УДК 517.925.51: 517.929.4 (075.8)
ББК 22.161.6 я73
С 535

Сніжко Н.В. Елементи теорії стійкості: Навчальний посібник зі спецкурсу „Основи теорії стійкості" для студентів спеціальності „Математика". – Запоріжжя: ЗНУ, 2005. – 50 с.

В навчальному посібнику викладені основи теорії стійкості розв'язків диференціальних рівнянь та систем, а також елементи теорії стійкості різницевих рівнянь. Крім теоретичних положень та основних понять, в посібнику наведені приклади розв'язання та велика кількість задач для самостійної роботи.

Призначений для студентів спеціальності „Математика" денного та заочного відділень.

Рецензент д.т.н. проф. *В.В. Киричевський*
Відповідальний за випуск к.ф.-м.н. доц. *Н.В. Сніжко*

ПЕРЕДМОВА

Для можливості математичного опису якого-небудь реального явища неминуче доводиться спрощувати, ідеалізувати це явище, виділяючи і враховуючи лише найбільш істотні фактори, які мають вплив на нього, і відкидаючи інші фактори, менш істотні. При цьому знову ж таки неминуче постає питання про те, чи вдало вибрані спрощуючі припущення. Можливо, що невраховані фактори сильно впливають на розглядуване явище, значно змінюючи його кількісні або навіть якісні характеристики. Зрештою, це питання вирішується практикою – відповідністю одержаних висновків з дослідними даними, але все ж у багатьох випадках можна вказати умови, за яких деякі спрощення свідомо неможливі.

Якщо деяке явище описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n) \qquad (i = 1,2,...,n)$$

з початковими умовами $y_i(t_0) = y_i^0$ $(i = 1,2,...,n)$, які звичайно є результатами вимірів і, отже, неминуче одержані з деякою похибкою, то природно виникає питання про вплив малої зміни початкових умов на шуканий розв'язок.

Якщо виявиться, що як завгодно малі зміни початкових умов здатні сильно змінити розв'язок, то розв'язок, що визначається вибраними нами неточними початковими даними, зазвичай не має ніякого прикладного значення і навіть наближено не може описувати розглядуване явище.

Отже, виникає важливе для застосувань питання про знаходження умов, за яких досить мала зміна початкових значень викликає як завгодно малу зміну розв'язку.

Якщо t змінюється на скінченному відрізку $t_0 \le t \le T$, то відповідь на це питання дає теорема про неперервну залежність розв'язків від початкових значень. Якщо ж t може набувати як завгодно великих значень, то цим питанням займається теорія стійкості.

В даному посібнику викладені елементарні основи теорії стійкості. Розглядаються означення стійкості розв'язку системи диференціальних рівнянь за Ляпуновим, асимптотичної, в цілому, за Лагранжем. Формулюються основні ознаки та критерії стійкості: теореми Ляпунова про стійкість та асимптотичну стійкість (у випадку автономних та неавтономних систем), теорема Четаєва про нестійкість, критерій Рауса – Гурвіца, умови Льєнара – Шіпара, геометричний критерій (критерій Михайлова). Розглядаються найбільш поширені методи дослідження на стійкість: за першим наближенням (лінеаризація), перший та другий методи Ляпунова, метод побудови D-розбиття. Також розглядаються питання, пов'язані зі стабілізацією розв'язків, знаходженням областей асимптотичної стійкості у фазовому просторі та в просторі параметрів. В останньому розділі викладені питання щодо стійкості розв"язків однорідних та неоднорідних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Слід зауважити, що внаслідок обмеженого обсягу в даному посібнику, по-перше, не наводились доведення теорем та тверджень, а по-друге, не висвітлювались деякі питання, зокрема, дослідження на стійкість за постійно діючими збуреннями (теорема Малкіна), граничні цикли (теорема Пуанкаре, ознаки Бендіксона, Левінсона – Сміта та Рейссіга). Зацікавленому читачу слід звернутись до класичних курсів диференціальних рівнянь [12 – 15], [17], [18], [22], [23] та до монографій, які безпосередньо стосуються теорії стійкості [1 – 3], [5 –11], [20], [21].

