

Лабораторне заняття 3.2

Матричний метод в сучасній екології

Мета лабораторного заняття:

Ознайомити студентів з використанням матричного методу для вирішення задач екологічного спрямування та визначити алгоритм матричного запису системи лінійних рівнянь і її розв'язування.

Необхідне обладнання та матеріали:

ПЕОМ із встановленою ОС Microsoft Windows, програмне забезпечення MathCAD або MathCAD Prime або MS Excel, онлайн-калькулятор матриць, Інтернет браузер, методичні вказівки

Питання для актуалізації знань і перевірки готовності студентів до виконання конкретної лабораторної роботи.

1. Матричний запис системи лінійних рівнянь і її розв'язування.
2. Алгоритм розв'язування матричним методом систему лінійних рівнянь.

Короткі теоретичні відомості.

Задано n лінійних рівнянь з n невідомими ($n > 3$).

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}x + \dots + a_{1n}x = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}x + \dots + a_{2n}x = b_2 \\ a_{n1}x + a_{n2}x + \dots + a_{nn}x = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Розв'язок системи рівнянь у матричній формі можливий лише тоді, коли матриця системи не вироджена, а саме, не вироджена матриця (неособлива, несингулярна, інвертована) — квадратна матриця, визначник якої не дорівнює нулю:

$$\det(A) \neq 0$$

Нехай задано систему, яка містить n лінійних рівнянь n з невідомими.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Введемо матриці.

і визначник системи $\Delta \neq 0$, то така система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta};$$

Матрицю A , складену з коефіцієнтів системи (1), називають основою матрицею системи, матрицю X – матрицею з невідомих, а матрицю B – матрицею з вільних

членів. Тоді згідно з правилом множення матриць систему (1) можна записати одним матричним рівнянням з невідомою матрицею X :

$$AX=B \quad (2)$$

Припустимо, що матриця A системи (1) має обернену матрицю A^{-1} ; помножимо обидві частини рівності (2) на A^{-1} зліва:

$$A^{-1}AX=A^{-1}B.$$

Оскільки $A^{-1}A=E$ і $EX=X$, то $X=A^{-1}B$

Отже, щоб розв'язати систему рівнянь (1), достатньо знайти матрицю, обернену до матриці системи, і помножити її справа на матрицю з вільних членів.

Хід виконання лабораторної роботи (методика експериментальних досліджень).

1. Скласти задачу екологічного спрямування.
2. Відкрити середу обчислень та ввести умови задачі.
3. Ввести змінне значення для програмного забезпечення MathCAD, MathCAD Prime або онлайн-калькулятор матриць згідно вимог середи обчислювання.
4. Перевірити визначник матриці.
5. Провести розрахунок.

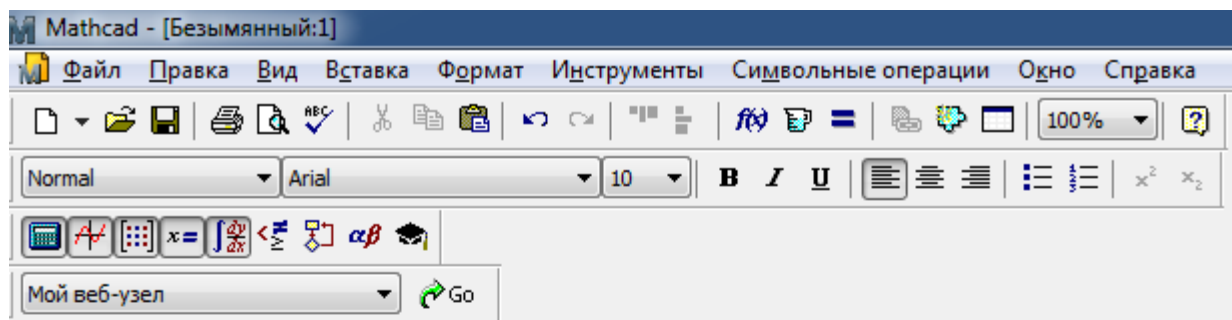
Задача для прикладу: Динаміка зростання бактеріальної популяції в середовищах A , B , і C записана системою лінійних рівнянь, де X - концентрація фактору який обмежує зростання бактерій в надходженні їжі; Y - швидкість асиміляції; Z - швидкість розбавлення.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 32x + y + 2z = 3 \\ 3x + 4y + 5z = 4 \end{cases}$$

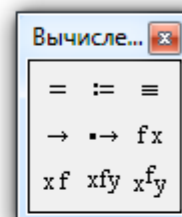
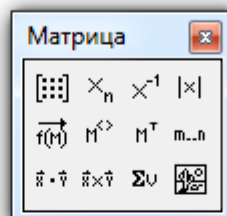
Приклад розрахунку у програмі MathCAD

1. Ввести значення матриці A та розрахувати визначник, якщо визначник не дорівнює нулю то можливо використання методу матриць. В даному випадку визначник дорівнює 64.
2. Використовуючи матричну вкладку визначаємо обернену матрицю.
3. Отриману обернену матрицю помножимо на матрицю вільних членів.
4. Визначаємо змінні x , y , z .
5. Записати в символному вигляді.

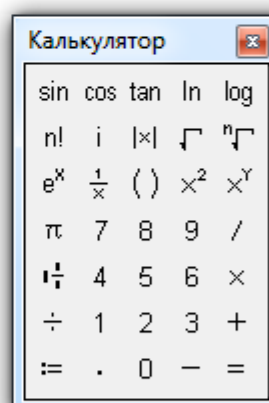
Приклад розв'язку задачі у програмному середовищу MathCAD на рисунку 48.



$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 32 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 64$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 32 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -0.047 & 0.031 & 0.016 \\ -2.406 & -0.063 & 1.469 \\ 1.953 & 0.031 & -0.984 \end{pmatrix}$$



$$B := \begin{pmatrix} -0.047 & 0.031 & 0.016 \\ -2.406 & -0.063 & 1.469 \\ 1.953 & 0.031 & -0.984 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.063 \\ 0.875 \\ 0.063 \end{pmatrix}$$

$$x := 0.063 \quad y := 0.875 \quad z := 0.063$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 32 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \rightarrow 64 \cdot b - 64 \cdot c + 64 \cdot d$$

Рис.48 – Приклад використання матриць у програмі MathCAD

Вимоги до змісту та оформлення звіту за результатами виконаної роботи.

1. Титульний лист.
2. Скласти задачу екологічного спрямування.
3. Рішення матричним методом запропонованої задачі.
4. Висновки.