1 СТІЙКІСТЬ РОЗВ’ЯЗКУ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. НАЙПРОСТІШІ ТИПИ ТОЧОК СПОКОЮ

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1 Доведіть, що кожний розв’язок рівняння

$$\frac{dx}{dt}=0 \tag{1.13}$$

стійкий.

Доведення. Дійсно, розв’язок $x_1(t)$ цього рівняння, що задовольняє початковій умові, має вигляд $x_1(t_0)=x_1^0$ $x_1(t)\equiv x_1^0=const$.

Розглянемо інший розв’язок $x_2(t)$ рівняння (1.13), що задовольняє початковій умові

$$x_2(t_0)=x_2^0. \tag{1.14}$$

Для цих розв’язків маємо $|x_2(t)-x_1(t)|=\left|x_2^0-x_1^0\right|$ для всіх *t*. Отже, для всякого $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$, наприклад, $\delta=\varepsilon$ таке, що як тільки $\left|x_2^0-x_1^0\right|<\delta$, то для розв’язків $x_2(t)$ і $x_1(t)$ буде виконуватися нерівність

$$|x_2(t)-x_1(t)|=\left|x_2^0-x_1^0\right|<\varepsilon \text{ при всіх } t\ge t_0.$$

Отже, будь-який розв’язок рівняння (1.13) є стійким. Однак асимптотичної стійкості немає:

$$\lim_{t\to\infty}|x_2(t)-x_1(t)|=\lim_{t\to\infty}\left|x_2^0-x_1^0\right|\ne 0.$$

Приклад 2 Доведіть, що кожний розв’язок рівняння

$$\frac{dx}{dt}+x=0 \tag{1.15}$$

є асимптотично стійким.

Доведення. Загальний розв’язок рівняння має вигляд

$$x(t)=Ce^{-t}. \tag{1.16}$$

Розв’язки $x_2(t)$, $x_1(t)$ рівняння (1.15), що задовольняють початковим умовам $x_1(t_0)=x_1^0$, $x_2(t_0)=x_2^0$, будуть

$$x_1(t)=x_1^0e^{-(t-t_0)},\ x_2(t)=x_2^0e^{-(t-t_0)}.$$

Отже, для всякого $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$, наприклад, $\delta=\varepsilon$ таке, що як тільки $\left|x_2^0-x_1^0\right|<\delta$, тоді $|x_2(t)-x_1(t)|=\left|x_2^0-x_1^0\right|e^{-(t-t_0)}\le\left|x_2^0-x_1^0\right|<\delta=\varepsilon$ і

$$\lim_{t\to\infty}|x_2(t)-x_1(t)|=\lim_{t\to\infty}\left|x_2^0-x_1^0\right|e^{-(t-t_0)}=0,$$

що означає асимптотичну стійкість будь-якого розв’язку рівняння (1.15).

Приклад 3 Дослідити на стійкість розв’язки $x(t)\equiv -1$ і $x(t)\equiv 1$ рівняння

$\frac{dx}{dt} = 1 - x^2(t)$.

Розв'язання.

$$\frac{dx}{1 - x^2(t)} = dt,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = t + c,$$

$$\frac{1+x}{1-x} = Ae^{2t},$$

$$x(t) = \frac{Ae^{2t} - 1}{Ae^{2t} + 1},$$

$$x_0(t) = \frac{Ae^{2t_0} - 1}{Ae^{2t_0} + 1}, \text{ звідки } A = \frac{x_0 + 1}{e^{2t_0}(1 - x_0)}.$$

Таким чином, маємо розв'язок

$$x(t) = \frac{(1 + x_0)e^{2(t - t_0)} - (1 - x_0)}{(1 + x_0)e^{2(t - t_0)} + (1 - x_0)}.$$

Розв'язок рівняння $x(t) \equiv -1$ нестійкий, тому що

$$\lim_{t\to\infty} \bar{x}(t) = 1, \ |x_2(t) - x_1(t)| = 2 = \varepsilon.$$

Розв'язок $x(t) \equiv 1$ цього рівняння згідно з визначенням асимптотично стійкий:

$$|1 - \bar{x}_0| < \delta,$$

$$|\bar{x}(t) - 1| = \left|\frac{-1 + \bar{x}_0 - 1 + \bar{x}_0}{(1 + \bar{x}_0)e^{2(t - t_0)} + (1 - \bar{x}_0)}\right| = \left|\frac{2(1 - \bar{x}_0)}{(1 + \bar{x}_0)e^{2(t - t_0)} + (1 - \bar{x}_0)}\right| \le$$

$$\le \{1 - \delta < \bar{x}_0 < 1 + \delta\} \le \frac{|2(1 - \bar{x}_0)|}{\left|(1 + \bar{x}_0)e^{2(t - t_0)}\right| - |(1 - \bar{x}_0)|} < \frac{2\delta}{1 - \delta} < \varepsilon.$$