Крім теоретичних положень та основних понять, в посібнику наведені приклади розв"язання більш ніж 30 типових задач. Також подана велика кількість задач для самостійної роботи. Крім того, в переліку рекомендованої літератури наведені збірки задач з диференціальних рівнянь [4], [16], [19], в яких є розділи з теорії стійкості.

В основу даного видання покладено лекції, які автор читав студентам математичного факультету ЗНУ в рамках курсу „Основи теорії стійкості". Посібник призначений для студентів спеціальності „Математика" денного та заочного відділень. Може бути використаний студентами спеціальностей „Прикладна математика", „Інформатика", інших інженерно-технічних та природничо-наукових спеціальностей при вивченні курсів „Диференціальні рівняння", „Теорія функцій комплексної змінної", спецкурсів, пов"язаних з питаннями теорії стійкості. Також посібник може бути використаний при написанні курсових та кваліфікаційних робіт, при підготовці до державних іспитів, вчителями на курсах підвищення кваліфікації та для самоосвіти.

1. Поняття про стійкість розв'язку системи диференціальних рівнянь

Нехай маємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n) \qquad (i = 1,2,...,n), \qquad (1.1)$$

де $\frac{df_i}{dy_k}$ (i, k = 1,2,...,n) існують і неперервні, і нехай $\varphi_i(t)$ $(i = 1,2,...,n)$ є розв'язок цієї системи, який задовольняє при $t = t_0$ умови:

$$\varphi_i(t_0) = \varphi_i^0 \qquad (i = 1,2,...,n).$$

Розв'язок $\varphi_i(t)$ $(i = 1,2,...,n)$ системи (1.1) називається *стійким за Ляпуновим* при $t \to +\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для кожного розв'язку $y_i(t)$ $(i = 1,2,...,n)$ тієї ж системи (1.1), початкові значення якого задовольняють нерівності

$$|y_i(t_0) - \varphi_i^0| < \delta(\varepsilon) \qquad (i = 1,2,...,n),$$

для всіх $t \ge t_0$ справедливі нерівності

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon \qquad (i = 1,2,...,n), \qquad (1.2)$$

тобто близькі за початковими значеннями розв'язки залишаються близькими для всіх $t \ge t_0$.

Інакше кажучи, розв'язок $\varphi_i(t)$ $(i = 1,2,...,n)$ є стійким, якщо досить близький до нього в початковий момент $t = t_0$ розв'язок $y_i(t)$ $(i = 1,2,...,n)$ для всіх $t \ge t_0$ міститься в як завгодно вузькій ε-трубці, побудованій навколо розв'язку $\varphi_i(t)$ $(i = 1,2,...,n)$.

Якщо при як завгодно малому $\delta > 0$ хоча б для одного розв'язку $y_i(t)$ $(i = 1,2,...,n)$ нерівності (1.2) не виконуються, то розв'язок $\varphi_i(t)$ $(i = 1,2,...,n)$ називається *нестійким*.

Якщо розв'язок $\varphi_i(t)$ $(i = 1,2,...,n)$ не тільки стійкий, але, крім того, задовольняє умови

$$\lim_{t \to \infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0 \qquad (i = 1,2,...,n), \qquad (1.3)$$

якщо $|y_i(t_0) - \varphi_i^0| < \delta_1$, то розв'язок $\varphi_i(t)$ називається *асимптотично стійким*.

Питання про стійкість розв'язку $\varphi_i(t)$ системи (1.1) може бути зведене до питання про стійкість нульового розв'язку $x_i(t) \equiv 0$ деякої нової системи рівнянь, яку можна одержати з (1.1) лінійною заміною шуканих функцій:

$$x_i(t) = y_i(t) - \varphi_i(t) \qquad (i = 1,2,...,n). \qquad (1.4)$$

Тут $x_i(t)$ – нові невідомі функції, що дорівнюють відхиленням попередніх невідомих функцій $y_i(t)$ від функцій $\varphi_i(t)$, які визначають досліджуваний розв'язок. Тому в подальшому будемо вважати, що на стійкість досліджується саме нульовий роз'язок $x_i(t) \equiv 0$, або, що те ж саме, розміщена в початку координат точка спокою системи рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = \psi_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (i = 1,2,...,n). \tag{1.5}$$

Замість терміну "нульовий розв'язок" будемо використовувати термін *тривіальний розв'язок*.

Стосовно точки спокою $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1,2,...,n)$ умова стійкості виглядає наступним чином.

