5 КРИТЕРІЙ РАУСА-ГУРВІЦА

Велике практичне значення мають необхідні й достатні умови того, щоб всі корені алгебраїчного рівняння з дійсними коефіцієнтами $a_0,\ a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n$

$$f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{5.1}$$

мали від’ємні дійсні частини.

Припустимо, що $a_0 > 0$. Додатність всіх коефіцієнтів – необхідна, але не достатня умова для того, щоб всі корені рівняння (5.1) були розташовані ліворуч від уявної осі (у випадку рівнянь 1-го та 2-го степеня ця умова й достатня). Необхідні й достатні умови від’ємності дійсних частин коренів рівняння (5.1):

Умови Рауса-Гурвіца. Для того щоб всі корені рівняння (5.1) мали від’ємні дійсні частини, необхідно й достатньо, щоб були додатними всі головні діагональні мінори матриці Гурвіца

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & ... & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Многочлен $f(\lambda)$ степеня $n \geq 1$ називають *стійким многочленом*, якщо всі його корені $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_n$ мають від’ємні дійсні частини: $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0 \quad (j = 1,\ 2,\ ...,\ n)$, тобто всі корені стійкого многочлена розташовані в лівій півплощині.

Матриця Гурвіца складається так. По головній діагоналі розташовуються коефіцієнти многочлена (5.1), починаючи з a_1 до a_n. Стовпці складаються по черзі з коефіцієнтів тільки з непарними або тільки з парними індексами, причому в число останніх включається коефіцієнт a_0. Усі відсутні елементи, тобто коефіцієнти з індексами, більшими n або меншими 0, заміняються нулями.

Головні діагональні мінори матриці Гурвіца

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},\ \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & ... & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_n \end{vmatrix}. \tag{5.3}$$

Таким чином, умова Гурвіца виглядає так:

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \Delta_n > 0. \tag{5.4}$$

Помітимо, що $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot a_n$, тому остання з умов $\Delta_n > 0$ може бути замінена вимогою $a_n > 0$.

Обчислення можна вести так. Спочатку складаємо мінор Δ_n. Потім послідовно обчислюємо мінори Δ_1, Δ_2, Δ_3 і т.д. Якщо зустрівся від'ємний мінор, то система нестійка й подальші обчислення зайві.

Якщо коефіцієнти рівняння (5.1) задані як числа, то умови (5.4) легко перевіряються. Якщо ж коефіцієнти рівняння (5.2) містять буквені параметри, то обчислення визначників при великих k буде важким.

Можна показати, що якщо умови (5.4) виконані, то всі коефіцієнти многочлена (5.1) додатні

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ \ldots,\ a_n > 0. \qquad (5.5)$$

Як відзначалося, умови (5.5) є необхідними, але не достатніми для того, щоб всі корені $f(\lambda)$ розташовувалися в лівій півплощині $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Однак при виконанні умов (5.5) нерівності (5.4) уже не є незалежними. Так, наприклад, при $n = 5$ умови Рауса-Гурвіца приводяться до двох нерівностей: $\Delta_2 > 0$, $\Delta_4 > 0$. Це дозволило Л'єнару та Шипару встановити інші умови стійкості, у яких число детермінантних нерівностей приблизно вдвічі менше, ніж в умовах (5.4).

Умови Л'єнара-Шипара. Для того щоб многочлен

$$f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n \qquad (5.6)$$

мав всі корені з від'ємними дійсними частинами, необхідно й достатньо, щоб:

1) всі коефіцієнти многочлена $f(\lambda)$ були додатні:

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ \ldots,\ a_n > 0;$$

2) мали місце детермінантні нерівності

$$\Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0,\ \ldots$$

(тут, як і раніше, Δ_k – визначник Гурвіца k-го порядку).

6 ГЕОМЕТРИЧНИЙ КРИТЕРІЙ СТІЙКОСТІ (КРИТЕРІЙ МИХАЙЛОВА)

Нехай маємо диференціальне рівняння n-го порядку з постійними дійсними коефіцієнтами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \qquad (6.1)$$

Питання про стійкість розв'язку диференціального рівняння (6.1) зводиться до питання про розташування коренів характеристичного рівняння

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (6.2)$$

на комплексній площині. Останнє вирішується за допомогою нижченаведеного критерію Михайлова.