Оберемо $\delta < 1$: $\quad \delta < \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon}, \quad \delta = \frac{1}{2}\min\left\{\frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon}; 1\right\}$ і $\lim_{t\to\infty}|x(t) - \bar{x}(t)| = 0$.

Приклад 4 Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -5y - 6x, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

Розв'язання.

$$\ddot{x} = \dot{y},$$

$$\ddot{x} = -5\dot{x} - 6x,$$

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = 0,$$

$$\lambda_1 = -3, \qquad \lambda_2 = -2,$$

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-2t}, \\ y(t) = \dfrac{dx}{dt} = -3c_1 e^{-3t} - 2c_2 e^{-2t}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 = 0, \\ y(0) = -3c_1 - 2c_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Нехай

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0 . \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_0, \\ -3c_1 - 2c_2 = y_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = -2x_0 - y_0, \\ c_2 = 3x_0 + y_0. \end{cases}$$

Таким чином, маємо розв'язок

$$\begin{cases} x(t) = -(2x_0 + y_0)e^{-3t} + (3x_0 + y_0)e^{-2t}, \\ y(t) = 3(2x_0 + y_0)e^{-3t} - 2(3x_0 + y_0)e^{-2t}. \end{cases}$$

Нехай $|\,\overline{x}_0 - x_0\,| = |\,\overline{x}_0 - 0\,| < \delta$ і $|\,\overline{y}_0 - y_0\,| = |\,\overline{y}_0 - 0\,| < \delta$.

Розглянемо

$$|\,\overline{x}(t) - x(t)\,| = |\,\overline{x}(t) - 0\,| \le |\,2\overline{x}_0 + \overline{y}_0\,| + |\,3\overline{x}_0 + \overline{y}_0\,| \le 5|\,\overline{x}_0\,| + 2|\,\overline{y}_0\,| \le 7\delta < \varepsilon ,$$

$$|\,\overline{y}(t) - y(t)\,| = |\,\overline{y}(t) - 0\,| \le |\,6\overline{x}_0 + 3\overline{y}_0\,| + |\,6\overline{x}_0 + 2\overline{y}_0\,| \le 12|\,\overline{x}_0\,| + 5|\,\overline{y}_0\,| \le 17\delta < \varepsilon ;$$

$$\begin{cases} \delta < \dfrac{\varepsilon}{7}, \\ \delta < \dfrac{\varepsilon}{17} \end{cases} \Rightarrow \ \delta < \frac{\varepsilon}{17}, \text{ наприклад } \delta = \frac{\varepsilon}{34} .$$

Асимптотична стійкість:

$$\lim_{t \to \infty} |\,\overline{x}(t) - x(t)\,| = 0 ,$$

$$\lim_{t \to \infty} |\,\overline{y}(t) - y(t)\,| = 0 .$$

Отже, маємо асимптотичну стійкість.

Приклад 5 Встановити характер точки спокою (0, 0) системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Розв'язання. У цьому випадку $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = 0$. Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0 \text{ або } k^2 + 1 = 0 .$$

Корені характеристичного рівняння $k_{1,2} = \pm i$ – чисто уявні. Точка спокою стійка (центр).

Приклад 6 Визначити значення параметра α, при якому буде стійким нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (\alpha - 1)x - \alpha y. \end{cases}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння для даної системи має вигляд

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ \alpha - 1 & -\alpha - k \end{vmatrix} = 0$$

або $k^2 + \alpha k + 1 - \alpha = 0$. Тут $a_1 = \alpha$, $a_2 = 1 - \alpha$.

Асимптотична стійкість нульового розв'язку буде мати місце при $\alpha > 0$, $1 - \alpha > 0$, тобто при $0 < \alpha < 1$.

Стійкість, але не асимптотична, буде у двох випадках:

а) $\alpha > 0$, $1 - \alpha = 0$, тобто при $\alpha = 1$;

б) $\alpha = 0$, $1 - \alpha > 0$, тобто при $\alpha = 0$.