Точка спокою $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1,2,...,n)$ системи (1.5) стійка за Ляпуновим, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ можна знайти $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що з нерівності $|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ $(i = 1,2,...,n)$ випливає $|x_i(t)| < \varepsilon$ $(i = 1,2,...,n)$ при всіх $t \geq t_0$.

Приклад 1.1. Кожний розв'язок рівняння

$$\frac{dx}{dt} = 0 \tag{1.6}$$

стійкий.

Дійсно, розв'язок $x_1(t)$ цього рівняння, який задовольняє початкову умову $x_1(t_0) = x_1^0$, є $x_1(t) \equiv x_1^0 = \text{const}$.

Розглянемо інший розв'язок $x_2(t)$ рівняння (1.6), який задовольняє початкову умову

$$x_2(t_0) = x_2^0. \tag{1.7}$$

Для цих розв'язків маємо $|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0|$ для всіх t. Отже, для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, наприклад, $\delta = \varepsilon$, таке, що якщо $|x_2^0 - x_1^0| < \delta$, то для розв'язків $x_2(t)$ і $x_1(t)$ буде виконуватись нерівність

$$|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0| < \varepsilon$$

при всіх $t \geq t_0$. Отже, будь-який розв'язок рівняння (1.6) стійкий. Однак асимптотичної стійкості немає:

$$|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0| \not\to 0$$

при $t \to +\infty$. ■

Приклад 1.2. Кожний розв'язок рівняння

$$\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{1.8}$$

є асимптотично стійким.

Дійсно, загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$x(t) = Ce^{-t}. \tag{1.9}$$

Розв'язками $x_1(t)$, $x_2(t)$ рівняння (1.8), які задовольняють початкові умови $x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0$, є

$$x_1(t) = x_1^0 e^{-(t-t_0)}, \qquad x_2(t) = x_2^0 e^{-(t-t_0)}.$$

Звідси

$$|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0| e^{-(t-t_0)} \to 0$$

при $t \to +\infty$, що означає асимптотичну стійкість будь-якого розв'язку рівняння (1.8). ■

Приклад 1.3. Розв'язок $x(t) \equiv -1$ рівняння $\dfrac{dx}{dt} = 1 - x^2(t)$ нестійкий, оскільки при $t \to +\infty$ всі розв'язки рівняння

$$x(t) = \frac{(1 + x_0)e^{2(t-t_0)} - (1 - x_0)}{(1 + x_0)e^{2(t-t_0)} + (1 - x_0)}$$

прямують до $+1$. Розв'язок $x(t) \equiv 1$ цього рівняння згідно з означенням асимптотично стійкий. ■

Вправи

Користуючись означенням, дослідити на стійкість розв'язки наступних рівнянь та систем.

1.1. $\dfrac{dx}{dt} + x = 1, \qquad x(0) = 1.$

1.2. $\dfrac{dx}{dt} = -t(x - 1), \qquad x(0) = 1.$

1.3. $\dfrac{dx}{dt} - 2x = t, \qquad x\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}.$

1.4. $\dfrac{dx}{dt} = 2xt, \qquad x(0) = 0.$

1.5. $\dfrac{dx}{dt} = \cos t, \qquad x(0) = 1.$

1.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3y - 2x, \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 0.$

1.7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y + 3x, \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 0.$

2. Найпростіші типи точок спокою

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y). \end{cases} \qquad (A)$$

Точка (x_0, y_0) називається *точкою спокою*, **або *особливою точкою системи*** (A), якщо $P(x_0, y_0)=0$, $Q(x_0, y_0)=0$.

Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \qquad \textbf{(2.1)}$$

де a_{ij} $(i, j = 1,2)$ – сталі. Точка (0, 0) є точкою спокою системи (2.1). Дослідимо розташування траєкторій системи (2.1) в околі цієї точки. Шукаємо розв'язок у вигляді

$$x = \alpha_1 e^{kt}, \quad y = \alpha_2 e^{kt}. \qquad (2.2)$$

Для визначення k одержуємо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.3)$$

Розглянемо можливі випадки.