Нехай дано характеристичний многочлен

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n. \qquad (6.3)$$

Підставивши в нього $\lambda = iw$, одержимо

$$f(iw) = u(w) + iv(w), \tag{6.4}$$

де

$$u(w) = a_n - a_{n-2}w^2 + a_{n-4}w^4 - \ldots,$$
$$v(w) = a_{n-1}w - a_{n-3}w^3 + a_{n-5}w^5 - \ldots\ . \tag{6.5}$$

Величину $f(iw)$ згідно (6.4) і (6.5) при заданому параметрі w можна зобразити на комплексній площині uOv у вигляді вектора. Якщо змінювати параметр w в інтервалі $(-\infty, +\infty)$, то кінець цього вектора опише деяку криву, кожна точка якої відповідає певному значенню w. Отриманий у такий спосіб годограф вектора $f(iw)$ називається *кривою Михайлова* для многочлена $f(\lambda)$ (рис. 6.1).

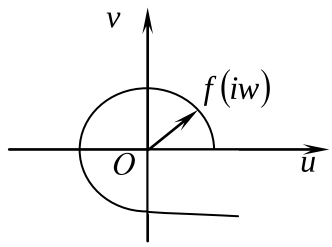

Рисунок 6.1

При зміненні w від $-\infty$ до $+\infty$ вектор $f(iw)$ повернеться на деякий кут φ. Якщо многочлен $f(\lambda)$ має m коренів із додатними дійсними частинами, а інші $n-m$ коренів із від'ємними, то

$$\varphi = (n-m)\pi + m(-\pi) = (n-2m)\pi. \tag{6.6}$$

Зауваження. Так як функція $u(w)$ парна, то крива Михайлова симетрична відносно вісі Ou, і тому достатньо побудувати частину кривої Михайлова, що відповідає зміні параметра w від 0 до $+\infty$. Тоді формула (6.6) буде мати вигляд

$$\varphi = (n-m)\frac{\pi}{2} + m\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (n-2m)\frac{\pi}{2}. \tag{6.7}$$

Для стійкості розв'язку рівняння (6.1) необхідно й достатньо, щоб всі корені характеристичного рівняння $f(\lambda) = 0$ мали від'ємні дійсні частини, тобто у формулі (6.7) повинно бути $m = 0$.

Звідси випливає наступне формулювання *критерію Михайлова*: для стійкості тривіального розв'язку рівняння (6.1) необхідно й достатньо, щоб:

1) вектор $f(iw)$ при зміні w від 0 до $+\infty$ здійснив поворот на кут $\varphi = n\dfrac{\pi}{2}$, тобто зробив $\dfrac{n}{4}$ обертів проти годинникової стрілки;

2) годограф $f(iw)$ при зміні w від 0 до $+\infty$ не проходив через нульову точку.

Інакше, для стійкості розв'язку рівняння (6.1) необхідно й достатньо, щоб крива Михайлова проходила по черзі n квадрантів проти годинникової стрілки, оточуючи увесь час початок координат.

Почергове проходження квадрантів означає, що крива по черзі перетинає осі координат. Отже, координати $u(w)$ й $v(w)$ точок кривої Михайлова для стійкості розв'язку повинні по черзі обертатися в нуль. Звідси випливає *друге формулювання критерію стійкості Михайлова*:

Для стійкості розв'язку рівняння (6.1) необхідно (а за умови, що крива проходиться проти годинникової стрілки – і достатньо), щоб всі корені рівнянь

$u(w)=0$, $v(w)=0$ були дійсними й переміжними один з одним, тобто щоб між будь-якими двома коренями одного з цих рівнянь перебував корінь іншого рівняння.

7 *D*-РОЗБИТТЯ

Нехай маємо лінійне диференціальне рівняння з постійними дійсними коефіцієнтами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \tag{7.1}$$

Його характеристичне рівняння має вигляд

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{7.2}$$

Для судження про стійкість розв’язку рівняння (7.1) немає необхідності обчислювати корені характеристичного рівняння. Досить лише встановити, що всі вони лежать у лівій півплощині. Звичайно зустрічаються дві постановки цієї задачі.

Перша. Вважаючи заданими всі коефіцієнти рівняння (7.1), встановити, чи стійкий розв’язок при цих значеннях коефіцієнтів.

Друга. Вважаючи заданими деякі коефіцієнти рівняння (7.1), визначити, при яких значеннях інших коефіцієнтів розв’язок рівняння стійкий.

Побудова областей стійкості

Поняття про D-розбиття. Нехай маємо характеристичне рівняння (7.2). Сукупність значень коефіцієнтів рівняння (7.1) можна розглядати як точку $n+1$- мірного простору R_{n+1}. Кожній точці простору R_{n+1} відповідає певне значення коефіцієнтів $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$, а отже, і певне значення всіх коренів $z_1, z_2, ..., z_n$ характеристичного рівняння (7.2). Якщо в R_{n+1} існує така область, що кожній її точці відповідає характеристичне рівняння, все корені якого лежать в лівій півплощині, то ця область називається *областю стійкості*, а гіперповерхня, що обмежує її, називається *границею області стійкості*. Нехай, наприклад, у характеристичному рівнянні (7.2) всі коефіцієнти, крім двох, скажемо a_1 і a_2, – конкретні числа.

