5 КРИТЕРІЙ РАУСА-ГУРВІЦА

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1 Дослідити на стійкість тривіальний розв’язок рівняння
$$y^{V}+y^{IV}+7y'''+4y''+10y'+3y=0.$$
Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння
$$f(\lambda)=\lambda^5+\lambda^4+7\lambda^3+4\lambda^2+10\lambda+3=0.$$
Тут $a_0=1$, $a_1=1$, $a_2=7$, $a_3=4$, $a_4=10$, $a_5=3$.

I спосіб.

Виписуємо діагональні мінори Гурвіца
$$\Delta_1=1>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1&1\\4&7\end{vmatrix}=3>0,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&0\\4&7&1\\3&10&4\end{vmatrix}=5>0,$$
$$\Delta_4=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\4&7&1&1\\3&10&4&7\\0&0&3&10\end{vmatrix}=10\Delta_3-3\begin{vmatrix}1&1&0\\4&7&1\\3&10&7\end{vmatrix}=50-3\cdot 14=8>0,$$
$$\Delta_5=\begin{vmatrix}1&1&0&0&0\\4&7&1&1&0\\3&10&4&7&1\\0&0&3&10&4\\0&0&0&0&3\end{vmatrix}=3\Delta_4=24>0.$$
Таким чином, $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3>0$, $\Delta_4>0$, $\Delta_5>0$. Отже, тривіальний розв’язок $y\equiv 0$ рівняння асимптотично стійкий.

II спосіб.

$a_0=a_1=1>0$, $a_2=7>0$, $a_3=4>0$, $a_4=10>0$, $a_5=3>0$, тобто перша умова критерію Л’єнара-Шипара виконана.

Далі,
$$\Delta_4=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\4&7&1&1\\3&10&4&7\\0&0&3&10\end{vmatrix}=8>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1&1\\4&7\end{vmatrix}=3>0,$$
тобто виконана й умова 2.

Таким чином, тривіальний розв’язок рівняння асимптотично стійкий.

Приклад 2 При яких значеннях α і β буде стійкий тривіальні розв’язок рівняння
$$y^{IV}+\alpha y'''+2y''+\beta y'+y=0\,?$$

Розв'язання. Тут $a_0 = 1$, $a_1 = \alpha$, $a_2 = 2$, $a_3 = \beta$, $a_4 = 1$.

Виписуємо діагональні мінори Гурвіца

$$\Delta_1 = \alpha > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 2 \end{vmatrix} = 2\alpha - \beta > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{vmatrix} = 2\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2 = -(\alpha+\beta)^2 < 0 \text{ при будь-яких } \alpha \text{ і } \beta$$

$$\Delta_4 = \Delta_3 < 0.$$

Отже, тривіальний розв'язок рівняння нестійкий при будь-яких α і β.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Дослідити на стійкість тривіальні розв'язки рівнянь:

№ 5.1. $y^{IV} + 7y''' + 12y'' + 23y' + 10y = 0$. **№ 5.2.** $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 2y' + 5y = 0$.

№ 5.3. $y^{IV} + y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$. **№ 5.4.** $y^{V} + 2y^{IV} + 3y''' + 2y'' + y' + y = 0$.

При яких значеннях α будуть стійкі тривіальні розв'язки наступних рівнянь

№ 5.5. $y''' + \alpha y'' + 2y' + y = 0$? **№ 5.6.** $y^{IV} + 2y''' + y'' + \alpha y' + 3y = 0$?

№ 5.7. $y^{IV} + 3y''' + \alpha y'' + 2y' + y = 0$?

При яких значеннях α і β будуть стійкі тривіальні розв'язки наступних рівнянь:

№ 5.8. $y''' + \alpha y'' + 2y' + \beta y = 0$? **№ 5.9.** $y''' + \alpha y'' + \beta y' + 3y = 0$?

№ 5.10. Який вид мають умови Гурвіца для зворотного рівняння $\lambda^4 + p\lambda^3 + q\lambda^2 + p\lambda + 1 = 0$ (p і q – дійсні)?