I. Корені характеристичного рівняння дійсні і відмінні: $k_1 \neq k_2$. Варіанти: 1) $k_1 < 0$, $k_2 < 0$. Точка спокою асимптотично стійка (стійкий вузол). 2) $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Точка спокою нестійка (нестійкий вузол). 3) $k_1 > 0$, $k_2 < 0$. Точка спокою нестійка (сідло). 4) $k_1 = 0$, $k_2 > 0$. Точка спокою нестійка. 5) $k_1 = 0$, $k_2 < 0$. Точка спокою стійка, але не асимптотично.

II. Корені характеристичного рівняння комплексні: $k_1 = p + qi$, $k_2 = p - qi$. Варіанти: 1) $p < 0$, $q \neq 0$. Точка спокою асимптотично стійка (стійкий фокус). 2) $p > 0$, $q \neq 0$. Точка спокою нестійка (нестійкий фокус). 3) $p = 0$, $q \neq 0$. Точка спокою нестійка (центр). Асимптотичної стійкості немає.

III. Корені кратні: $k_1 = k_2$. Варіанти: 1) $k_1 = k_2 < 0$. Точка спокою асимптотично стійка (стійкий вузол). 2) $k_1 = k_2 > 0$. Точка спокою нестійка (нестійкий вузол). 3) $k_1 = k_2 = 0$. Точка спокою нестійка. Можливий винятковий випадок, коли всі точки площини є стійкими точками спокою.

Для системи лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad (i = 1,2,\dots,n) \qquad (2.4)$$

характеристичним рівнянням буде

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0. \qquad \textbf{(2.5)}$$

1) Якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння (2.5) системи (2.4) від'ємні, то точка спокою $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1,2,\dots,n)$ асимптотично стійка.

2) Якщо дійсна частина хоча б одного кореня характеристичного рівняння (2.5) додатна, тобто $\operatorname{Re} k_\nu = p_\nu > 0$, то точка спокою $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1,2,\dots,n)$ системи (2.4) нестійка.

3) Якщо характеристичне рівняння (2.5) має прості корені з нульовою дійсною частиною (тобто нульові або суто уявні корені), то точка спокою $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1,2,\dots,n)$ системи (2.4) стійка, але не асимптотично.

Приклад 2.1. Встановити характер точки спокою (0,0) системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Розв'язок. В даному випадку

$$a_{11} = 0, \qquad a_{12} = 1, \qquad a_{21} = -1, \qquad a_{22} = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$k^2 + 1 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння $k_{1,2} = \pm i$ – суто **уявні. Точка спокою стійка** (центр).■

Для системи двох лінійних рівнянь зі сталими **дійсними** коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \qquad (2.6)$$

характеристичне рівняння (2.3) приводиться до вигляду

$$k^2 + a_1 x + a_2 = 0.$$

1) Якщо $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, то нульовий розв'язок системи (2.6) асимптотично стійкий.

2) Якщо $a_1 > 0$, $a_2 = 0$ або $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, то нульовий розв'язок стійкий, але не асимптотично.

3) В решті випадків нульовий розв'язок нестійкий; однак при $a_1 = a_2 = 0$ можливий винятковий випадок, коли нульовий розв'язок стійкий, але не асимптотично.

Приклад 2.2. Визначити значення параметру α, при якому є стійким нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (\alpha - 1)x - \alpha y. \end{cases}$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння для даної системи має вигляд

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ \alpha - 1 & -\alpha - k \end{vmatrix} = 0,$$

або $k^2 + \alpha k + 1 - \alpha = 0$. Тут $a_1 = \alpha$, $a_2 = 1 - \alpha$.

Асимптотична стійкість нульового розв'язку буде мати місце при $\alpha > 0$, $1 - \alpha > 0$, тобто при $0 < \alpha < 1$.

Стійкість, але не асимптотична, буде в двох випадках:

а) $\alpha > 0$, $1 - \alpha = 0$, тобто при $\alpha = 1$;

б) $\alpha = 0$, $1 - \alpha > 0$, тобто при $\alpha = 0$.

