поступово наближуючись до точного розв'язку. Але у практиці час виконання ітерацій має бути обмеженим. Тому необхідно заздалегідь встановити точність результату, яка задовольняє дослідника.

Похибка обчислень пов'язана з необхідністю обмеження кількості значущих цифр у числах, з якими виконують розрахунки.

Похибки розрахункового алгоритму та обчислень належать до усувних похибок, оскільки вони можуть бути зменшені до необхідного рівня шляхом унесення змін до алгоритму та підвищення точності розрахунків. Похибки вихідних даних та моделі належать до неусувних похибок. Це треба розуміти так: ці похибки не можна усунути або зменшити математичними методами, але точність моделювання може бути підвищена шляхом обрання більш адекватної моделі (цей етап є неформальним, і для його реалізації необхідно використовувати не тільки математичні методи, а й дані відповідних конкретних наук), а також підвищення точності вихідних даних.

При побудові моделі необхідно прагнути до балансу похибок різного типу. Це зумовлено тим, що похибка моделювання визначається найбільшою з них. Підвищувати точність розрахунків на деякому етапі моделювання недоцільно, якщо вихідні дані для нього мають суттєво меншу точність або якщо результати цього етапу потім використовують для розрахунків зі значно більшою похибкою. Можна рекомендувати таку послідовність балансу похибок.

Існує обмежені можливості статистичного моделювання – це вплив непередбачуваних та невідомих параметрів які інколи впливають на систему.

Фізична модель — фізичне уявлення системи, об'єкта, явища або процесу з метою їхнього дослідження, тобто представлення за допомогою іншого фізичного («реального») об'єкта, що має в тому чи іншому аспекті «аналогічну» динаміку «поведінки», що водночас означає, що математичні моделі об'єкта дослідження та об'єкта-моделі є «аналогічними» (якщо не

тотожними). Відповідно вимірювання параметрів об'єкта-моделі дозволяє отримати значення параметрів об'єкта дослідження.

До фізичних моделей відноситься надзвичайно широкий спектр засобів, класичними прикладами яких є:

модель літака для «продувки» в аеродинамічній трубі з метою дослідження саме аеродинамічних (інколи — термодинамічних чи інших) характеристик літака (фізичні процеси у об'єкті-моделі та об'єкті дослідження мають однакову природу);

аналогова обчислювальна машина (фізичні процеси у об'єкті-моделі та об'єкті дослідження мають різну природу за винятком, очевидним чином, випадків моделювання процесів в електронних приладах); та багато інших.

Фізична модель — установка, пристрій або пристосування, що дозволяють здійснювати фізичне моделювання, тобто заміщення фізичного процесу, що вивчається, подібним до нього процесом тієї ж фізичної природи.

Установки, пристрої і пристосування, на яких проводиться дослідження — це фізичні моделі, якщо вони зберігають фізичну подібність процесів моделі тим процесам, які цікавлять дослідника в системі (об'єкті, натурі, оригіналі), що навчається, відтворюючи їх у тому ж вигляді або в інших масштабах.

При цьому під фізичною подібністю, що здійснюється у моделі, розуміється однозначна відповідність між параметрами об'єкта і його розмірних математичних описів процесів в об'єкті і його моделі, що вивчається. Подібні величини, що характеризують процеси, відрізняються тільки масштабами, і за заданими характеристиками одного процесу можна однозначно отримати характеристики іншого.

Фізичні моделі широко застосовуються в електро- теплоенергетиці, в гідро- і аеродинаміці, в будівельній справі (архітектурна модель), кораблебудуванні, геології, радіотехніці, в різного роду завданнях.

Масштабна модель — фізична модель, подібна до даної системи тільки в зміненому масштабі, (наприклад, точна копія літака, розмір якого становить одну десятину фактичного літака).

#### *Характеристики моделей*

Моделі оцінюють за такими параметрами:

а) реалістичність — ступінь якісної адекватності математичної моделі екологічному об'єкту, що описується нею; тобто ця характеристика показує, наскільки якісні властивості даного математичного твердження відповідають словесному опису екологічного об'єкта;

б) точність — здатність моделі прогнозувати кількісні зміни в системі або відтворювати (імітувати) дані, на яких вона будується;

в) загальність — діапазон застосовності моделі для опису різних за змістом екологічних об'єктів, явищ і ситуацій.

### *Особливості моделювання в екології*

Моделювання є одним з головних засобів пізнання в екології. На цей час тут широко використовуються такі методи, як:

- натурно-експериментальне моделювання;
- математичне (у тому числі числове) моделювання;
- системне моделювання.

