

Практичне заняття на тему: «Обчислення границь функцій»

У найпростіших випадках знаходження границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ граничного значення аргументу x_0 .

Приклад 1. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 1} (5x^3 + 2x + 3)$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (5x^3 + 2x + 3) &= \lim_{x \rightarrow 1} (5x^3) + \lim_{x \rightarrow 1} (2x) + \lim_{x \rightarrow 1} 3 = 5 \lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + 3 = \\ &= 5 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 + 3 = 10. \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}$.

Розв'язання. При $x \rightarrow 2$ границя знаменника $2^2 - 6 \cdot 2 + 8 = 0$, тобто $x = 2$ – корінь знаменника. Безпосередньою підстановкою можна впевнитися, що 2 є також коренем чисельника.

Для знаходження заданої границі розкладемо на множники чисельник та знаменник дробу. Отримаємо:

$$\frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \frac{(x + 16)(x - 2)}{(x - 2)(x - 4)} = \frac{x + 16}{x - 4}.$$

Скорочення дробу на $x - 2$ тут є допустимим, оскільки $x \rightarrow 2$, але $x \neq 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 16}{x - 4} = \frac{18}{-2} = -9.$$

При обчисленні даної границі ми зустрілися з випадком, коли підстановка x_0 у вираз під знаком границі приводить до виразу виду $\left(\frac{0}{0}\right)$, який для обчислення границі потрібно перетворити. При обчисленні границь, коли $x \rightarrow x_0$, підстановка замість змінної x числа x_0 досить часто приводить до виразів виду $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (1^∞) , $(\infty)^0$, (0^0) . Такі вирази називають *невизначеностями*, а перетворення цих виразів, що дозволяють обчислити границю – *розкриттям невизначеностей*. Метод знаходження тієї чи іншої границі вибираємо у залежності від типу невизначеності у даному конкретному випадку.

Приклад 3. Обчислити $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 2x + 5}$.

Розв'язання. При $x \rightarrow \infty$ чисельник та знаменник дробу є нескінченно великими, тобто маємо невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Поділимо чисельник та знаменник на x у найбільшому степені, що присутній у запису дробу, тобто на x^2 . Отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}.$$

Враховуючи, що функція, обернена нескінченно великій, є нескінченно малою ($\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = 0$),

знаходимо, що шукана границя $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 2x + 5} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

При обчисленні границь, що містять тригонометричні функції та зводяться до невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$, часто використовують **першу важливу границю**:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (1)$$

Приклад 4. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}$, $k \neq 0$.

Розв'язання. Помножимо чисельник та знаменник дробу під знаком границі на число $k \neq 0$. Отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \sin kx}{kx} = k \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx}.$$

Зробимо заміну змінної $t = kx$. При $x \rightarrow 0$ $t \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = k \cdot 1 = k.$$

Отримано формулу:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k. \quad (2)$$

Приклад 5. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$;

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$. Запишемо останню

границю у вигляді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^2 = 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^2.$$

За формулою (2), границя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$, тому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Приклад 6. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - x}$.

Розв'язання. Підставивши у чисельник та знаменник

дробу $\frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1-x}$ значення $x=1$, отримаємо невизначеність виду

$\left(\frac{0}{0}\right)$. При цьому під знаком границі присутня тригонометрична

функція, тому для обчислення заданої границі доцільно використати першу важливу границю (1). Для цього спочатку зробимо заміну змінної $1-x=t$. Тоді при $x \rightarrow 1$ $t \rightarrow 0$. Оскільки $x=1-t$, то

$$\cos \frac{\pi x}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2} \right) = \sin \frac{\pi t}{2}.$$

Підставивши у задану границю ці вирази, отримуємо:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1-x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi t}{2}}{t} = 2.$$

Можна довести рівність:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e. \quad (3)$$

Формулу (3) називають **другою важливою границею**.

Другу важливу границю використовують, коли при обчисленні границі мають справу з невизначеністю виду (1^∞) . При обчисленні границь, пов'язаних з другою важливою границею, часто застосовують наступне твердження: якщо існують границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ та $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$, причому $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, то існує також границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)}$, яка обчислюється за формулою:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}. \quad (4)$$

Приклад 7. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x$.

Розв'язання. Оскільки при $x \rightarrow \infty$ $\frac{k}{x} \rightarrow 0$, то

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = (1^\infty)$, тому для обчислення заданої границі

використаємо другу важливу границю (3). Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{k}} \right)^{\frac{x}{k} \cdot k} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{k}} \right)^{\frac{x}{k}} \right)^k = e^k.$$

Приклад 8. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{1-5x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду (1^∞) , оскільки

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{2x+3} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (1-5x) = \infty. \text{ Тип невизначеності обумовлює}$$

використання для розв'язання задачі другої важливої границі.