При всіх інших значеннях α нульовий розв'язок нестійкий.■

Приклад 2.3. В площині параметрів α і β знайти області, в яких буде стійким нульовий розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + (\beta - 2\alpha\beta - 1)y, \\ \dot{y} = x - \beta y. \end{cases}$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння системи

$$\begin{vmatrix} \alpha - k & \beta - 2\alpha\beta - 1 \\ 1 & -\beta - k \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$k^2 + (\beta - \alpha)k + 1 + \alpha\beta - \beta = 0.$$

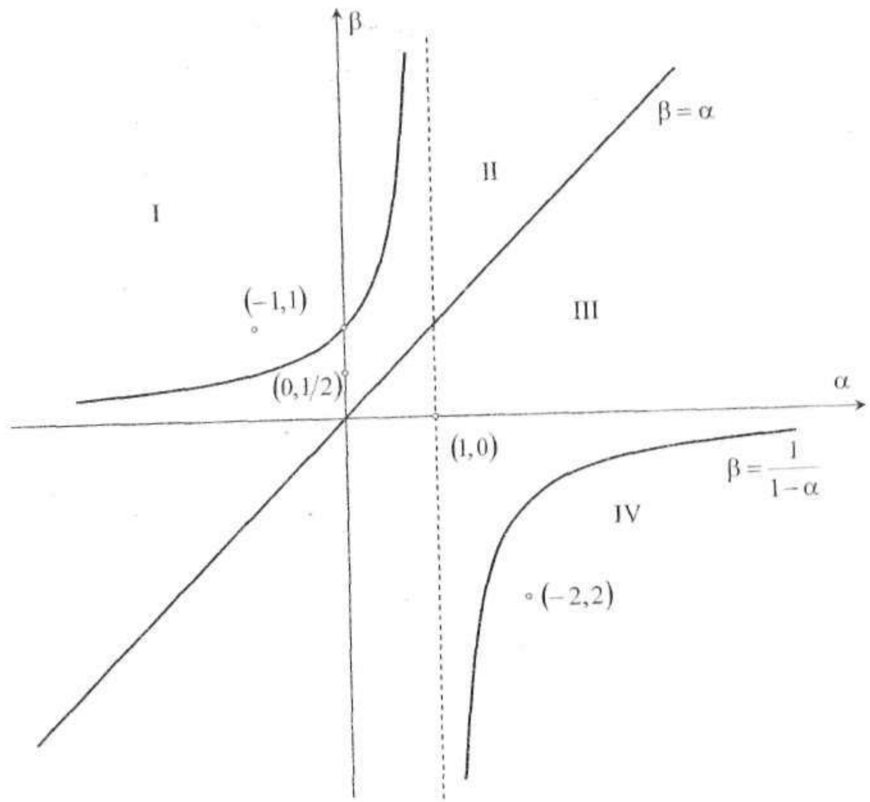
Тут

$$a_1 = \beta - \alpha, \qquad a_2 = 1 + \alpha\beta - \beta;$$

a_1 і a_2 є неперервними функціями від α і β, тому знаки a_1 і a_2 будуть змінюватись там, де $a_1 = a_2 = 0$, тобто на прямій $\beta - \alpha = 0$ та на гіперболі $1 + \alpha\beta - \beta = 0$. Ці лінії розбивають площину параметрів α, β на чотири області I, II, III, IV (мал. 2.1), в кожній з яких знаки a_1 і a_2 постійні. Візьмемо по одній довільній точці в кожній області і визначимо в цих точках знаки коефіцієнтів a_1 і a_2.

Область I: в точці (–1;1) маємо $a_1 = 2 > 0$, $a_2 = -1 < 0$. Нульовий розв'язок системи в цій області нестійкий.

Область II: в точці $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ маємо $a_1 = \frac{1}{2} > 0$, $a_2 = \frac{1}{2} > 0$. Нульовий розв'язок системи в області II асимптотично стійкий.



Мал. 2.1

Область III: в точці (1;0) маємо $a_1 = -1 < 0$, $a_2 = 1 > 0$. Нульовий розв'язок системи в області III нестійкий.

Область IV: в точці (2;–2) маємо $a_1 = -4 < 0$, $a_2 = -1 < 0$. Нульовий розв'язок системи в цій області нестійкий.

Дослідимо на стійкість нульовий розв'язок на межах розглянутих вище областей.

1) $\beta = \dfrac{1}{1-\alpha}$, $\alpha < 1$ (межа між областями I і II). На цій межі $a_1 > 0$, $a_2 = 0$, так що нульовий розв'язок на ній стійкий, але не асимптотично.