При всіх інших значеннях α нульовий розв'язок нестійкий.

Приклад 7 В площині параметрів α і β знайти області, в яких нульовий розв'язок системи рівнянь стійкий:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + (\beta - 2\alpha\beta - 1)y, \\ \dot{y} = x - \beta y. \end{cases}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння системи

$$\begin{vmatrix} \alpha - k & \beta - 2\alpha\beta - 1 \\ 1 & -\beta - k \end{vmatrix} = 0$$

або $k^2 + (\beta - \alpha)k + 1 + \alpha\beta - \beta = 0$. Тут $a_1 = \beta - \alpha$, $a_2 = 1 + \alpha\beta - \beta$. a_1 і a_2 є неперервними функціями від α і β, тому знаки a_1 й a_2 будуть змінюватися там, де $a_1 = a_2 = 0$, тобто на прямій $\beta - \alpha = 0$ і на гіперболі $1 + \alpha\beta - \beta = 0$. Ці лінії розбивають площину параметрів α, β на чотири області I, II, III, IV (рис. 1.1), у кожній з яких знаки a_1 й a_2 постійні. Візьмемо по одній довільній точці в кожній області й визначимо в цих точках знаки коефіцієнтів a_1 і a_2.

Область I: у точці (–1; 1) маємо $a_1 = 2 > 0$, $a_2 = -1 < 0$. Нульовий розв'язок системи в цій області нестійкий.

Область II: у точці (0; 0,5), маємо $a_1 = 0{,}5 > 0$, $a_2 = 0{,}5 > 0$. Нульовий розв'язок системи в області II асимптотично стійкий.

Область III: у точці (1,0) маємо $a_1 = -1 < 0$, $a_2 = 1 > 0$. Нульовий розв'язок в області III нестійкий.

Область IV: у точці (2; –2) маємо $a_1 = -4 < 0$, $a_2 = -1 < 0$. Нульовий розв'язок у цій області нестійкий.

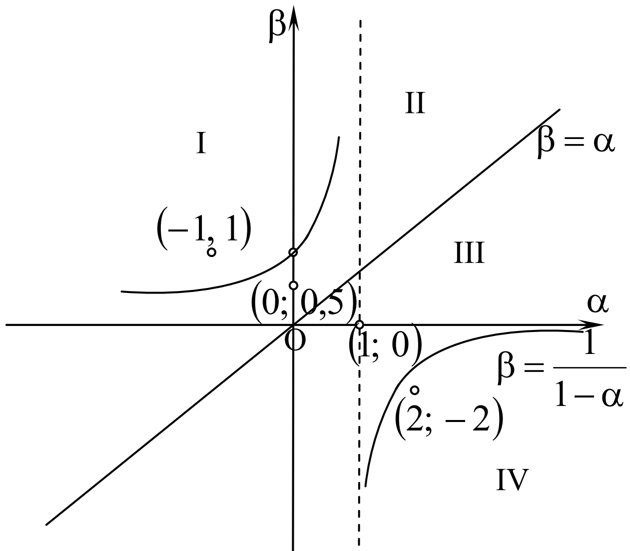

Рисунок 1.1

Досліджуємо на стійкість нульовий розв'язок на границях розглянутих вище областей.

1) $\beta = \dfrac{1}{1-\alpha}$, $\alpha < 1$ (границя між областями I і II). На цій границі $a_1 > 0$, $a_2 = 0$, так що нульовий розв'язок на ній стійкий, але не асимптотично;

2) $\beta = \alpha$ (границя між областями II і III). На цій границі $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, так що нульовий розв'язок на ній стійкий, але не асимптотично.

3) $\beta = \dfrac{1}{1-\alpha}$, $\alpha > 1$ (границя між областями III і IV). На цій границі $a_1 < 0$, $a_2 = 0$, так що нульовий розв'язок на ній стійкий.

Отже, нульовий розв'язок асимптотично стійкий в області II і стійкий, але не асимптотично, на границі області II.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Користуючись визначенням, дослідити на стійкість розв'язки наступних рівнянь і систем:

№ 1.1. $\dfrac{dx}{dt} + x = 0$, $x(0) = 1$. **№ 1.2.** $\dfrac{dx}{dt} = -t(x-1)$, $x(0) = 1$.

№ 1.3. $\dfrac{dx}{dt} - 2x = t$, $x\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$. **№ 1.4.** $\dfrac{dx}{dt} = 2xt$, $x(0) = 0$.