Припустимо, що при деяких певних значеннях a_1 і a_2 дане рівняння в площині коренів (тобто в площині z) має k коренів, що лежать ліворуч, і $(n-k)$ коренів, що лежать праворуч від уявної осі (рис. 7.1).

На площині *A* (площина параметрів a_1 і a_2) існує крива, що обмежує таку область (рис. 7.2), кожна точка якої визначає многочлен, що також має k коренів, що лежать ліворуч, і $(n-k)$ коренів, що лежить праворуч від уявної осі. Цю область позначимо через $D(k,\ n-k)$ (k – ціле, $0 \le k \le n$).

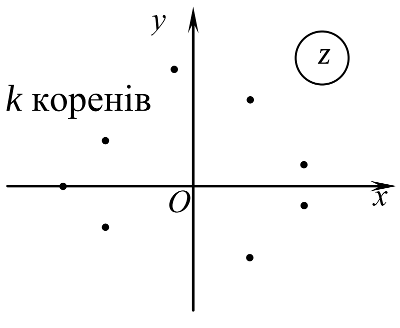

Рисунок 7.1

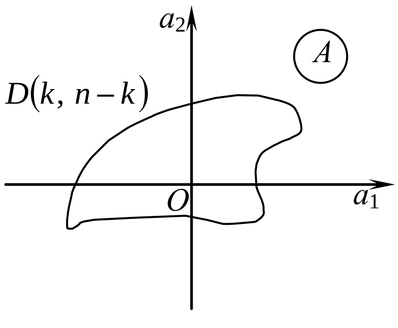

Рисунок 7.2

Наприклад, якщо характеристичне рівняння має третій степінь, тобто $n=3$, то в загальному випадку в просторі коефіцієнтів можуть бути вказані області $D(0;\,3)$, $D(1;\,2)$, $D(2;\,1)$, $D(3;\,0)$.

Область $D(3;\,0)$ і буде областю стійкості.

Помітимо, що деякі області, зокрема, $D(3;\,0)$ можуть бути відсутніми.

Розбиття простору коефіцієнтів характеристичного рівняння на області, що відповідають тому самому числу коренів, розташованих у лівій півплощині площини z, називається *D-розбиттям* простору коефіцієнтів.

Аналогічно можна побудувати *D*-розбиття простору будь-яких параметрів, від яких можуть залежати коефіцієнти характеристичного рівняння.

Припустимо, що в характеристичному рівнянні (7.2) коефіцієнти залежать від двох параметрів ξ і η (цими параметрами можуть бути, зокрема, просто два коефіцієнти розглянутого рівняння).

Розглянемо сімейство многочленів

$$f(z,\,\xi,\,\eta)=\xi P(z)+\eta Q(z)+R(z), \tag{7.3}$$

де (ξ, η) – дійсні параметри, а *P, Q, R* – відомі многочлени від z з дійсними коефіцієнтами.

Задача ставиться так:

У площині параметрів (ξ, η) (площина *w*) знайти область $D(n;\,0)$ таку, що для будь-якої точки $(\xi,\,\eta)\in D(n,\,0)$ многочлен (7.3) буде мати всі корені z в лівій півплощині, або переконатися, що такої області немає.

Побудова областей $D(k;\,n-k)$ заснована на наступних міркуваннях:

1) корені алгебраїчного рівняння неперервно залежать від його коефіцієнтів, тобто якщо коефіцієнти многочлена $f(z,\,\xi,\,\eta)$ трохи змінити, то й корені його змінилися б трохи;

2) якщо точка (ξ, η) лежить на границі області $D(k;\,n-k)$, то хоча б один корінь многочлена (7.3) лежить на уявній осі, тобто границя *D*-розбиття є образом уявної осі площини z.

Дійсно, якщо, наприклад, точка $(\xi,\,\eta)\in D(n,\,0)$, то многочлен (7.3) має при цьому всі корені в лівій півплощині.

Якщо (ξ, η) лежить поза $D(n;\,0)$, то многочлен (7.3) має хоча б один корінь у правій півплощині.

При неперервному русі точки (ξ, η) з області $D(n;\,0)$ в сусідню неперервно змінюються корені многочлена $f(z,\,\xi,\,\eta)$. Так як при цьому з'являється хоча б один корінь у правій півплощині, то в процесі зміни (ξ, η) він повинен перетнути уявну вісь (вісь *Oy*). Це буде, коли точка (ξ, η) перетне границю області $D(n;\,0)$.