2) $\beta = \alpha$ (межа між областями II і III). На цій межі $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, так що нульовий розв'язок на ній стійкий, але не асимптотично.

3) $\beta = \dfrac{1}{1-\alpha}$, $\alpha > 1$ (межа між областями III і IV). На цій межі $a_1 < 0$, $a_2 = 0$, так що нульовий розв'язок на ній нестійкий.

Отже, нульовий розв'язок асимптотично стійкий в області II і стійкий, але не асимптотично, на межі області II.■

Вправи

Встановити характер точки спокою (0;0) в наступних системах.

2.1. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$ **2.2.** $\begin{cases} \dot{x} = 4y - x, \\ \dot{y} = -9x + y. \end{cases}$ **2.3.** $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2y - 3x. \end{cases}$ **2.5.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$ **2.6.** $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -x - 4y. \end{cases}$ **2.8.** $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 2z, \\ \dot{y} = 5x - 3y + 3z, \\ \dot{z} = -x - 2z. \end{cases}$ **2.9.** $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y + 4z, \\ \dot{y} = 4x - 7y + 8z, \\ \dot{z} = 6x - 7y + 7z. \end{cases}$

Знайти значення параметру α, при яких тривіальний розв'язок системи є стійким.

2.10. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 5\alpha x - \alpha^2 y. \end{cases}$ **2.11.** $\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = \alpha x - \alpha^2 y. \end{cases}$ **2.12.** $\begin{cases} \dot{x} = \alpha^2 x - 3y, \\ \dot{y} = \alpha x + 4y. \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha x, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$ **2.14.** $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y, \\ \dot{y} = \alpha y - z, \\ \dot{z} = \alpha z - x. \end{cases}$

Для наступних систем в площині параметрів α і β знайти області, в яких тривіальний розв'язок є стійким.

2.15. $\begin{cases} \dot{x} = -x + \alpha y, \\ \dot{y} = \beta x - y. \end{cases}$ **2.16.** $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y, \\ \dot{y} = x + \alpha y. \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y, \\ \dot{y} = -\beta x + (\alpha - 2)y. \end{cases}$ **2.18.** $\begin{cases} \dot{x} = -\alpha^2 x - \beta^2 y, \\ \dot{y} = (\alpha^2 - 1)x + (\beta^2 + 1)y. \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} \dot{x} = (\alpha^2 - \beta)x + (1 + \beta)y, \\ \dot{y} = -\beta^2 x + \beta^2 y. \end{cases}$ **2.20.** $\begin{cases} \dot{x} = -\alpha^2 x - (\beta + 1)y, \\ \dot{y} = (4\alpha + \beta + 1)x - 4y. \end{cases}$

3. Другий метод Ляпунова

Функція $v(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *визначено додатною в H-околі* $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le H\right)$ *початку координат*, якщо вона додатна в усіх точках цього околу, за винятком початку координат, де вона дорівнює нулю:

$$v(x_1, x_2, ..., x_n) > 0, \text{ якщо } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0,$$
$$v(0,0,...,0) = 0.$$

Наприклад, функція $v = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ буде визначено додатною функцією в просторі змінних x_1, x_2, x_3. Функція $u = x_1^2 + x_2^2$ буде лише знакосталою в цьому просторі, але не визначено додатною, оскільки перетворюється в нуль на всій осі Ox_3, а не тільки в точці (0, 0, 0); і ця ж сама функція буде визначено додатною в просторі x_1, x_2.

Якщо $v(x_1, x_2, ..., x_n) < 0$ при $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ і $v(0,0,...,0) = 0$, то функція $v(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *визначено від'ємною*.

Функція $v(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *визначено додатною в H-околі початку координат при* $t \ge t_0$, якщо існує така не залежна від t визначено додатна функція $w(x_1, x_2, ..., x_n)$, що $v(t, x_1, x_2, ..., x_n) \ge w(x_1, x_2, ..., x_n)$ при всіх вказаних значеннях аргументів та $v(t,0,0,...,0) = 0$.

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (i = 1,2,...,n), \tag{3.1}$$

і нехай $v(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ є неперервно диференційовна функція своїх аргументів. Повна похідна по t функції $v(t, x_1, x_2, ..., x_n)$, обчислена в силу системи (3.1) (тобто вздовж інтегральних кривих системи (3.1)), дорівнює

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n). \tag{3.2}$$

Якщо праві частини системи (3.1) не містять явно t, то така система називається автономною, або стаціонарною.