№ 1.5. $\dfrac{dx}{dt} = \cos t$, $x(0) = 1$. **№ 1.6.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3y - 2x, \end{cases}$, $x(0) = y(0) = 0$.

№ 1.7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y + 3x, \end{cases}$, $x(0) = y(0) = 0$.

Встановити характер точки спокою (0; 0) у наступних системах:

№ 1.8. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$

№ 1.9. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - x, \\ \dot{y} = -9x + y. \end{cases}$

№ 1.10. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

№ 1.11. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2y - 3x. \end{cases}$

№ 1.12. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

№ 1.13. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

№ 1.14. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -x - 4y. \end{cases}$

№ 1.15. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x + y. \end{cases}$

№ 1.16. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z, \\ \dot{y} = 5x - 3y + 3z, \\ \dot{z} = -x - 2z. \end{cases}$ **№ 1.17.** $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y + 4z, \\ \dot{y} = 4x - 7y + 8z, \\ \dot{z} = 6x - 7y + 7z. \end{cases}$

Визначити значення параметра α, при яких нульові розв'язки наступних систем стійкі:

№ 1.18. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 5\alpha x - \alpha^2 y. \end{cases}$ **№ 1.19.** $\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = \alpha x - \alpha^2 y. \end{cases}$

№ 1.20. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha^2 x - 3y, \\ \dot{y} = \alpha x + 4y. \end{cases}$ **№ 1.21.** $\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha x, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$ **№ 1.22.** $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y, \\ \dot{y} = \alpha y - z, \\ \dot{z} = \alpha z - x. \end{cases}$

Для наступних систем у площині параметрів α і β знайти області, у яких нульовий розв'язок стійкий:

№ 1.23. $\begin{cases} \dot{x} = -x + \alpha y, \\ \dot{y} = \beta x - y. \end{cases}$ **№ 1.24.** $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y, \\ \dot{y} = x + \alpha y. \end{cases}$

№ 1.25. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y, \\ \dot{y} = -\beta x + (\alpha - 2)y. \end{cases}$ **№ 1.26.** $\begin{cases} \dot{x} = -\alpha^2 x - \beta^2 y, \\ \dot{y} = (\alpha^2 - 1)x + (\beta^2 + 1)y. \end{cases}$

№ 1.27. $\begin{cases} \dot{x} = (\alpha^2 - \beta)x + (1 + \beta)y, \\ \dot{y} = -\beta^2 x + \beta^2 y. \end{cases}$ **№ 1.28.** $\begin{cases} \dot{x} = -\alpha^2 x - (\beta + 1)y, \\ \dot{y} = (4\alpha + \beta + 1)x - 4y. \end{cases}$

2 ДРУГИЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1 Дана система рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^3 + by, \\ \dot{y} = -cx + dy^3. \end{cases} \tag{2.4}$$

Знайти для системи (2.4) функцію Ляпунова у вигляді

$$v(x,\ y) = F_1(x) + F_2(y),$$

де $F_1(x),\ F_2(y)$ – деякі поки невідомі диференційовні функції.

Розв'язання. В силу системи (2.4) будемо мати

$$\dot{v} = F_1'(x)\dot{x} + F_2'(y)\dot{y} = F_1'(x)(ax^3 + by) - F_2'(y)(cx - dy^3).$$

Зажадаємо, щоб функція $\dot{v}$ мала такий же вигляд, що й функція $v(x,\ y)$, тобто щоб вона представлялася у вигляді суми двох функцій – однієї, що залежить тільки від x, іншої – тільки від y. Для цього необхідно, щоб мала місце тотожність

$$F_1'(x)by - F_2'(y)cx \equiv 0.$$

Розділяючи змінні, одержимо

$$\frac{cx}{F_1'(x)} = \frac{by}{F_2'(y)}$$

і, отже, кожна з дробів повинна бути постійною величиною, наприклад, рівною 0,5. Тоді будемо мати

$$\frac{cx}{F_1'(x)} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{by}{F_2'(y)} = \frac{1}{2},$$

звідки

$$F_1(x) = cx^2, \qquad F_2(y) = by^2,$$

так що

$$v(x, y) = cx^2 + by^2.$$

Приклад 2 Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -(x - 2y)\left(1 - x^2 - 3y^2\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = -(x + y)\left(1 - x^2 - 3y^2\right). \end{cases}$$

Розв'язання. Виберемо в якості v функцію $v = x^2 + 2y^2$. Вона є, по-перше, визначено додатною, а, по-друге, її похідна $\frac{dv}{dt}$ дорівнює

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x(2y - x)\left(1 - x^2 - 3y^2\right) - 4y(x + y)\left(1 - x^2 - 3y^2\right) =$$

$$= -2\left(1 - x^2 - 3y^2\right)\left(x^2 + 2y^2\right) \le 0$$

при досить малих x і y.

