1 СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. НАЙПРОСТІШІ ТИПИ ТОЧОК СПОКОЮ

Нехай маємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n) \quad \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{1.1}$$

де $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}$ $\left(i,k = \overline{1,n}\right)$ існують і неперервні, і нехай $\varphi_i(t)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ є розв'язком цієї системи, що задовольняє при $t = t_0$ умовам $\varphi_i(t_0) = \varphi_i^0$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$.

Розв'язок $\varphi_i(t)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ системи (1.1) називається *стійким за Ляпуновим* при $t \to +\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна підібрати $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-якого розв'язку $y_i(t)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ тієї ж системи (1.1), початкові значення якого задовольняють нерівностям

$$\left| y_i(t_0) - \varphi_i^0 \right| < \delta(\varepsilon) \qquad \left(i = \overline{1,n}\right),$$

для всіх $t \ge t_0$ мають місце нерівності

$$| y_i(t) - \varphi_i(t) | < \varepsilon \quad \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{1.2}$$

тобто близькі за початковими значенням розв'язки залишаються близькими для всіх $t \ge t_0$.

Якщо при як завгодно малому $\delta > 0$ хоча б для одного розв'язку $y_i(t)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ нерівності (1.2) не виконуються, то розв'язок $\varphi_i(t)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ називається *нестійким*.

Якщо розв'язок $\varphi_i(t)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ не тільки стійкий, але, крім того, задовольняє умовам

$$\lim_{t \to \infty} | y_i(t) - \varphi_i(t) | = 0 \qquad \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{1.3}$$

якщо $\left| y_i(t_0) - \varphi_i^0 \right| < \delta_1$, то розв'язок $\varphi_i(t)$ називається *асимптотично стійким*.

Питання про стійкість розв'язку $\varphi_i(t)$ системи (1.1) може бути зведене до питання про стійкість нульового розв'язку $x_i(t) \equiv 0$ деякої нової системи рівнянь, що отримується із (1.1) лінійною заміною шуканих функцій

$$x_i(t) = y_i(t) - \varphi_i(t) \qquad \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{1.4}$$

де $x_i(t)$ – нові невідомі функції, які дорівнюють відхиленням колишніх невідомих функцій $y_i(t)$ від функцій $\varphi_i(t)$, що визначають досліджуваний розв'язок. Тому надалі будемо вважати, що на стійкість досліджується саме нульовий розв'язок $x_i(t) \equiv 0$ або, що те ж саме, розташована в початку координат точка спокою системи рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = \psi_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \quad \left(i = \overline{1,n}\right). \tag{1.5}$$

У застосуванні до точки спокою $x_i(t) \equiv 0$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ умова стійкості виглядає так:

Точка спокою $x_i(t)\equiv 0$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ *системи (1.5) є стійкою за Ляпуновим, якщо для кожного* $\varepsilon>0$ *можна підібрати* $\delta(\varepsilon)>0$ *таке, що з нерівності* $|x_i(t_0)|<\delta(\varepsilon)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ *випливає* $|x_i(t)|<\varepsilon$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ *при всіх* $t\ge t_0$.

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=P(x,\ y),\\ \dfrac{dy}{dt}=Q(x,\ y).\end{cases}\tag{1.6}$$

Точка $(x_0,\ y_0)$ називається *точкою спокою* системи (1.6), якщо $P(x_0,\ y_0)=0,\ Q(x_0,\ y_0)=0$.

Розглянемо систему

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y,\\ \dfrac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y,\end{cases}\tag{1.7}$$

де a_{ij} $(i,j=1{,}2)$ – постійні. Точка (0, 0) є точкою спокою системи (1.7). Дослідимо розташування траєкторій системи (1.7) в околі цієї точки. Шукаємо розв'язок у вигляді

$$x=\alpha_1 e^{kt},\ y=\alpha_2 e^{kt}.\tag{1.8}$$

Для визначення k одержуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix}a_{11}-k & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-k\end{vmatrix}=0.\tag{1.9}$$

Розглянемо можливі випадки.

I. Корені характеристичного рівняння дійсні й різні, тоді

1) $k_1<0$, $k_2<0$. Точка спокою асимптотично стійка (стійкий вузол);

2) $k_1>0$, $k_2>0$. Точка спокою нестійка (нестійкий вузол);

3) $k_1>0$, $k_2<0$. Точка спокою нестійка (сідло);

4) $k_1=0$, $k_2>0$. Точка спокою нестійка;

5) $k_1=0$, $k_2<0$. Точка спокою стійка, але не асимптотично.