6 ГЕОМЕТРИЧНИЙ КРИТЕРІЙ СТІЙКОСТІ (КРИТЕРІЙ МИХАЙЛОВА)

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1 Дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння, використовуючи критерій стійкості Михайлова:

$$y^{IV} + 2y'' + 8y' + 5y = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичний многочлен:

$$f(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 8\lambda + 5.$$

Підставимо в нього $\lambda = iw$, отримаємо

$$f(iw) = w^4 - 2w^2 + 8iw + 5 = w^4 - 2w^2 + 5 + i(8w),$$

$$u(w) = w^4 - 2w^2 + 5,$$

$$v(w) = 8w,$$

$$\begin{cases} w^4 - 2w^2 + 5 = 0, \\ 8w = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} w = \sqrt{1 \pm 2i}, \\ w = 0. \end{cases}$$

Корені рівняння $u(w) = 0$ комплексні. Отже, два корені в правій півплощині, тому нульовий розв'язок вихідного рівняння нестійкий (рис. 6.2).

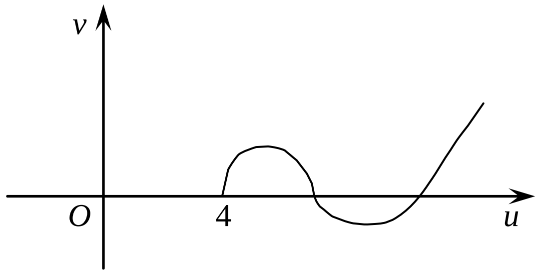

Рисунок 6.2

До цього ж виводу можна було прийти, виходячи з критерію Л'єнара-Шипара, оскільки всі коефіцієнти характеристичного рівняння додатні та

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -64 < 0.$$

Приклад 2 Дослідити на стійкість нульовий розв'язок диференціального рівняння, використовуючи критерій стійкості Михайлова:

$$2y^{IV} + 4y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичний многочлен:

$$f(\lambda) = 2\lambda^4 + 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1.$$

Підставимо в нього $\lambda = iw$, отримаємо

$$f(iw) = 2w^4 - 4iw^3 - 3w^2 + 3iw + 1 = 2w^4 - 3w^2 + 1 + i\left(-4w^3 + 3w\right),$$

$$u(w) = 2w^4 - 3w^2 + 1,$$

$$v(w) = -4w^3 + 3w,$$

$$\begin{cases} 2w^4 - 3w^2 + 1 = 0, \\ -4w^3 + 3w = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} w = \pm 1, \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ w = 0, \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

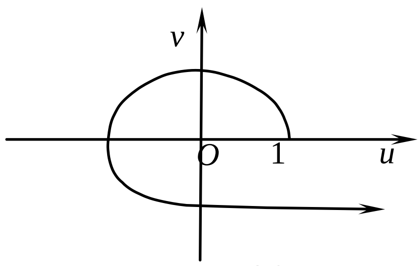

Рисунок 6.3

Будемо змінювати w від 0 до $+\infty$ й побудуємо криву (рис 6.3).

$$\begin{cases} u = u(w), \\ v = v(w), \end{cases}$$

w	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
u	1	0	–	0
v	0	+	0	–

Кут повороту годографу

$$\varphi = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = (n - 2m)\frac{\pi}{2}.$$

Звідси, $n - 2m = 4$, $n = 4$, отже, $m = 0$. Таким чином, всі корені характеристичного рівняння лежать в лівій півплощині, тобто нульовий розв'язок даного рівняння асимптотично стійкий.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Дослідити на стійкість нульові розв'язки диференціальних рівнянь:

№ 6.1. $3y^{IV} + 4y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

№ 6.2. $y^{V} + 5y^{IV} + 10y''' + 11y'' + 7y' + 2y = 0$.

№ 6.3. $y^{IV} + 5y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0$.

№ 6.4. $y^{V} + 2y^{IV} + 2y''' + 46y'' + 89y' + 260y = 0$.

№ 6.5. $y^{V} + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0$.