Ми бачимо, що виконуються всі умови теореми О.М. Ляпунова про стійкість.

Отже, тривіальний розв'язок $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ стійкий.

Приклад 3 Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5y - 2x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 3y^3. \end{cases}$$

Розв'язання. Функція $v = x^2 + y^2$ задовольняє умовам теореми О.М. Ляпунова про асимптотичну стійкість:

1) $v(x, y) \ge 0$, $v(0, 0) = 0$;

2) $\frac{dv}{dt} = 2x\left(-5y - 2x^3\right) + 2y\left(5x - 3y^3\right) = -\left(4x^4 + 6y^4\right) \le 0$,

тобто $\frac{dv}{dt} < 0$ і $\frac{dv}{dt} = 0$ тільки при $x = 0$, $y = 0$, і виходить, є визначено від'ємною функцією. Отже, розв'язок $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ асимптотично стійкий.

Приклад 4 Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок автономної системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y^2 + x. \end{cases}$$

Розв'язання. Виберемо в якості $v(x,\ y)$ функцію

$$v = \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3.$$

Тут областю $v > 0$ є, наприклад, область $x > 0$, $y > 0$.

В області $v > 0$ маємо

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left(x^2 + y\right)^2 + \left(x + y^2\right)^2 > 0.$$

Згідно з теоремою М.Г. Четаєва про нестійкість розв'язок $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ нестійкий.

Приклад 5 Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок автономної системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -(x - 2y)\left(1 - x^2 - 3y^2\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = -(y + x)\left(1 - x^2 - 3y^2\right); \end{cases} \qquad v(x, y) = x^2 + 2y^2.$$

Розв'язання.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x\dot{x} + 4y\dot{y} = -2x(x - 2y)\left(1 - x^2 - 3y^2\right) -$$
$$-4y(y + x)\left(1 - x^2 - 3y^2\right) = -\left(1 - x^2 - 3y^2\right)\left(2x^2 + 4y^2\right) \le 0.$$

Отже, розв'язок стійкий за Ляпуновим.

Приклад 6 Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок автономної системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5y - 2x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 3y^3. \end{cases}$$

Розв'язання.

У якості функції Ляпунова візьмемо $v = x^2 + y^2$. Будемо мати

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x\left(-5y - 2x^3\right) + 2y\left(5x - 3y^3\right) = -4x^4 - 6y^4 < 0$$

для будь-якого $x,\ y \ne 0$ і $\left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{(0;\ 0)} = 0$.

Отже, розв'язок асимптотично стійкий.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок систем:

№ 2.1. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y - 3xy^2 - \frac{1}{4}x^3, \\ \dot{y} = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - 2y^3. \end{cases}$

№ 2.2. $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x^3, \\ \dot{y} = -x - 7y^3. \end{cases}$

№ 2.3. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 2xy^2 - 3x^3, \\ \dot{y} = \frac{1}{3}x - y - x^2y - 7y^3. \end{cases}$

№ 2.4. $\begin{cases} \dot{x} = -xy^4, \\ \dot{y} = yx^4. \end{cases}$

№ 2.5. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 9y + 3xy^2 - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 2x^2y - \frac{1}{2}y^3. \end{cases}$

№ 2.6. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2xy^2 - xy^6, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}y - x^2y - x^4y^3. \end{cases}$

№ 2.7. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - xy^4 - x^3y^6, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{4}y^3. \end{cases}$

№ 2.8. $\begin{cases} \dot{x} = x - xy^4, \\ \dot{y} = y - x^2y^3. \end{cases}$

№ 2.9. $\begin{cases} \dot{x} = y^3 + x^5, \\ \dot{y} = x^3 + y^5. \end{cases}$

№ 2.10. $\begin{cases} \dot{x} = -2y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y^3. \end{cases}$

№ 2.11. $\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xy^2, \\ \dot{y} = -\frac{3}{4}y + 3xz^3, \\ \dot{z} = -\frac{2}{3}z - 2xyz^2, \end{cases} \quad \left(v = x^2 + 2y^2 + 3z^2\right).$

№ 2.12. $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{3}y - x - \frac{7}{2}x^3, \\ \dot{y} = -x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}y^3. \end{cases}$

3 ДОСЛІДЖЕННЯ НА СТІЙКІСТЬ ЗА ПЕРШИМ НАБЛИЖЕННЯМ

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1 Дослідити на стійкість точку спокою рівняння коливання маятника

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\sin x = 0. \tag{3.7}$$

Тут x – кут відхилу маятника від вертикалі.