Представимо дріб $\frac{2x-1}{2x+3}$ у вигляді суми одиниці та нескінченно малої функції:

$$\frac{2x-1}{2x+3} = 1 + \left(\frac{2x-1}{2x+3} - 1 \right) = 1 + \left(-\frac{4}{2x+3} \right).$$

Отже,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{1-5x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{4}{2x+3} \right) \right)^{1-5x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{4}{2x+3} \right) \right)^{\left(-\frac{2x+3}{4} \right) \left(-\frac{4}{2x+3} \right) (1-5x)}. \end{aligned}$$

Використовуючи формулу (4), запишемо останню границю у вигляді:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{4}{2x+3} \right) \right)^{\left(-\frac{2x+3}{4} \right) \left(-\frac{4}{2x+3} \right) (1-5x)} &= \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{4}{2x+3} \right) \right)^{\left(-\frac{2x+3}{4} \right)} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{4(1-5x)}{2x+3} \right)}. \end{aligned}$$

Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{4}{2x+3} \right) \right)^{\left(\frac{2x+3}{4} \right)} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4(1-5x)}{2x+3} = \frac{20}{2} = 10,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{1-5x} = e^{10}.$$

Приклад 9. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Розв'язання. Запишемо вираз під знаком границі у вигляді

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}. \text{ За основною логарифмічною тотожністю,}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}.$$

Використовуючи формулу (4), маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^1.$$

Отримали важливу формулу:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad (5)$$

У формулі (5) виконаємо заміну $\ln(1+x)=t$. При $x \rightarrow 0$
 $t \rightarrow 0$. Тоді $x = e^t - 1$. Вираз (6) набуває вигляду:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^t - 1}{t}} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t}}.$$

Звідси знаходимо формулу, що часто використовується при обчисленні границь від виразів, що містять показникові функції:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad (6)$$

Використовуючи (5), можна отримати формулу:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}. \quad (7)$$

Застосування границі (6) дозволяє обчислити границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}:$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \ln a \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a}.$$

У останній границі виконаємо заміну $x \ln a = t$. Якщо $x \rightarrow 0$,
то $t \rightarrow 0$. Отримуємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = \ln a \cdot 1 = \ln a.$$

Таким чином, маємо формулу:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \quad (8)$$

Таблиця основних формул, пов'язаних з обчисленням границь

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k. \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e. \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}. \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}. \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \quad (8)$$

Розглянемо приклади розкриття невизначеностей у випадках, що найчастіше зустрічаються на практиці.

1. Невизначеність виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ задана відношенням двох многочленів або ірраціональних виразів.

Приклад 10. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x - 3}{5x^4 + 2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, задану відношенням многочленів. Старший степінь цих многочленів – четвертий, тому поділимо чисельник та знаменник дробу під знаком границі на x^4 . Отримуємо:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x - 3}{5x^4 + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3} - \frac{3}{x^4}}{5 + \frac{2}{x^4}}. \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3} - \frac{3}{x^4}}{5 + \frac{2}{x^4}} &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{7}{x^3} - \frac{3}{x^4} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{2}{x^4} \right)} = \frac{0}{5} = 0.\end{aligned}$$

При знаходженні аналогічних границь доцільно використовувати наступне правило. Якщо степінь чисельника дробу є меншою, ніж степінь знаменника, то границя дорівнює нулю; якщо степінь чисельника дорівнює степені знаменника, то границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях чисельника та знаменника; якщо степінь чисельника більший за степінь знаменника, то границя дробу дорівнює нескінченності.

Приклад 11. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[5]{x} + 1}{\sqrt[3]{8x^2 + 5} - \sqrt{2x - 1}}$.

Розв'язання. У цьому прикладі вираз під знаком границі є відношенням ірраціональних функцій, утворюючи при $x \rightarrow \infty$ невизначеність виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Старший степінь чисельника

дорівнює $\frac{2}{3}$ (доданок $\sqrt[3]{x^2}$), старший степінь знаменника також дорівнює $\frac{2}{3}$ ($\sqrt[3]{8x^2 + 5}$), тому поділимо чисельник та знаменник дробу на $x^{\frac{2}{3}}$. Отримаємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[5]{x} + 1}{\sqrt[3]{8x^2 + 5} - \sqrt{2x - 1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^{1/2}}{x^{2/3}} + \frac{x^{2/3}}{x^{2/3}} - \frac{2x^{1/5}}{x^{2/3}}}{\left(\frac{8x^2 + 5}{x^2}\right)^{1/3} - \left(\frac{(2x - 1)^3}{x^4}\right)^{1/6}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ при $x \rightarrow x_0$ задана відношенням двох многочленів. У цьому випадку потрібно розкласти чисельник і знаменник на множники. Оскільки при $x = x_0$ чисельник та знаменник дробу дорівнюють нулю, то у їхньому розкладі на множники присутній множник $(x - x_0)^k$, $k \in \mathbb{N}$. Скорочення на степінь $(x - x_0)$ можливе, оскільки $x \rightarrow x_0$, але $x \neq x_0$. Після такого скорочення невизначеність усувається.