Теорема 3.1. *(Теорема О.М. Ляпунова про стійкість.) Якщо система диференціальних рівнянь (3.1) така, що існує функція* $v(t, x_1, x_2, ..., x_n)$, *визначено додатна при* $t \ge t_0$ *в деякому H-околі початку координат, похідна якої* $\frac{dv}{dt}$, *обчислена в силу системи (3.1), недодатна, то тривіальний розв'язок системи (3.1) стійкий.*

Теорема 3.2. *(Теорема О.М. Ляпунова про асимптотичну стійкість для автономних систем.) Якщо автономна система диференціальних рівнянь*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (i = 1,2,...,n) \tag{3.3}$$

така, що існує функція $v(x_1, x_2, ..., x_n)$, визначено додатна в деякому H-околі початку координат, похідна якої $\frac{dv}{dt}$, обчислена в силу системи (3.3), визначено від'ємна, то тривіальний розв'язок $x_i \equiv 0 \ (i = 1,2,...,n)$ асимптотично стійкий.

Функції $v(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ і $v(x_1, x_2, ..., x_n)$, що фігурують в наведених вище теоремах, називаються *функціями Ляпунова*.

Назвемо областю $v > 0$ яку-небудь область околу $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le H$ початку координат простору змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, обмежену поверхнею $v = 0$, в якій функція v набуває додатних значень.

Припустимо, що функція v має наступні властивості:

1) при як завгодно великих значеннях t в як завгодно малому околі початку координат існує область $v > 0$;

2) в області $v > 0$ функція v обмежена;

3) в області $v > 0$ похідна $\frac{dv}{dt}$, обчислена в силу системи рівнянь (3.1), визначено додатна.

Теорема 3.3. *(Теорема М. Г. Четаєва про нестійкість.) Якщо для системи диференціальних рівнянь (3.1) можна знайти функцію, яка задовольняє умови 1), 2), 3), то тривіальний розв'язок цієї системи нестійкий.*

Зауваження. Якщо в системі (3.1) всі f_i не залежать явно від t, то функцію Ляпунова потрібно шукати як не залежну явно від t.

Приклад 3.1. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(x - 2y)(1 - x^2 - 3y^2), \\ \frac{dy}{dt} = -(y + x)(1 - x^2 - 3y^2). \end{cases}$$

Розв'язок. Візьмемо в якості v функцію $v = x^2 + 2y^2$. Вона є, по-перше, визначено додатною, а по-друге, її похідна $\frac{dv}{dt}$, обчислена в силу системи, дорівнює

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} =$$

$$= 2x(2y - x)(1 - x^2 - 3y^2) - 4y(x + y)(1 - x^2 - 3y^2) =$$

$$= -2(1 - x^2 - 3y^2)(x^2 + 2y^2) \le 0$$

при досить малих x і y.

Ми бачимо, що виконуються всі умови теореми Ляпунова про стійкість. Отже, тривіальний розв'язок $x \equiv 0, \ y \equiv 0$ стійкий.■

Приклад 3.2. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5y - 2x^3, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 3y^3. \end{cases}$$

Розв'язок. Функція $v = x^2 + y^2$ задовольняє умови теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість:

1) $v(x, y) \ge 0, \ v(0,0) = 0$;

2) $\frac{dv}{dt} = 2x(-5y - 2x^3) + 2y(5x - 3y^3) = -(4x^4 + 6y^4) \le 0$,

тобто $\frac{dv}{dt} < 0$ і $\frac{dv}{dt} = 0$ тільки при $x = 0, \ y = 0$, і отже, є визначено від'ємна функція. Таким чином, розв'язок $x \equiv 0, \ y \equiv 0$ асимптотично стійкий.■

Приклад 3.3. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок автономної системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dy} = x^2 + y, \\ \frac{dy}{dt} = y^2 + x. \end{cases}$$

Розв'язок. Візьмемо в якості $v(x, y)$ функцію

$$v = \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3.$$

Тут областю $v > 0$ є, наприклад, область $x > 0, \ y > 0$. В області $v > 0$ маємо:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (x^2 + y)^2 + (x + y^2)^2 > 0.$$