Розв’язання. Рівнянню (3.7) відповідає система

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ay - b\sin x. \end{cases} \tag{3.8}$$

Точки спокою системи (3.8)

$$x = n\pi \ (n \text{ – ціле}), \ y = 0. \tag{3.9}$$

Дослідимо на стійкість точку спокою $x = 0$, $y = 0$, що отримуємо з (3.9) при $n = 0$. Використовуючи розклад

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

запишемо систему першого наближення

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -bx - ay. \end{cases} \tag{3.10}$$

характеристичне рівняння якої

$$k^2 + ak + b = 0. \tag{3.11}$$

Якщо $a > 0$, $b > 0$, то корені рівняння (3.11) мають від’ємні дійсні частини, і, отже, точка спокою $x = 0$, $y = 0$ стійка за першим наближенням.

Дослідимо тепер на стійкість точку (π, 0), що відповідає $n = 1$. Використовуючи розклад

$$\sin x = -(x - \pi) + \frac{(x - \pi)^3}{3!} + \ldots$$

і переносячи початок координат у точку $x = \pi$, $y = 0$, прийдемо до системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = bx - ay. \end{cases} \tag{3.12}$$

характеристичне рівняння якої

$$k^2 + ak - b = 0. \tag{3.13}$$

При $a > 0$, $b > 0$ корені цього рівняння будуть дійсними й різних знаків. Отже, точка спокою (π, 0) є нестійкою точкою для системи (3.12).

Приклад 2 Дослідити на стійкість точку спокою $x = 0$, $y = 0$ системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y - xf(x,\ y), \\ \dot{y} = -x - yf(x,\ y), \end{cases} \tag{3.14}$$

де функція $f(x,\ y)$ розкладається в збіжний степеневий ряд і $f(0,\ 0) = 0$.

Розв’язання. Лінеаризована система має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \tag{3.15}$$

Точкою спокою системи (3.15) є (0, 0).

Характеристичне рівняння системи (3.15)

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0 \text{ або } k^2 + 1 = 0 \tag{3.16}$$

має чисто уявні корені $k_{1,2} = \pm i$. Точка спокою (0, 0) системи першого наближення (3.15) стійка (центр), тому що дійсні частини коренів характеристичного рівняння (3.16) дорівнюють нулю, то згідно із зауваженням до теореми 3.2 питання про стійкість точки спокою (0, 0) вимагає додаткового дослідження. Для дослідження на стійкість точки спокою (0, 0) системи (3.14) застосуємо другий метод Ляпунова. Беремо $v(x,\ y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ і знаходимо

$$\frac{dv}{dt} = -\left(x^2 + y^2\right)f(x,\ y).$$

Звідси: якщо $f(x,\ y) \geq 0$ в досить малому околі початку координат, то точка спокою (0, 0) стійка; якщо $f(x,\ y)$ – визначено додатна функція в деякому околі початку координат, то точка спокою (0, 0) асимптотично стійка; якщо $f(x,\ y)<0$ в досить малій околиці початку координат, то точка спокою (0, 0) нестійка. Цей приклад ілюструє той факт, що в деяких випадках не можна судити про стійкість точки спокою за першим наближенням.

Приклад 3 Дослідити на стійкість точку спокою $x=0$, $y=0$ системи

$$\begin{cases} \dot{x}=-x+y+2x^4-y^6, \\ \dot{y}=x-3y+11y^4. \end{cases} \tag{3.17}$$

Розв'язання. Нелінійні члени задовольняють умовам теорем 3.1 і 3.2. Дослідимо на стійкість точку спокою системи першого наближення

$$\begin{cases} \dot{x}=-x+y, \\ \dot{y}=x-3y. \end{cases} \tag{3.18}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -1-k & 1 \\ 1 & -3-k \end{vmatrix}=0$$

має від'ємні корені $k_{1,2}=-2\pm\sqrt{2}$. Отже, згідно теореми 3.1 точка спокою $x=0$, $y=0$ систем (3.17) і (3.18) асимптотично стійка.