Нехай $z=x+iy$ – корінь многочлена $D(n;\,0)$. Рівність $f(z,\,\xi,\,\eta)=0$ рівносильна рівностям

$$\begin{cases}\xi u_1(x,\,y)+\eta u_2(x,\,y)+u_3(x,\,y)=0,\\ \xi v_1(x,\,y)+\eta v_2(x,\,y)+v_3(x,\,y)=0,\end{cases} \tag{7.4}$$

де u_1, u_2, u_3 і v_1, v_2, v_3 – дійсні та уявні частини многочленів P, Q і R відповідно.

Якщо визначник системи (7.4)

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система (7.4) однозначно розв’язанна відносно ξ і η:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,\ y), \\ \eta = \eta(x,\ y). \end{cases} \qquad (7.5)$$

Рівняння (7.5) у точках, де $\Delta \neq 0$, визначають однозначне відображення площини коренів многочлена $f(z,\ \xi,\ \eta)$ на площину параметрів (ξ, η).

Зворотне відображення неоднозначне: фіксованій парі значень (ξ, η) відповідає, взагалі, n коренів. Якщо визначник системи (7.4) у точці $z_0 = x_0 + iy_0$ обертається в нуль, то система або несумісна, або одне рівняння є наслідком іншого.

У цьому останньому випадку на площині параметрів w існує ціла пряма, що складається з точок (ξ, η), для яких $z_0 = x_0 + iy_0$ є коренем многочлена $f(z,\ \xi,\ \eta)$. Таку точку $(x_0,\ y_0)$, а також відповідну їй пряму будемо називати *винятковими*.

Знайдемо на площині параметрів (ξ, η) ті точки, для яких многочлен (7.3) має хоча б один чисто уявний корінь $z = iy$.

Геометричне місце таких точок складається з лінії, параметричні рівняння якої є

$$\begin{cases} \xi = \xi(0,\ y), \\ \eta = \eta(0,\ y) \end{cases} \qquad (-\infty < y < +\infty) \qquad (7.6)$$

і яку можна одержати, вважаючи $x = 0$ в рівняннях (7.5), а також з виняткових прямих, що відповідають винятковим точкам вісі Oy (якщо такі є).

Помітимо, що рівняння (7.6) дають образ вісі Oy при відображенні (7.5).

Це геометричне місце точок будемо називати *лінією L*.

Лінія L розбиває площину параметрів на деяке число зв’язних областей.

Кожна з таких областей має таку властивість, що для будь-якої її точки (ξ, η) многочлен $f(z,\ \xi,\ \eta)$ має одне й те саме число коренів, розташованих у лівій півплощині, тобто є областю типу $D(k;\ n-k)$ $(0 \leq k \leq n)$.

Таким чином, лінія L – границя шуканого D-розбиття.

Розглянемо відображення (7.5) площини коренів на площину параметрів

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,\ y), \\ \eta = \eta(x,\ y). \end{cases}$$

Проведемо через точку $(x_0,\ y_0)$ дві лінії: горизонтальну I та вертикальну II.

Якщо напрямок повороту від I до II зберігається при відображенні (7.5), то говорять, що відображення зберігає орієнтацію в точці $(x_0,\ y_0)$; інакше – що воно не зберігає орієнтацію (рис. 7.3 і 7.4).

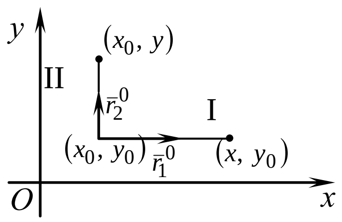

Рисунок 7.3

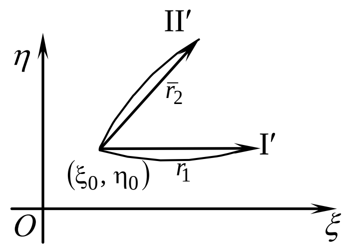

Рисунок 7.4

Якщо визначник

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial y} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix} > 0$$

у точці (x_0, y_0), то відображення (7.5) у точці (x_0, y_0) зберігає орієнтацію. При $I < 0$ орієнтація порушується. Якщо $I = 0$, то питання про збереження або незбереження орієнтації вирішують старші похідні. Можна показати, що знак визначника I збігається зі знаком визначника Δ, де

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix},$$

тому якщо $\Delta > 0$, то відображення із площини коренів на площину параметрів зберігає орієнтацію, якщо $\Delta < 0$, то орієнтація змінюється.