№ 6.6. $y^{VII} + 7y^{VI} + 23y^{V} + 37y^{IV} + 56y''' + 36y'' + 12y' + 4y = 0$.

№ 6.7. $y^{IV} + 3y''' + 4y'' + 3y' + y = 0$.

№ 6.8. $y^{IV} + 7y''' + 18y'' + 22y' + 12y = 0$.

№ 6.9. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$.

№ 6.10. $y^{IV} + 11y''' + 59y'' + 107y' + 60y = 0$.

№ 6.11. $y^{IV} + 5y''' + 18y'' + 53y' + 60y = 0$.

№ 6.12. $y^{IV} + 6y''' + 15y'' + 18y' + 10y = 0$.

№ 6.13. $y^{IV} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$.

№ 6.14. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$.

№ 6.15. $y^{IV} + 7y''' + 12y'' + 23y' + 10y = 0$.

№ 6.16. $y^{IV} + 3y''' + 3y'' + 3y' + 2y = 0$.

№ 6.17. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 2y' + 5y = 0$.

№ 6.18. $y^{V} + 4y^{IV} + 5y''' + 2y' + 4y = 0$.

7 *D*-РОЗБИТТЯ

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1 Побудувати *D*-області для наступного многочлена

$$f(z) = z^3 + \left(z^2 + 2\right)\xi + \eta z - 4.$$

Розв'язання. Покладаючи $z = iy$ і розділяючи дійсну й уявну частини, знайдемо параметричні рівняння кривої *L*:

$$f(iy) = -iy^3 + \left(-y^2 + 2\right)\xi + i\eta y - 4,$$

$$\operatorname{Re} f = \left(-y^2 + 2\right)\xi - 4, \qquad \operatorname{Im} f = -y^3 + \eta y,$$

$$\xi = \frac{4}{2-y^2}, \ \eta = y^2;$$
$$\xi = \frac{4}{2-\eta}, \quad \eta > 0.$$

Це – вітки гіперболи $\xi = \dfrac{4}{2-\eta}$, які лежать в першому та другому квадрантах (рис. 7.10).

$$\Delta(iy) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -y^2+2 & 0 \\ 0 & y \end{vmatrix} = y\left(2-y^2\right).$$

Якщо $y \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right)$, то $\Delta < 0$, отже $\delta_1^{**} = -1$; якщо $y \in \left(-\sqrt{2}; 0\right)$, то $\Delta > 0$, отже $\delta_1^{*} = 1$; якщо $y \in \left(0; \sqrt{2}\right)$, то $\Delta < 0$, отже $\delta_2^{*} = -1$; якщо $y \in \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$, то $\Delta > 0$, отже $\delta_2^{**} = 1$.

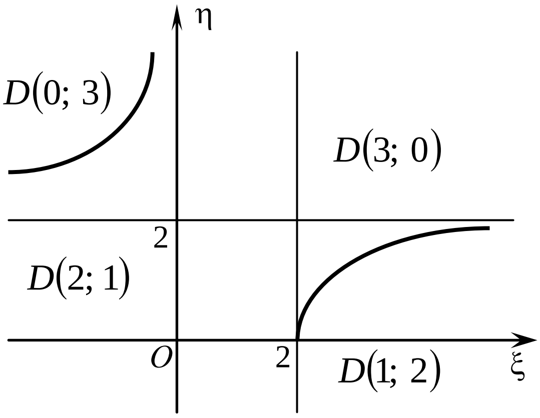

Рисунок 7.10

При переході точки через гіперболу зліва направо (рис. 7.11):

$$N^* = \varepsilon_1^*\delta_1^* + \varepsilon_2^*\delta_2^* = 2,$$
$$N^{**} = \varepsilon_1^{**}\delta_1^{**} + \varepsilon_2^{**}\delta_2^{**} = -2,$$

отже, губиться 2 корені і здобувається 2 корені з від'ємною дійсною частиною.