Приклад 4 Дослідити на стійкість точку спокою $x=0$, $y=0$ рівняння

$$\frac{dx}{dt}=x-x^3e^t. \tag{3.19}$$

Розв'язання. Лінеаризоване рівняння має вигляд

$$\frac{dx}{dt}=x. \tag{3.20}$$

Його розв'язок $x(t)=Ce^t$.

Нехай $x(t_0)=\bar{x}_0$, тоді $\bar{x}_0=Ce^{t_0}$. Звідси $C=\bar{x}_0e^{-t_0}$, $x=\bar{x}_0e^{t-t_0}$, $x(t_0)=0$ і, отже, $x=0$.

Будемо мати

$$\lim_{t\to+\infty}\left|\,\bar{x}-0\,\right|=\lim_{t\to+\infty}\bar{x}_0e^{t-t_0}=+\infty.$$

Отже, розв'язок $x(t)\equiv 0$ рівняння (3.20) нестійкий.

Розглянемо асимптотичну стійкість цього розв'язку:

$$x'-x+x^3e^t=0,$$

$$x=uv,\ x'=u'v+uv',$$

$$u'v+uv'-uv+u^3v^3e^t=0,$$

$$v(u'-u)+uv'+u^3v^3e^t=0,$$

$$u'=u, \qquad\qquad u=e^t,$$

$$e^tv'+e^{3t}v^3e^t=0,$$

$$v' = -e^{3t}v^3, \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}e^{3t} + C}},$$

$$x = uv = \frac{e^t}{\sqrt{\frac{2}{3}e^{3t} + C}}$$

і, очевидно, що $\lim\limits_{t \to +\infty} |x(t)| = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{\sqrt{\frac{2}{3}e^{3t} + C}} = 0$. Отже, розв'язок $x(t) \equiv 0$ рівняння (3.19) є асимптотично стійким.

Приклад 5 Дослідити на стійкість точку спокою $x = 0$, $y = 0$ системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y - xy^2, \\ \dot{y} = -x^3. \end{cases} \tag{3.21}$$

Розв'язання. Нелінійні члени задовольняють умовам теорем 3.1 і 3.2. Дослідимо на стійкість точку спокою системи першого наближення

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 0. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 0 & -k \end{vmatrix} = 0$$

має корені $k_{1,2} = 0$. Отже, нульовий розв'язок системи першого наближення нестійкий.

Розглянемо асимптотичну стійкість цього розв'язку. У якості функції Ляпунова візьмемо $v = \frac{1}{2}x^4 + y^2$. Вона задовольняє умовам теореми О.М. Ляпунова про асимптотичну стійкість:

1) $v(x,\ y) \geq 0$, $v(0,\ 0) = 0$;

2) $\frac{dv}{dt} = 2x^3\left(y - xy^2\right) + 2y\left(-x^3\right) = 2x^3y - 2x^4y^2 - 2x^3y = -2x^4y^2 \leq 0$, тобто $\frac{dv}{dt} < 0$ і $\frac{dv}{dt} = 0$ тільки при $x = 0$, $y = 0$, і виходить, є визначено від'ємною функцією. Отже, розв'язок $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ системи (3.21) асимптотично стійкий.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Дослідити на стійкість за першим наближенням точку спокою $x = 0$, $y = 0$ у наступних системах:

№ 3.1. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 3x^2, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4. \end{cases}$ **№ 3.2.** $\begin{cases} \dot{x} = -\sin x + 3y + x^5, \\ \dot{y} = \frac{1}{4}x - 2y - \frac{1}{6}y^3. \end{cases}$

№ 3.3. $\begin{cases} \dot{x} = 2e^x + 5y - 2 + x^4, \\ \dot{y} = x + 6\cos y - 6 - y^2. \end{cases}$ **№ 3.4.** $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + \sin^3 x - y^2, \\ \dot{y} = -2x + \sin y + e^y x^2. \end{cases}$

№ 3.5. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2\sin y - y^3 \sin x, \\ \dot{y} = 2y - 3x - x^3. \end{cases}$ **№ 3.6.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y + x^2 + y^2, \\ \dot{y} = x + y - y^2. \end{cases}$

№ 3.7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y, \\ \dot{y} = 2x - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$ **№ 3.8.** $\begin{cases} \dot{x} = -4x + \frac{7}{2}\sin y - 3x^2, \\ \dot{y} = -2x + x^2 + y + y^3. \end{cases}$