Розглянемо знову розбиття площини w (площина параметрів) на області $D(k;\, n-k)$ $(k \le n)$ і позначимо через L границю цих областей. Додатним напрямком на L будемо вважати той, який відповідає зростанню y (починаючи з $y = -\infty$); при цьому крива L може складатися з декількох віток, і при повному обході вісі Oy її ділянки можуть проходитися декілька разів (не більше n, де n – степінь многочлена $f(z, \xi, \eta)$).

Розглянемо деяку ділянку $w_1 w_2$ кривої L і припустимо, що при повному обході вісі Oy вона обходиться r разів, тобто що цій ділянці відповідає r ділянок $y_1^\mu y_2^\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, r)$ вісі Oy. Покладемо $\varepsilon_\mu = 1$, якщо напрямок $y_1^\mu y_2^\mu$ збігається з напрямком вісі Oy, і $\varepsilon_\mu = -1$ у протилежному випадку. Покладемо також $\delta_\mu = 1$, якщо на $y_1^\mu y_2^\mu$ визначник $\Delta > 0$, і $\delta_\mu = -1$ в протилежному випадку. Нехай точка w, рухаючись неперервно по деякому досить малому шляху, перетинає дугу $w_1 w_2$ зліва направо (рис. 7.5). Цьому шляху в площині z відповідає r шляхів, що перетинають відрізки $y_1^\mu y_2^\mu$ вісі Oy. Якщо $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu > 0$, то відповідний шлях йде з лівої півплощини в праву й многочлен

$$f(z, \xi, \eta) = \xi P(z) + \eta Q(z) + R(z)$$

здобуває на ньому один корінь із додатною дійсною частиною

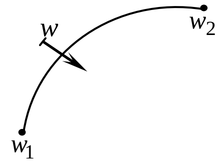

Рисунок 7.5

та втрачає корінь із від'ємною дійсною частиною; у випадку $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu < 0$ – навпаки.

Дійсно, нехай $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu > 0$. Це може бути у двох випадках: 1) $\varepsilon_\mu = 1$, $\delta_\mu = 1$; 2) $\varepsilon_\mu = -1$, $\delta_\mu = -1$. У першому випадку напрямок відрізка вісі *Oy* збігається з додатним напрямком цієї осі ($\varepsilon_\mu = 1$) і зберігається орієнтація ($\delta_\mu = 1$), тобто якщо в площині *w* ми переходимо дугу $w_1 w_2$ зліва направо, то й у площині z ми переходимо з лівої півплощини в праву (тобто вісь *Oy* перетинаємо теж зліва направо, рис. 7.6).

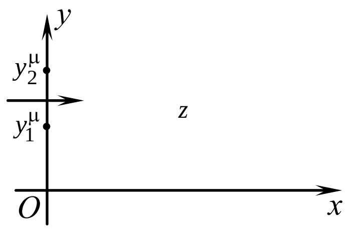

Рисунок 7.6

У другому випадку вектор $y_1^\mu y_2^\mu$ спрямований убік, протилежний напрямку $\overrightarrow{Oy}$ ($\varepsilon_\mu = -1$). Так як $\delta_\mu = -1$, то орієнтація в цьому випадку змінюється, і при переході зліва направо у площині *w* знову одержуємо перехід зліва направо у площині z через вісь *Oy*. Аналогічно розглядається випадок $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu < 0$. Отже, при переході з лівої сторони дуги $w_1 w_2$ кривої *L* на праву сторону многочлен $f(z, \xi, \eta)$ втрачає

$$N = \varepsilon_1 \delta_1 + \varepsilon_2 \delta_2 + \ldots + \varepsilon_r \delta_r$$

коренів із від'ємною дійсною частиною.

Приклад Вишнеградського. Дано многочлен $f(z) = z^3 + \xi z^2 + \eta z + 1$. Знайти область $D(3;\, 0)$.

Розв'язання. Покладаючи $z = iy$ і розділяючи дійсну й уявну частини, знайдемо параметричні рівняння кривої *L*:

$$\xi = \frac{1}{y^2}, \qquad \eta = y^2.$$

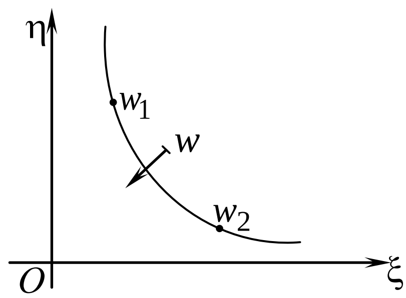

Рисунок 7.7

Це – вітка гіперболи $\xi\eta = 1$, яка лежить в першому квадранті. При повному обході вісі *Oy* (*y* змінюється від $-\infty$ до $+\infty$) гіпербола описується два рази, тобто $r = 2$; при цьому один раз гіпербола проходиться в одному напрямку при зміні *y* від $-\infty$ до 0.