y	$-\infty$	$-\sqrt{2}-0$	$-\sqrt{2}+0$	0	$\sqrt{2}-0$	$\sqrt{2}+0$	$+\infty$
ξ	–0	$-\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$	$-\infty$	–0
η	$+\infty$	2+0	2–0	0	2+0	2–0	$+\infty$

$y = 0$ – особлива лінія і при цьому $\xi = 2$. Розглянемо $\xi = \eta = 3$. Многочлен $f(z)$ приймає вигляд $f(z) = (z+1)^3 + 1$ і має корені $z_1 = -2$, $z_{2,3} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$, отже, область під гіперболою є $D(2; 1)$. Область над гіперболою є область $D(0; 3)$. Насправді, при переході із цієї області в $D(2; 1)$ многочлен $f(z)$ втратив два корені з від'ємною дійсною частиною й перетворився в многочлен, що має один корінь із від'ємною дійсною частиною. При переході з області $D(1; 2)$ в область $D(3; 0)$ многочлен $f(z)$ здобув два корені з від'ємною дійсною частиною.

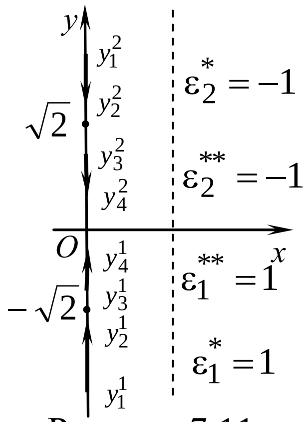

Рисунок 7.11

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Побудувати *D*-області для наступних многочленів:

№ 7.1. $z^3 + \xi z^2 + \eta z + 6.$

№ 7.2. $z^4 + \xi z^3 + \eta z^2 + 4z + 1.$

№ 7.3. $z^3+\xi z^2+11z+\eta$.

№ 7.4. $z^4+2z^3+\xi z^2+z+\eta$.

№ 7.5. $z^3+3z^2+\xi z+\eta$.

№ 7.6. $z^3+\xi z^2+(z+1)\eta+1$.

№ 7.7. $z^3+\eta z^2+\xi z+6$.

№ 7.8. $z^3+2z^2+(z-1)\xi+\eta$.

№ 7.9. $z^3+\left(z^2+z\right)\xi+z+2\eta$.

№ 7.10. $\xi z^3+3z^2+\eta z+1$.

№ 7.11. $\left(z^3+z^2\right)\xi+\eta\left(z^2+1\right)+2z$.

№ 7.12. $\left(z^3-z\right)\xi+\eta\left(z^2+z-1\right)+1$.

8 СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1 Знайти загальний розв'язок рівняння

$$f(n+2)+4f(n+1)+f(n)=0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2+4\lambda+1=0.$$

Його корені $\lambda_1=-2-\sqrt{3}$, $\lambda_2=-2+\sqrt{3}$ різні й дійсні; отже,

$$f(n)=C_1\left(-2-\sqrt{3}\right)^n+C_2\left(-2+\sqrt{3}\right)^n.$$

Приклад 2 Знайти загальний розв'язок рівняння

$$f(n+3)-3f(n+2)+3f(n+1)-f(n)=0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0 \text{ або } (\lambda-1)^3=0.$$

Звідси $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$. Загальним розв'язком буде

$$f(n)=\left(C_1+C_2n+C_3n^2\right)\cdot 1^n=C_1+C_2n+C_3n^2.$$

Приклад 3 Знайти загальний розв'язок рівняння

$$f(n+2)-2f(n+1)+2f(n)=0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$\lambda^2-2\lambda+2=0$$

має прості комплексні корені

$$\lambda_1=1+i,\ \lambda_2=1-i.$$

Знаходимо

$$|1\pm i|=\sqrt{2}, \qquad \arg(1+i)=\frac{\pi}{4}.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$f(n)=C_1 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}+C_2 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}=2^{\frac{n}{2}}\left(C_1\cos\frac{n\pi}{4}+C_2\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Приклад 4 Знайти загальний розв'язок рівняння

$$f(n+4)+2f(n+3)+4f(n+2)-2f(n+1)-5f(n)=0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$\lambda^4+2\lambda^3+4\lambda^2-2\lambda-5=0.$$