II. Корені характеристичного рівняння комплексні: $k_1=p+qi$, $k_2=p-qi$, тоді

1) $p<0$, $q\ne 0$. Точка спокою асимптотично стійка (стійкий фокус);

2) $p>0$, $q\ne 0$. Точка спокою нестійка (нестійкий фокус);

3) $p=0$, $q\ne 0$. Точка спокою стійка (центр). Асимптотичної стійкості немає.

III. Корені кратні: $k_1=k_2$, тоді

1) $k_1=k_2<0$. Точка спокою асимптотично стійка (стійкий вузол);

2) $k_1=k_2>0$. Точка спокою нестійка (нестійкий вузол);

3) $k_1 = k_2 = 0$. Точка спокою нестійка. Можливий винятковий випадок, коли всі точки площини є стійкими точками спокою.

Для системи лінійних однорідних рівнянь з постійними коефіцієнтами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, ..., n) \tag{1.10}$$

характеристичним рівнянням буде

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{1.11}$$

1) Якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння (1.11) системи (1.10) від'ємні, то точка спокою $x_i(t) \equiv 0 \;\; (i = 1, 2, ..., n)$ асимптотично стійка.

2) Якщо, дійсна частина хоча б одного кореня характеристичного рівняння (1.11) додатна, $\operatorname{Re} k_i > 0$, то точка спокою $x_i(t) \equiv 0 \;\; (i = 1, 2, ..., n)$ системи (1.10) нестійка.

3) Якщо характеристичне рівняння (1.11) має прості корені з нульовою дійсною частиною (тобто нульові або чисто уявні корені), то точка спокою $x_i(t) \equiv 0 \;\; (i = 1, 2, ..., n)$ системи (1.10) стійка, але не асимптотично.

Для системи двох лінійних рівнянь із постійними дійсними коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11} x + a_{12} y, \\ \dot{y} = a_{21} x + a_{22} y \end{cases} \tag{1.12}$$

характеристичне рівняння (1.9) приводиться до виду $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$.

1) Якщо $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, то нульовий розв'язок системи (1.12) асимптотично стійкий.

2) Якщо $a_1 > 0$, $a_2 = 0$, або $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, то нульовий розв'язок стійкий, але не асимптотично.

3) У всіх інших випадках нульовий розв'язок нестійкий; однак при $a_1 = a_2 = 0$ можливий винятковий випадок, коли нульовий розв'язок стійкий, але не асимптотично.

2 ДРУГИЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

Функція $v(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *визначено додатною* в *H*-околі $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le H \right)$ початку координат, якщо вона додатна у всіх точках цього околу, за винятком початку координат, де вона дорівнює нулю:

$$v(x_1, x_2, ..., x_n) > 0, \text{ якщо } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0, \; v(0, 0, ..., 0) = 0.$$

Наприклад, функція $v = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ буде визначено додатною функцією в просторі змінних x_1, x_2, x_3. Функція $u = x_1^2 + x_2^2$ буде лише знакопостійною у цьому просторі, але не визначено додатною, тому що вона обертається в нуль на всій осі Ox_3, а не тільки в точці (0, 0, 0), і вона ж буде визначено додатною в просторі x_1, x_2.

Якщо $v(x_1, x_2, ..., x_n) < 0$ при $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ й $v(0, 0, ..., 0) = 0$, то функція $v(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *визначено від'ємною*.

Функція $v(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *визначено додатною в H-околі початку координат при* $t \geq t_0$, якщо існує така незалежна від *t* визначено додатна функція $w(x_1, x_2, ..., x_n)$, що $v(t, x_1, x_2, ..., x_n) \geq w(x_1, x_2, ..., x_n)$ при всіх зазначених значеннях аргументів і $v(t, 0, ..., 0) = 0$. Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (i = 1, 2, ..., n), \tag{2.1}$$

і нехай $v(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ є неперервно диференційовна функція своїх аргументів. Повна похідна по *t* функції $v(t, x_1, x_2, ..., x_n)$, обчислена в силу системи (2.1) (уздовж інтегральних кривих), дорівнює

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n). \tag{2.2}$$

Якщо праві частини системи (2.1) не містять явно *t*, то така система називається *автономною* або *стаціонарною*.