При подальшій зміні *y* від 0 до $+\infty$ гіпербола проходиться другий раз, але вже в протилежному напрямку. Таким чином, відрізку $w_1 w_2$ кривої *L* відповідають два відрізки вісі *Oy*: $y_1^1 y_2^1$ і $y_1^2 y_2^2$ (рис. 7.7 і 7.8). Визначник Δ на вісі *Oy* дорівнює $\Delta = -y^3$. Отже, $\delta_1 = 1$ (так як при $\mu = 1$ $y < 0$), а $\delta_2 = -1$ (так як при $\mu = 2$ $y > 0$). При переході точки *w* через $w_1 w_2$ зліва направо губиться *N* коренів із від'ємною частиною, де

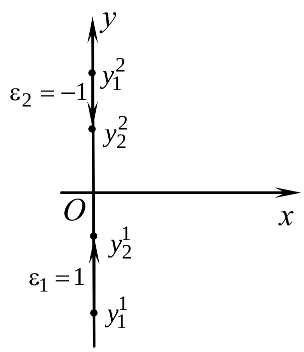

Рисунок 7.8

$$N=\varepsilon_1\delta_1+\varepsilon_2\delta_2=2\,.$$

На початку координат $\xi=\eta=0$ многочлен $f(z)$ приймає вигляд z^3+1 і має корені $z_1=-1$, $z_{2,3}=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$, отже, область під гіперболою є $D(1;\,2)$. Область над гіперболою є область $D(3;\,0)$. Насправді, при переході із цієї області в $D(1;\,2)$ многочлен $f(z)$ втратив два корені з від'ємною дійсною частиною й перетворився в многочлен, що має один корінь із від'ємною дійсною частиною. Отже, в області над гіперболою було три корені з від'ємною дійсною областю (рис. 7.9). Для перевірки можна взяти точку $\xi=\eta=3$, в якій многочлен приймає вигляд

$$z^3+3z^2+3z+1$$

і має трикратний корінь $z=-1$.

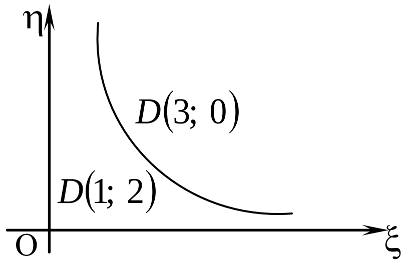

Рисунок 7.9

Таким чином, для побудови D-областей будемо робити так:

1) у многочлені $f(z,\,\xi,\,\eta)$ покладаємо $z=iy$, відокремлюємо дійсну й уявну частини й прирівнюємо їх до нуля:

$$\begin{cases}\xi u_1(y)+\eta u_2(y)+u_3(y)=0,\\ \xi v_1(y)+\eta v_2(y)+v_3(y)=0.\end{cases}\tag{7.7}$$

Розв'язуючи (7.7) відносно ξ і η, одержуємо

$$\begin{cases}\xi=\xi(y),\\ \eta=\eta(y)\end{cases}$$

– параметричні рівняння лінії L.

2) Будуємо криву L на площині параметрів, змінюючи y в межах від $-\infty$ до $+\infty$, причому якщо в рівняннях (7.7) ξ – перша змінна, а η – друга, то при побудові кривої L система координат ξOη повинна бути правою.

Якщо при деякому значенні y визначник системи (7.7) і визначники

$$\Delta_\xi=\begin{vmatrix}-u_3 & u_2\\ -v_3 & v_2\end{vmatrix}\ \text{і}\ \Delta_\eta=\begin{vmatrix}u_1 & -u_3\\ v_1 & -v_3\end{vmatrix}$$

обертаються в нуль, то при цьому значенні y одне з рівнянь (7.7) є наслідком іншого, і для цього значення y одержуємо в площині $\xi O\eta$ не точку, а пряму лінію (особлива або виняткова пряма). Її ми також включаємо в границю D-розбиття.

Якщо коефіцієнт при старшому члені характеристичного рівняння залежить від параметрів ξ і η, то, прирівнюючи цей коефіцієнт нулю, одержуємо рівняння ще однієї особливої прямої, що відповідає $y=\infty$.

Якщо, нарешті, визначник системи (7.7) $\Delta\equiv 0$, то границею D-розбиття служать тільки особливі прямі.