Перепишемо його у вигляді

$$\left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^2+2\lambda+5\right)=0.$$

Коренями цього рівняння будуть

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-1+2i,\ \lambda_4=-1-2i.$$

Тут

$$\left|-1\pm 2i\right|=\sqrt{5}, \qquad \arg\left(-1+2i\right)=\pi-\operatorname{arctg}2.$$

Загальним розв'язком даного рівняння буде

$$f(n)=C_1+C_2(-1)^n+5^{\frac{n}{2}}\left[C_3\cos n\left(\pi-\operatorname{arctg}2\right)+C_4\sin n\left(\pi-\operatorname{arctg}2\right)\right]$$

або

$$f(n)=C_1+C_2(-1)^n+(-1)^n 5^{\frac{n}{2}}\left[C_3\cos\left(n\operatorname{arctg}2\right)-C_4\sin\left(n\operatorname{arctg}2\right)\right].$$

Приклад 5 Знайти загальний розв'язок рівняння

$$f(n+2)-4f(n+1)+3f(n)=2^n(n+1). \tag{8.8}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $\lambda^2-4\lambda+3=0$ має корені $\lambda_1=3$, $\lambda_2=1$. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$f(n)=C_1\cdot 3^n+C_2.$$

Так як число 2 не є коренем характеристичного рівняння, та частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\tilde{f}(n)=2^n(An+B), \tag{8.9}$$

де A і B – невизначені коефіцієнти. Підставляючи (8.9) в (8.8), одержимо

$$2^{n+2}(An+2A+B)-4\cdot 2^{n+1}(An+A+B)+3\cdot 2^n(An+B)=2^n(n+1)$$

або

$$4(An+2A+B)-8(An+A+B)+3(An+B)=n+1.$$

Звідси знаходимо

$$4A-8A+3A=1,$$
$$8A+4B-8A-8B+3B=1,$$

так що, $A=-1,\ B=-1$.

Таким чином, частинний розв'язок даного рівняння

$$\tilde{f}(n)=-2^n(n+1);$$

загальний розв'язок

$$f(n)=C_1\cdot 3^n+C_2-2^n(n+1).$$

Приклад 6 Виходячи з визначення стійкості різницевого рівняння, дослідити на стійкість розв'язок рівняння

$$2f(n+2)-2f(n+1)+f(n)=0, \tag{8.10}$$

яке задовольняє початковим умовам $f(0)=0,\ f(1)=0$.

Розв'язання. Розв'язок даного рівняння, що задовольняє початковим умовам $f(0)=0,\ f(1)=0$, є

$$f(n)\equiv 0,$$

тому що з (8.10)

$$f(n+2)=f(n+1)-\frac{1}{2}f(n).$$

Будь-який розв'язок цього рівняння, що задовольняє умовам $f(0)=f_0$, $f(1)=f_1$ має вигляд

$$f^*(n)=\frac{1}{2^{n/2}}\left[f_0\cos\frac{n\pi}{4}+(f_1-f_0)\sin\frac{n\pi}{4}\right].$$

Виберемо довільне $\varepsilon>0$ й покажемо, що існує $\delta(\varepsilon)>0$ таке, що при $|f_0-0|<\delta$ і $|f_1-0|<\delta$ має місце нерівність

$$\left|0-f^*(n)\right|=\frac{1}{2^{n/2}}\left[f_0\cos\frac{n\pi}{4}+(f_1-f_0)\sin\frac{n\pi}{4}\right]<\varepsilon$$

для всіх $n\ge 0$. Це й буде означати згідно з визначенням, що нульовий розв'язок $f^*(n)\equiv 0$ стійкий.