Першими математичними моделями були роботи В. Вольтерра й А. Лоткі: математична теорія динаміки популяцій, модель "хижак — жертва" (20-і — 30-і роки ХХ ст.). У 50-і роки Е. Кернер створює так звану "статистичну механіку біологічних асамблей" (для складних біоценозів з великим числом взаємодіючих видів). Надалі у зв'язку з великими труднощами математизації складних біологічних і екологічних об'єктів були взяті на озброєння методи кібернетики (системне моделювання).

Основні фактори, що враховуються при екологічному моделюванні. Основні фактори, що враховуються при моделюванні екологічних систем, можна підрозділити на такі дві групи:

а) фактори зовнішнього впливу:

- кліматичні зміни (температура, опади тощо);
- антропогенне втручання і таке ін.;

б) внутрішні фактори:

- конкуренція;
- паразитизм;
- хижацтво;
- захворюваність та її поширення;
- трофічні ланцюги.

При цьому потрібно враховувати, що вплив таких факторів характеризується наявністю:

- ефекту запізнення;
- кумулятивного ефекту;
- граничних ефектів.

Як правило, математичний опис впливу факторів зв'язаний з великою кількістю взаємозалежних змінних, зв'язаних між собою нелінійними співвідношеннями, що сильно ускладнює задачу і вимагає застосування ЕОМ.

#### *Принципи екологічного моделювання*

При побудові моделей екологічних процесів застосовують наступні основні принципи.

##### 1) Принцип системності.

Внаслідок пересиченості екосистем зв'язками екологічні об'єкти являють собою єдину систему. З цієї причини в екології виявилось необхідним злиття методів системного аналізу і математичного моделювання. Це призвело до створення інтегрального методу системного моделювання — вищого етапу в розвитку екологічного моделювання.

Принцип системності полягає в усвідомленні цілісності об'єктів світу, їхньої стійкості, взаємодії із зовнішнім світом тощо; інший аспект цього принципу — динамічна багатогранність, єдність якості й кількості, теорії та практики.

##### 2) Принцип єдності структурності та ієрархічності.

Фундаментальна риса екосистем — наявність у них складних ієрархічних структур. Звідси випливає вимога єдності структурності й ієрархічності системних екологічних моделей. Відповідно виникає проблема структурування моделі, тобто виділення істотних підсистем і елементів із сукупності всіх зв'язків і компонентів.

Звичайно систему організують найбільш залежні одне від одного елементи (підсистеми). Інші впливають на поведінку системи слабо, а через їхню велику кількість — неузгоджено; отже, їх можна розглядати як інтегровані зовнішні чи внутрішні фактори впливу.

##### 3) Принцип багатомодельного опису.



Через динамізм і складність екологічних об'єктів, що виникають у результаті множинності мети антропогенного втручання, на сьогодні немає можливості побудови єдиної теорії соціоекосистеми в класичному розумінні, тобто як дедуктивної моделі, з якої можна вивести всі можливі наслідки. Тому наука йде по шляху створення множинних взаємодоповнюючих моделей.

#### 4) Принцип єдності формалізованого і неформалізованого опису.

Досвід перших глобальних моделей розвитку світової соціоекосистеми, побудованих за замовленням Римського клубу, показав: єдиного формалізованого (математичного) опису недостатньо для адекватного моделювання соціоекосистеми. Для цього необхідно враховувати неформальні фактори і доповнювати формалізований опис (з позицій історичного, психологічного та ін. підходів) неформалізованим описом.

#### 5) Принцип визнання фундаментальності екологічних процесів.

Екологічні процеси неможливо звести до простої сукупності біологічних, фізичних, економічних процесів, оскільки всі вони тісно переплетені між собою. У цьому переплетенні виникають нові, екологічні закономірності. Звідси впливає самостійна значимість екологічних цінностей.

#### 6) Принцип єдності теорії та практики.

Благополуччя соціоекосистеми, частиною якої є Людина, має для неї найважливіше значення. Тому екологія є не тільки фундаментальною, але і прикладною наукою, що поєднує пізнання екологічних закономірностей із практичним їхнім застосуванням у повсякденній діяльності Людини. Ця єдність виражається у вигляді принципу: "Не тільки дивися і думай — роби".

#### Значення моделювання в екології

За допомогою моделювання одержують можливість оцінювання потенційних наслідків застосування різних стратегій оперативного керування, впливу на екосистему, користування природними ресурсами (біотичними й абіотичними), оптимізації екосистем. Моделювання дозволяє глибоко проникнути в сутність явищ, зрозуміти їхню справжню природу.