3) Виділяємо зв'язні області, на які L розбиває площина параметрів. Це й будуть області $D(k,\,n-k)$ $(0\le k\le n)$.

4) Визначаємо характер цих областей, тобто знаходимо k і $n-k$. Для цього вибираємо в кожній з областей $D(k, n-k)$ по одній точці (ξ_0, η_0) й досліджуємо отриманий многочлен $f(z, \xi_0, \eta_0)$ із числовими коефіцієнтами на стійкість за допомогою викладених вище критеріїв стійкості Рауса-Гурвіца або Михайлова.

8 СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

I. *Розв'язання однорідних лінійних різницевих рівнянь із постійними коефіцієнтами*. Нехай маємо різницеве рівняння порядку k:

$$f(n+k)+a_1 f(n+k-1)+\ldots+a_k f(n)=0, \tag{8.1}$$

де $a_k \neq 0$; $f(n)$ – шукана функція цілочислового аргументу; a_1, a_2, …, a_k – дійсні постійні.

Для знаходження нетривіальних (ненульових) розв'язків рівняння (8.1) запишемо характеристичне рівняння

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1}+\ldots+a_k=0, \tag{8.2}$$

Нехай $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ – корені рівняння (8.2). Можливі наступні випадки:

1) $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ – дійсні та різні. Загальним розв'язком рівняння (8.1) буде

$$f(n)=C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n+\ldots+C_k\lambda_k^n, \tag{8.3}$$

де $C_1, C_2, ..., C_k$ – довільні постійні, які можуть бути визначені, якщо задані початкові умови

$$f(0)=f_0, \quad f(1)=f_1, \quad \ldots, \quad f(k-1)=f_{k-1}.$$

2) Корені характеристичного рівняння дійсні, але серед них є кратні. Нехай, наприклад, $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_j=\tilde{\lambda}$, тобто $\tilde{\lambda}$ є j-кратним коренем рівняння (8.2), а всі інші $k-j$ корені різні.

Загальним розв'язком рівняння (8.1) буде

$$f(n)=C_1\tilde{\lambda}^n + C_2 n\tilde{\lambda}^n+\ldots+C_j n^{j-1}\tilde{\lambda}^n + C_{j+1}\lambda_{j+1}^n+\ldots+C_k\lambda_k^n. \tag{8.4}$$

3) Серед коренів характеристичного рівняння (8.2) є прості комплексні корені. Нехай, наприклад, для визначеності

$$\lambda_1=\alpha+i\beta, \qquad \lambda_2=\alpha-i\beta,$$
$$\lambda_3=\gamma+i\delta, \qquad \lambda_4=\gamma-i\delta,$$

інші корені дійсні та різні. Тоді загальний розв'язок (8.1) має вигляд

$$f(n)=C_1|\lambda_1|^n\cos(n\arg\lambda_1)+C_2|\lambda_1|^n\sin(n\arg\lambda_1)+C_3|\lambda_3|^n\cos(n\arg\lambda_3)+$$
$$+C_4|\lambda_3|^n\sin(n\arg\lambda_3)+C_5\lambda_5^n+\ldots+C_k\lambda_k^n. \tag{8.5}$$

4) У випадку, якщо $\lambda_1=\alpha+i\beta$ є j- кратним коренем рівняння (8.2) $\left(j\le\frac{k}{2}\right)$, то $\lambda_2=\alpha-i\beta$ також буде j- кратним коренем і загальний розв'язок (8.1) має вигляд

$$f(n)=\left(C_1+C_2n+\ldots+C_jn^{j-1}\right)\left|\lambda_1\right|^n\cos(n\arg\lambda_1)+$$
$$+\left(C_{j+1}+C_{j+2}n+\ldots+C_{2j}n^{j-1}\right)\left|\lambda_1\right|^n\sin(n\arg\lambda_1)+C_{2j+1}\lambda_{2j+1}^n+\ldots+C_k\lambda_k^n\,.\quad(8.6)$$

Зауваження. Корінь $\lambda=0$ відповідає тривіальному (нульовому) розв’язку $f(n)\equiv 0$.

II. *Розв’язання неоднорідних лінійних різницевих рівнянь із постійними коефіцієнтами*. Нехай маємо неоднорідне лінійне різницеве рівняння *k*-го порядку

$$f(n+k)+a_1f(n+k-1)+\ldots+a_kf(n)=g(n)\qquad(8.7)$$

з постійними дійсними коефіцієнтами $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$. Загальний розв’язок цього рівняння являє собою суму загального розв’язку відповідного однорідного рівняння і якого-небудь частинного розв’язку неоднорідного рівняння.