I. *Теорема О.М. Ляпунова про стійкість*. Якщо система диференціальних рівнянь (2.1) така, що існує функція $v(t, x_1, x_2, ..., x_n)$, визначено додатна при $t \geq t_0$ в деякому *H*-околі початку координат, похідна якої $\frac{dv}{dt}$, обчислена в силу системи (2.1), недодатна, то тривіальний розв'язок системи (2.1) стійкий.

II. *Теорема О.М. Ляпунова про асимптотичну стійкість (випадок автономних систем)*. Якщо автономна система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{2.3}$$

така, що існує функція $v(x_1, x_2, ..., x_n)$, *визначено додатна* в деякому *H*-околі початку координат, похідна якої $\frac{dv}{dt}$, обчислена в силу системи (2.3), визначено від'ємна, то тривіальний розв'язок $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ асимптотично стійкий.

Функції $v(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ і $v(x_1, x_2, ..., x_n)$, що фігурують у наведених вище теоремах, називаються *функціями Ляпунова*.

Назвемо областю $v > 0$ певну область околу $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq H$ початку координат простору змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, обмежену поверхнею $v=0$, в якій функція v приймає додатні значення.

Припустимо, що функція v має наступні властивості:

1) при як завгодно великих значеннях t в як завгодно малому околі початку координат існує область $v>0$;

2) в області $v>0$ функція v обмежена;

3) в області $v>0$ похідна $\frac{dv}{dt}$, яка складена в силу системи рівнянь (2.2), визначено додатна.

III. *Теорема М.Г. Четаєва про нестійкість.* Якщо для системи диференціальних рівнянь (2.1) можна знайти функцію, що задовольняє умовам 1), 2), 3), то тривіальний розв’язок цієї системи нестійкий.

Зауваження. Якщо в системі (2.1) всі f_i не залежать явно від t, то функцію Ляпунова потрібно шукати як незалежну явно від t.

Дуже часто в якості функцій Ляпунова для диференціальних систем беруть квадратичні форми.

3 ДОСЛІДЖЕННЯ НА СТІЙКІСТЬ ЗА ПЕРШИМ НАБЛИЖЕННЯМ

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) \qquad (i=1,\ 2,\ ...,\ n), \tag{3.1}$$

де f_i – диференційовні в околі початку координат функції, $f_i(t,\ 0,\ 0,\ ...,\ 0) \equiv 0$.

Дослідимо на стійкість точку спокою $x_i \equiv 0$ $(i=1,\ 2,\ ...,\ n)$ системи (3.1). Представимо систему (3.1) в околі початку координат у вигляді

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + R_i(t,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) \qquad (i=1,\ 2,\ ...,\ n), \tag{3.2}$$

де R_i мають порядок вище першого відносно $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (тобто фактично розкладемо праві частини (3.1) за формулою Тейлора за степенями x в околі початку координат). Замість точки спокою системи (3.1) дослідимо на стійкість точку спокою лінійної системи

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j \quad (i=1,\ 2,\ ...,\ n), \tag{3.3}$$

яку називають *системою рівнянь першого наближення* або *лінеаризованою системою* для системи (3.1).

Виникає питання, чи випливає зі стійкості (нестійкості) точки спокою системи (3.3) стійкість (нестійкість) точки спокою вихідної системи (3.1). Взагалі, строгого зв’язку між системами (3.1) і (3.3) немає.

Приклад. Розглянемо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = x^2. \tag{3.4}$$

Тут $f(t, x) \equiv x^2$. Лінеаризоване рівняння для рівняння (3.4) має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = 0. \tag{3.5}$$

Розв'язок $x(t) \equiv 0$ рівняння (3.5) є стійким. Він же, будучи розв'язком вихідного рівняння (3.4), не є для нього стійким. Насправді, кожний дійсний розв'язок рівняння (3.4) має вигляд

$$x = \frac{x_0}{1 - tx_0}, \quad x\big|_{t=0} = x_0,$$

й перестає існувати при $t = \dfrac{1}{x_0}$.

Однак за певних умов стійкість (нестійкість) розв'язку системи першого наближення тягне за собою стійкість (нестійкість) розв'язку вихідної системи (3.1).

Обмежимося для простоти випадком, коли коефіцієнти $a_{ij}(t)$ в (3.3) постійні. У цьому випадку говорять, що система (3.2) стаціонарна в першому наближенні.