Приклад 12. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + 3x - 4}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники чисельник та знаменник дробу під знаком границі. Маємо:

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - x - 2 &= x^2(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(x^2 - 1) = \\ &= (x + 2)(x - 1)(x + 1) \end{aligned}$$

Коренями квадратного тричлена $x^2 + 3x - 4$ є $x_1 = -4$, $x_2 = 1$, тому його розклад на множники має вигляд:

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1).$$

Підставивши знайдені розклади на множники у задану границю, отримуємо:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + 3x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)(x+1)}{(x+4)(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x+1)}{x+4} = \frac{3 \cdot 2}{5} = \frac{6}{5}.\end{aligned}$$

3. Невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ при $x \rightarrow x_0$ задана відношенням ірраціональних виразів. Для розкриття таких невизначеностей звичайно позбавляються від ірраціональності у чисельнику або знаменнику.

Приклад 13. Обчислити $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+10}-3}$.

Розв'язання. Позбудемося ірраціональності у знаменнику. Маємо:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+10}-3} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(\sqrt{x+10}+3)}{(\sqrt{x+10}-3)(\sqrt{x+10}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(\sqrt{x+10}+3)}{(\sqrt{x+10})^2 - 3^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(\sqrt{x+10}+3)}{x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt{x+10}+3) = 3+3 = 6.\end{aligned}$$

Від ірраціональності можна позбавитися також шляхом введення нової змінної.

Приклад 14. Обчислити $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$. Щоб позбутися ірраціональності, виконаємо заміну змінної $x = t^{15}$. При $x \rightarrow -1$ $t \rightarrow -1$, $\sqrt[3]{x} = t^5$, $\sqrt[5]{x} = t^3$. Отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{1 + t^5}{1 + t^3}.$$

$t = -1$ – корінь чисельника та знаменника дробу, їх можна поділити націло на $t + 1$. Маємо:

$$\begin{aligned} t^5 + 1 &= (t + 1)(t^4 - t^3 + t^2 - t + 1), \\ t^3 + 1 &= (t + 1)(t^2 - t + 1). \end{aligned}$$

Підставивши ці вирази у останню границю, отримуємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}} &= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{1 + t^5}{1 + t^3} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{(t + 1)(t^4 - t^3 + t^2 - t + 1)}{(t + 1)(t^2 - t + 1)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^4 - t^3 + t^2 - t + 1}{t^2 - t + 1} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

4. Невизначеність виду $\infty - \infty$ задана різницею раціональних дробів або ірраціональних виразів.

Приклад 15. Обчислити $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\infty - \infty$, утворену різницею раціональних дробів. Виконаємо віднімання:

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} &= \frac{x^3(3x + 2) - x^2(3x^2 - 4)}{(3x^2 - 4)(3x + 2)} = \\ &= \frac{3x^4 + 2x^3 - 3x^4 + 4x^2}{9x^3 - 12x + 6x^2 - 8}. \end{aligned}$$

Підставивши знайдену різницю дробів у границю, отримаємо:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x^3 - 3x^4 + 4x^2}{9x^3 - 12x + 6x^2 - 8} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x^2}{9x^3 + 6x^2 - 12x - 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{x}}{9 + \frac{6}{x} - \frac{12}{x^2} - \frac{8}{x^3}} = \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

Приклад 16. Обчислити $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 1} - 3x)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $(\infty - \infty)$, утворену різницею виразів, що містять ірраціональність. Розкриємо дану невизначеність:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 1} - 3x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{9x^2 + 1} - 3x) \cdot (\sqrt{9x^2 + 1} + 3x)}{\sqrt{9x^2 + 1} + 3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 + 1 - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 1} + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{9x^2 + 1} + 3x} = \left(\frac{1}{\infty} \right) = 0.\end{aligned}$$

5. Невизначеності виду $\left(\frac{0}{0} \right)$, задані виразами, що містять тригонометричні функції, часто розкриваються за допомогою першої важливої границі (1).

Приклад 17. Знайти границю $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t}$.

Розв'язання. Використовуючи співвідношення $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$, запишемо границю у вигляді:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t \cos t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\cos t} = 1 \cdot 1 = 1.\end{aligned}$$

Приклад 18. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення виразу у чисельнику дробу:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cos x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \\ &= 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

При обчисленні цієї границі було використано формулу (2):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k \text{ при } k = \frac{1}{2}.$$

Приклад 19. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right)$.