Очевидно, що

$$\frac{f_0\cos\frac{n\pi}{4}+(f_1-f_0)\sin\frac{n\pi}{4}}{2^{n/2}}\le\frac{|f_0|+|f_1-f_0|}{2^{n/2}}\le$$
$$\le|f_0|+|f_1-f_0|\le|f_0|+|f_1|+|f_0|\le 2(|f_0|+|f_1|)$$

для всіх $n\ge 0$. Тому, якщо $|f_0|+|f_1|<\frac{\varepsilon}{2}$ то й тим паче $\left|0-f^*(n)\right|<\varepsilon$ для всіх $n\ge 0$. Отже, якщо, наприклад, вибрати $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{4}$, то при $|f_0|<\delta$ і $|f_1|<\delta$ буде виконуватися нерівність $\left|0-f^*(n)\right|<\varepsilon$ для всіх $n\ge 0$, так що нульовий розв'язок даного рівняння стійкий. Ця стійкість асимптотична, тому що

$$\lim_{n\to\infty}\left[0-f^*(n)\right]=-\lim_{n\to\infty}\frac{f_0\cos\frac{n\pi}{4}+(f_1-f_0)\sin\frac{n\pi}{4}}{2^{n/2}}=0.$$

Приклад 7 Дослідити на стійкість нульовий розв'язок $f(n)\equiv 0$ рівняння

$$2f(n+2)-2f(n+1)+f(n)=0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $2\lambda^2-2\lambda+1=0$. Його корені $\lambda_{1,2}=\frac{1\pm i}{2}$. Маємо

$$\left|\lambda_{1,2}\right|=\left|\frac{1\pm i}{2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}<1.$$

Отже, розв'язок $f(n)\equiv 0$ цього рівняння асимптотично стійкий.

Приклад 8 Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівняння

$$f(n+2)-2f(n+1)+5f(n)=0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $\lambda^2-2\lambda+5=0$ має корені

$\lambda_1 = 1+2i$, $\lambda_2 = 1-2i$.

Маємо

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |1 \pm 2i| = \sqrt{5} > 1.$$

Обидва кореня за модулем більше одиниці, отже, розв'язок $f(n) \equiv 0$ нестійкий.

Відомо, що функція $\lambda = \dfrac{w+1}{w-1}$ відображає внутрішню частину одиничного кола площини λ на ліву півплощину площини w. Коренями характеристичного рівняння (8.2), що лежать усередині одиничного кола $|\lambda| < 1$ (тобто за модулем менше одиниці), будуть відповідати кореням перетвореного рівняння

$$(w+1)^k + a_1(w+1)^{k-1}(w-1) + \ldots + a_k(w-1)^k = 0$$

або

$$b_0 w^k + b_1 w^{k-1} + \ldots + b_n = 0, \tag{8.11}$$

які лежать в лівій півплощині площини w.

Питання про розташування коренів рівняння (8.11) може бути вирішено за допомогою критерію Рауса-Гурвіца або критерію Михайлова.

Приклад 9 Знайти необхідні й достатні умови того, що корені характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \tag{8.12}$$

знаходяться в одиничному колі $|\lambda| < 1$.

Розв'язання. Вважаємо $\lambda = \dfrac{w+1}{w-1}$. Тоді рівняння (8.12) прийме вигляд

$$(w+1)^2 + a_1(w+1)(w-1) + a_2(w-1)^2 = 0$$

або

$$(1 + a_1 + a_2)w^2 + (2 - 2a_2)w + (1 - a_1 + a_2) = 0. \tag{8.13}$$

До многочлена (8.13) застосовуємо критерій Рауса-Гурвіца. Матриця Гурвіца має вигляд

$$\begin{pmatrix} 2-2a_2 & 1+a_1+a_2 \\ 0 & 1-a_1+a_2 \end{pmatrix}.$$

Головні діагональні мінори матриці Гурвіца

$$\Delta_1 = 2 - 2a_2, \qquad \Delta_2 = (2-2a_2)(1-a_1+a_2).$$

У силу зазначеного критерію повинно бути

$$1 + a_1 + a_2 > 0, \quad 1 - a_2 > 0, \quad 1 - a_1 + a_2 > 0. \tag{8.14}$$

Отже, характеристичне рівняння (8.12) має в крузі $|\lambda| < 1$ корені тоді й тільки тоді, коли виконуються умови (8.14).