Теорема 3.1 Якщо система рівнянь (3.2) стаціонарна в першому наближенні, усі члени R_i обмежені по t і розкладаються у ряди за степенями $x_1, x_2, ..., x_n$ у деякій області $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \le H$, причому розклади починаються членами не нижче другого порядку, а всі корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \tag{3.6}$$

мають від'ємні дійсні частини, то тривіальний розв'язок $x_i \equiv 0 \quad (i = 1, 2, ..., n)$ системи (3.2) асимптотично стійкий, тобто в цьому випадку можливе дослідження на стійкість за першим наближенням.

Теорема 3.2 Якщо система рівнянь (3.2) стаціонарна в першому наближенні, усі функції R_i задовольняють умовам теореми 3.1 і хоча б один з коренів характеристичного рівняння (3.6) має додатну дійсну частину, то точка спокою $x_i \equiv 0 \quad (i = 1, 2, ..., n)$ системи (3.2) нестійка, тобто й у цьому випадку можливе дослідження на стійкість за першим наближенням.

Зауваження. Якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння (3.6) недодатні, причому дійсна частина хоча б одного кореня дорівнює нулю, то дослідження на стійкість за першим наближенням, взагалі, неможливе (у цьому випадку починають впливати нелінійні члени R_i).

4 АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ У ЦІЛОМУ. СТІЙКІСТЬ ЗА ЛАГРАНЖЕМ

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n),\ f_i(t,\ 0,\ 0,\ ...,\ 0) \equiv 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ ...,\ n), \tag{4.1}$$

і нехай ця система визначена в півпросторі

$$\Omega:\ \left\{a < t < +\infty,\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < +\infty\right\}.$$

Говорять, що тривіальний розв'язок $x_i \equiv 0$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ системи (4.1) *асимптотично стійкий в цілому*, якщо він

1) асимптотично стійкий за Ляпуновим;

2) будь-який інший розв'язок $x_i(t)$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ системи (4.1) має властивість

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ ...,\ n).$$

Аналогічно визначається асимптотична стійкість у цілому нетривіального розв'язку системи (4.1).

Обмежимося автономними системами, тобто такими, праві частини яких не залежать явно від змінної t:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n),\ f_i(0,\ 0,\ ...,\ 0) \equiv 0 \quad (i = 1,\ 2,\ ...,\ n). \tag{4.2}$$

Функцію Ляпунова $v(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ назвемо *нескінченно великою*, якщо для будь-якого додатного числа M існує додатне число R таке, що поза сферою $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = R^2$ має місце нерівність $v > M$.

Теорема 4.1 (про асимптотичну стійкість в цілому). Якщо існує нескінченно велика визначено додатна функція $v(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ така, що $\frac{dv}{dt} < 0$ поза E і $\frac{dv}{dt} \ge 0$ на E, де множина E не містить цілих траєкторій (крім нульового положення рівноваги), то тривіальний розв'язок системи (4.2) буде асимптотично стійкий в цілому.

Може виявитися, що система (4.2) не має повну стійкість, але проте для неї може існувати область асимптотичної стійкості.

Під *областю асимптотичної стійкості* системи (4.2) розуміється область, що містить початок координат O і таку, що має властивість, що всі траєкторії, що починаються в цій області, прагнуть при $t \to \infty$ до початку координат.

У лінійних системах завжди буває тільки повна стійкість, тоді як у нелінійних системах вона може не бути такою.

Теорема 4.2 Нехай $v(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ – функція, що має неперервні частинні похідні першого порядку для всіх x_i. Позначимо через Ω_l множину всіх точок, де

$v(x_1, x_2, ..., x_n) < l$. Якщо множина Ω_l обмежена та в ній

1) $v(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$ при $x_i \neq 0$,

2) $\dot{v}(x_1, x_2, ..., x_n) < 0$ при $x_i \neq 0 \quad (i = 1, 2, ..., n)$,

то початок координат – асимптотично стійке положення рівноваги системи (4.2), а Ω_i – область асимптотичної стійкості.

Стійкість за Лагранжем. Нехай маємо систему

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (i = 1, 2, ..., n), \qquad (4.3)$$

де $f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ задовольняють умовам теореми існування й єдиності розв'язку системи (4.3) для всіх $t \in [t_0, +\infty)$ і будь-яких $x_1, x_2, ..., x_n$.

Система (4.3) називається *стійкою за Лагранжем*, якщо всі розв'язки цієї системи визначені й обмежені на $[t_0, +\infty)$.