1) Нехай права частина $g(n)$ рівняння (8.7) має вигляд

$$g(n)=r^nu(n),$$

де $u(n)$ – многочлен від n степеня *m*, а r – дійсне число.

Якщо r не є коренем характеристичного рівняння (8.2), то частинний розв’язок $\tilde f(n)$ шукається у вигляді

$$\tilde f(n)=r^n\tilde u(n),$$

де $\tilde u(n)$ – многочлен степеня *m*; якщо ж r є j-кратним коренем рівняння (8.2), то $\tilde u(n)$ – многочлен степеня $m+j$.

2) Якщо права частина $g(n)$ рівняння має вигляд

$$g(n)=u(n)\sin\alpha n \text{ або } g(n)=u(n)\cos\alpha n,$$

то частинний розв’язок шукається у вигляді

$$\tilde f(n)=\tilde u(n)\sin\alpha n+\tilde{\tilde u}(n)\cos\alpha n.$$

3) Якщо $g(n)=u(n)\mathrm{sh}\alpha n$ або $g(n)=u(n)\mathrm{ch}\alpha n$, то частинний розв’язок шукається у вигляді

$$\tilde f(n)=\tilde u(n)\mathrm{sh}\alpha n+\tilde{\tilde u}(n)\mathrm{ch}\alpha n.$$

Тут $\tilde u(n)$ и $\tilde{\tilde u}(n)$ – многочлени, степінь яких визначається за правилом, зазначеному в п. 1).

III. *Стійкість розв’язків різницевих рівнянь*. Розв’язок $f^*(n)$ різницевого рівняння порядку *k*, що задовольняє початковим умовам

$$f^*(0)=f_0^*,\ f^*(1)=f_1^*,\ \ldots,\ f^*(k-1)=f_{k-1}^*,$$

називається стійким, якщо для кожного $\varepsilon>0$ існує $\delta(\varepsilon)>0$ таке, що для будь-якого розв’язку $f(n)$ рівняння (8.1), що задовольняє початковим умовам

$$f(0)=f_0,\ f(1)=f_1,\ \ldots,\ f(k-1)=f_{k-1},$$

із сукупності нерівностей

$$\left|f_0-f_0^*\right|<\delta,\ \left|f_1-f_1^*\right|<\delta,\ \ldots,\ \left|f_{k-1}-f_{k-1}^*\right|<\delta$$

випливає нерівність $\left| f(n) - f^*(n) \right| < \varepsilon$ при кожному $n \geq 0$.

Якщо при як завгодно малому $\delta(\varepsilon) > 0$ нерівність $\left| f(n) - f^*(n) \right| < \varepsilon$ не виконується для якого-небудь розв'язку $f(n)$, то розв'язок $f^*(n)$ називається нестійким.

Якщо крім виконання нерівності $\left| f(n) - f^*(n) \right| < \varepsilon$ виконується також умова

$$\lim_{n \to \infty} \left[f(n) - f^*(n) \right] = 0,$$

то розв'язок $f^*(n)$ називається асимптотично стійким.

Дослідження на стійкість розв'язку $f^*(n)$ неоднорідного лінійного різницевого рівняння

$$f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \ldots + a_k f(n) = g(n)$$

за допомогою заміни $\varphi(n) = f(n) - f^*(n)$ зводиться до дослідження стійкості нульового (тривіального) розв'язку однорідного рівняння

$$\varphi(n+k) + a_1 \varphi(n+k-1) + \ldots + a_k \varphi(n) = 0.$$

Надалі ми обмежимося дослідженням стійкості тільки тривіальних розв'язків однорідних рівнянь.

Для дослідження на стійкість нульового розв'язку $f(n) \equiv 0$ рівняння (8.1) користуються наступним загальним правилом:

1) якщо всі корені характеристичного рівняння (8.2) за модулем менше одиниці, то розв'язок $f(n) \equiv 0$ рівняння (8.1) асимптотично стійкий.

2) Якщо хоча б один корінь характеристичного рівняння за модулем більше одиниці, то розв'язок $f(n) \equiv 0$ нестійкий.

3) Якщо характеристичне рівняння має простий корінь з модулями, рівними одиниці, а інші корені, якщо вони є, за модулем менше одиниці, то розв'язок $f(n) \equiv 0$ стійкий, але не асимптотично.

4) Якщо характеристичне рівняння має хоча б один кратний корінь із модулем, рівним одиниці, то розв'язок $f(n) \equiv 0$ нестійкий.

Зазначене правило зводить питання про стійкість нульового розв'язку рівняння (8.1) до з'ясування того, які модулі мають корені характеристичного рівняння (8.2).