№ 3.9. $\begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - y^3. \end{cases}$ **№ 3.10.** $\begin{cases} \dot{x} = 10\sin x - 29y + 3y^3, \\ \dot{y} = 5x - 14\sin y + y^2. \end{cases}$

№ 3.11. Дослідити на стійкість точки спокою маятника, до якого прикладений обертаючий момент L:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\sin x = L, \text{ де } |L| < b.$$

4 АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ У ЦІЛОМУ. СТІЙКІСТЬ ЗА ЛАГРАНЖЕМ

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1 Дослідити на асимптотичну стійкість в цілому нульовий розв’язок рівняння

$$\ddot{x} + x^2\dot{x} + x^3 = 0. \qquad (4.4)$$

Розв’язання. Запишемо рівняння (4.4) у вигляді еквівалентної йому системи рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^3 - x^2 y. \end{cases}$$

У якості функції Ляпунова $v(x, y)$ виберемо функцію

$$v(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4.$$

Маємо

$$\frac{dv}{dt} = y\dot{y} + x^3\dot{x} = -x^3 y - x^2 y^2 + x^3 y = -x^2 y^2.$$

Очевидно, що $v(x, y) \to \infty$ при $x^2 + y^2 \to \infty$. Далі, $\dot{v}(x, y)$ обертається в нуль тільки на осях координат (множина E). Очевидно, що жодний розв’язок, за винятком точки спокою на початку координат, не залишається на цих осях при всіх $t \ge 0$. Насправді, у всіх точках осі OY, відмінних від початку координат O, кутовий коефіцієнт

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x^3-x^2y}{y}$$

має скінчене значення, а тому на цій осі не може лежати дуга траєкторії. З іншого боку, при підході до осі OX кутовий коефіцієнт $\frac{dy}{dx}\to\infty\neq 0$ і тому на осі OX не можуть перебувати дуги траєкторій. Отже, множина E не містить цілих траєкторій (крім початку координат).

У силу теореми 4.1 точка спокою (0, 0) має асимптотичну стійкість в цілому.

Приклад 2 Вказати область асимптотичної стійкості рівняння

$$\ddot{x}+\varepsilon\left(x^2-1\right)\dot{x}+x=0 \qquad (\varepsilon<0)$$

(рівняння Ван-дер-Поля).

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді системи

$$\begin{cases}\dot{x}=y-\varepsilon\left(\dfrac{x^3}{3}-x\right),\\ \dot{y}=-x.\end{cases}$$

Єдина точка спокою – початок координат. Виберемо $v(x,\ y)=\frac{x^2+y^2}{2}$. Тоді $\dot{v}(x,\ y)=y\dot{y}+x\dot{x}=-\varepsilon x^2\left(\frac{x^2}{3}-1\right)$. Очевидно, $\dot{v}\le 0$ при $x^2\le 3$ $(\varepsilon<0)$. Таким чином, в крузі $x^2+y^2<3$ маємо: $v>0$ при $x^2+y^2\neq 0$ і $\dot{v}<0$ при $x^2+y^2\neq 0$, тобто цей круг міститься в області асимптотичної стійкості.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Дослідити на асимптотичну стійкість в цілому нульові розв'язки рівнянь:

№ 4.1. $\ddot{x}+\dot{x}^3+\left(\dot{x}^2+1\right)x=0$. **№ 4.2.** $\ddot{x}+\dot{x}+\left(\dot{x}^2+\dot{x}+2\right)\left(2x+x^5\right)=0$.

№ 4.3. $\ddot{x}+x^2e^{-x}\dot{x}+x^3+2x=0$.

№ 4.4. Показати, що всі розв'язки рівняння $\ddot{x}(t)+\left(a^2+\frac{1}{1+t^2}\right)x(t)=0$ обмежені на $[1,\ +\infty)$.

№ 4.5. Показати, що всі розв'язки рівняння $\ddot{x}(t)+\left(1+e^{-t^2}-\frac{1}{t+2}\right)x(t)=0$ обмежені на $[1,\ +\infty)$.

№ 4.6. На прикладі рівнянь

а) $\ddot{x}(t)-\frac{2}{t}\dot{x}(t)+x(t)=0$;

б) $\ddot{x}(t)+\frac{2}{t}\dot{x}(t)+x(t)=0$

показати, що з обмеженості всіх розв'язків «граничного» рівняння $\ddot{x}(t)+x(t)=0$ не випливає обмеженості розв'язків вихідного рівняння.