Розв'язання. У даному прикладі при підстановці замість x значення $\frac{\pi}{4}$ отримуємо невизначеність $(\infty \cdot 0)$. Перетворимо її до вигляду $\left(\frac{0}{0} \right)$. Для цього задану границю запишемо у вигляді:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}{\operatorname{ctg} 2x}.$$

Виконаємо заміну змінної $x - \frac{\pi}{4} = t$. Тоді при $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ $t \rightarrow 0$, тригонометричні вирази у границі набувають вигляду:

$$\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg} 2\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg} \left(2t + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} 2t,$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \operatorname{tg} (-t) = -\operatorname{tg} t.$$

Підставимо ці вирази у границю:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg} 2t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{\frac{\sin 2t}{\cos 2t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\sin 2t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 2t}{\cos t} = \frac{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{t}} \cdot 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 20. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$.

Розв'язання. Виконаємо заміну змінної $\arcsin x = t$, $x = \sin t$. При $x \rightarrow 0$ $t \rightarrow 0$. Задана границя набуває вигляду:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1.$$

7. При розкритті невизначеності виду (1^∞) використовують другу важливу границю (3).

Приклад 21. Обчислити $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{4x-5}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{2x+1} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x-5) = \infty$, то обчислення даної границі зводиться до знаходження невизначеності (1^∞) . Застосуємо другу важливу границю

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Для цього представимо дріб $\frac{2x+3}{2x+1}$ у вигляді суми одиниці та нескінченно малої величини:

$$\begin{aligned}\frac{2x+3}{2x+2} &= 1 + \left(\frac{2x+3}{2x+1} - 1\right) = 1 + \frac{2x+3-2x-1}{2x+1} = \\ &= 1 + \frac{2}{2x+1}.\end{aligned}$$

Отримуємо:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+2}\right)^{4x-5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)^{4x-5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2} \cdot \frac{2(4x-5)}{2x+1}}.\end{aligned}$$

Тут у показнику степеня ми виділили величину $\frac{2x+1}{2}$, обернену нескінченно малій, що додається до одиниці у основі степеня.

Застосовуючи формулу (4), знаходимо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{4x-5} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(4x-5)}{2x+1}} = e^{\frac{8}{2}} = e^4.$$

Приклад 22. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання. Підставивши у вираз під знаком границі $x = 0$, отримуємо невизначеність (1^∞) , тому для розв'язання прикладу використаємо другу важливу границю. Для цього представимо вираз у основі степеня у вигляді суми одиниці та нескінченно малої і виділимо у показнику степеня величину, обернену цій нескінченно малій:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + (\cos x - 1) \right)^{\frac{1}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2}}.$$

Використовуючи формулу (4), отримуємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(1 + (\cos x - 1) \right)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right)^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}} = \\ &= e^{-2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2} = e^{-2 \left(\frac{1}{2} \right)^2} = e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

8. При розкритті невизначеності $\left(\frac{0}{0} \right)$ у випадках, коли під знаком границі знаходяться логарифмічні або показникові функції, доцільно використовувати формули (5) – (8).

Приклад 23. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x}$.

Розв'язання. Підстановка у вираз під знаком границі значення $x = 0$ приводить до невизначеності $\frac{0}{0}$. Оскільки під знаком границі знаходиться показникова функція, то для обчислення границі можна використати формулу (6). Зробимо заміну $ax = t$, $x = \frac{t}{a}$. При $x \rightarrow 0$ $t \rightarrow 0$. Отримуємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{\cancel{t/a}^a} = a \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = a \cdot 1 = a.$$

Приклад 24. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{kx}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0} \right)$ і під знаком границі знаходяться показникові функції. Отримуємо:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{kx} &= \frac{1}{k} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\alpha x} - 1) - (e^{\beta x} - 1)}{x} = \\ &= \frac{1}{k} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\beta x} - 1}{x} \right] = \frac{1}{k} (\alpha - \beta).\end{aligned}$$

Тут ми використали результат, отриманий у попередньому прикладі – $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$.

Приклад 25. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + kx)}{x}$.

Розв'язання. Підстановка у вираз під знаком границі значення $x = 0$ визначає невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Оскільки у виразі під знаком границі знаходиться логарифмічна функція, для розв'язання прикладу доцільно використати формулу (5). Виконавши заміну $kx = t$, $x = t/k$, отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + kx)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{t/k} = k \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{t} = k \cdot 1 = k.$$

Приклад 26. Обчислити $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$.

Розв'язання. Після підстановки у вираз під знаком границі значення $x = e$ маємо невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$. Зробивши заміну $x - e = t$, $x = t + e$, отримуємо (при $x \rightarrow e$ $t \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t + e) - \ln e}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{t + e}{e}\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{e}\right)}{t} = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

Тут ми використали результат попереднього прикладу:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + kx)}{x} = k, \text{ де } k = \frac{1}{e}.$$