Наслідок. Лінійне однорідне різницеве рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

$$f(n+2) + a_1 f(n+1) + a_2 f(n) = 0$$

має асимптотично стійкий нульовий розв'язок $f(n) \equiv 0$ тоді й тільки тоді, коли його коефіцієнти задовольняють умовам (8.14).

Приклад 10 Дослідити на стійкість нульовий розв'язок $f(n)\equiv 0$ рівняння

$$2f(n+2)-2f(n+1)+f(n)=0.$$

Розв'язання. Перепишемо це рівняння у вигляді

$$f(n+2)-f(n+1)+0{,}5f(n)=0.$$

Тут $a_1=-1,\ a_2=0{,}5$. Тому

$$1+a_1+a_2=0{,}5>0,$$
$$1-a_2=0{,}5>0,$$
$$1-a_1+a_2=2{,}5>0.$$

Умови (8.14) критерію Рауса-Гурвіца виконані. Виходить, розв'язок $f(n)\equiv 0$ асимптотично стійкий.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Розв'язати наступні різницеві рівняння:

№ 8.1. $3f(n+2)-2f(n+1)-8f(n)=0$.

№ 8.2. $f(n+3)+3f(n+2)+3f(n+1)+f(n)=0$, $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f(2)=3$.

№ 8.3. $4f(n+2)-8f(n+1)+5f(n)=0$.

№ 8.4. $f(n+3)-8f(n)=0$.

№ 8.5. $f(n+4)-f(n+2)+2f(n+1)+2f(n)=0$.

У наступних завданнях знайти загальні розв'язки даних неоднорідних лінійних різницевих рівнянь:

№ 8.6. $f(n+2)-2f(n+1)-f(n)=n$.

№ 8.7. $f(n+2)+2f(n+1)+f(n)=3^n\cdot 32$, $f(0)=0$, $f(1)=0$.

№ 8.8. $f(n+2)+f(n)=\sin 2n$, $f(0)=0$, $f(1)=1$.

№ 8.9. $f(n+3)-3f(n+2)+3f(n+1)-f(n)=e^n$.

№ 8.10. $f(n+3)+8f(n)=2^n$.

Виходячи з визначення стійкості, дослідити на стійкість нульові розв'язки наступних різницевих рівнянь:

№ 8.11. $8f(n+2)+2f(n+1)-f(n)=0$.

№ 8.12. $f(n+2)+f(n)=0$.

№ 8.13. $4f(n+2)-4f(n+1)+f(n)=0$.

№ 8.14. $f(n+2)-6f(n+1)-7f(n)=0$.

Для наступних різницевих рівнянь знайти необхідні й достатні умови асимптотичної стійкості нульового розв'язку:

№ 8.15. $a_0f(n+3)+a_1f(n+2)+a_2f(n+1)+a_3f(n)=0$.

№ 8.16. $f(n+4)+pf(n+2)+qf(n)=0$.

№ 8.17. $f(n+5)+pf(n)=0$.

№ 8.18. $af(n+5)-bf(n)=0$, $a\neq 0$, $b>0$.

Використовуючи критерій Рауса-Гурвіца, дослідити на стійкість нульовий розв'язок наступних різницевих рівнянь:

№ 8.19. $11f(n+4)-8f(n+3)+8f(n+2)-4f(n+1)+f(n)=0$.

№ 8.20. $f(n+4)+f(n+3)+f(n)=0$.

№ 8.21. $12f(n+4)-3f(n+3)+2f(n+2)+2f(n+1)-2f(n)=0$.

№ 8.22. $7f(n+4)-4f(n+3)+30f(n+2)-4f(n+1)+3f(n)=0$.

№ 8.23. $f(n+5)-f(n+1)+f(n)=0$.

№ 8.24. $f(n+5)-f(n+2)-f(n)=0$.

№ 8.25. $f(n+5)+f(n+1)-f(n)=0$.