Згідно з теоремою Четаєва про нестійкість розв'язок $x \equiv 0, \ y \equiv 0$ нестійкий.■

У читача вже, напевно, виникло запитання: а як, власне, знайти функцію Ляпунова? Слід зауважити, що проблема побудови функції Ляпунова в заданій області фазового простору для нелінійних систем на даний час не є цілком вирішеною. Дотепер побудова цінної функції Ляпунова є справою удачі. Існує лише деякий набір прийомів, які в ряді випадків дають позитивний результат. Причому ступінь хитромудрості міркувань не завжди відповідає цінності одержуваних результатів. Адже для будь-якої системи диференціальних рівнянь будь-яка визначено додатна функція v може служити функцією Ляпунова. Справді, вимагаючи, щоб в силу даної системи похідна $\dot{v}$ була недодатною (визначено від'ємною), можна виписати якісь умови стійкості нульового розв'язку системи. Але при необережному виборі функції v ці умови можуть виявитися суперечливими, тобто нездійсненними. Крім того, якщо стати на такий шлях міркувань, ми неминуче потонемо в океані малоцінних достатніх умов стійкості, вельми далеких від того, щоб бути необхідними.

Добре перевіреним критерієм оцінки одержаної функції Ляпунова є наступна вимога: достатні умови, отримані за допомогою цієї функції в нелінійному випадку, повинні бути і необхідними в лінійному випадку. Досвід показує, що найбільш вдалі функції Ляпунова отримуються в тому випадку, коли їм можна надати фізичну інтерпретацію. А це можливо зробити тоді, коли досліджувана динамічна система має в якості прообразу певну фізичну модель. Таку модель завжди легко навести, наприклад, у випадку, коли порядок досліджуваної системи дорівнює двом.

Опис найбільш вживаних прийомів побудови функції Ляпунова міститься в [2]. Для випадку автономних систем покажемо на прикладі один метод побудови функції Ляпунова у вигляді квадратичної форми, який називається методом розділення змінних.

Приклад 3.4. Дана система рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^3 + by, \\ \dot{y} = -cx + dy^3. \end{cases} \tag{3.4}$$

Знайти для системи (3.4) функцію Ляпунова у вигляді

$$v(x,y) = F_1(x) + F_2(y),$$

де $F_1(x)$, $F_2(y)$ – деякі поки що невідомі диференційовні функції.

Розв'язок. В силу системи (3.4) будемо мати:

$$\dot{v} = F_1'(x)\dot{x} + F_2'(y)\dot{y} = F_1'(x)(ax^3 + by) - F_2'(cx - dy^3).$$

Будемо вимагати, щоб функція $\dot{v}$ мала такий же самий вигляд, що й функція $v(x,y)$, тобто щоб вона зображалась у вигляді суми двох функцій – однієї, залежної тільки від x, іншої – тільки від y. Для цього необхідно, щоб мала місце тотожність

$$F_1'(x)by - F_2'(y)cx \equiv 0.$$

Розділюючи змінні, одержимо:

$$\frac{cx}{F_1'(x)} = \frac{by}{F_2'(y)},$$

і, отже, кожен з дробів повинен бути сталою величиною, наприклад, рівною $\frac{1}{2}$.

Тоді будемо мати:

$$\frac{cx}{F_1'(x)} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{by}{F_2'(y)} = \frac{1}{2},$$

звідки

$$F_1(x) = cx^2, \qquad F_2(y) = by^2,$$

так що

$$v(x,y) = cx^2 + by^2. \blacksquare$$

Вправи

Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок систем.

3.1. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y - 3xy^2 - \frac{1}{4}x^3, \\ \dot{y} = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - 2y^3. \end{cases}$ **3.2.** $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x^3, \\ \dot{y} = -x - 7y^3. \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 2xy^2 - 3x^3, \\ \dot{y} = \frac{1}{3}x - y - x^2y - 7y^3. \end{cases}$ **3.4.** $\begin{cases} \dot{x} = -xy^4, \\ \dot{y} = yx^4. \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 9y + 3xy^2 - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 2x^2y - \frac{1}{2}y^3. \end{cases}$ **3.6.** $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2xy^2 - xy^6, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}y - x^2y - x^4y^3. \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + xy^4 - x^3y^6, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{4}y^3. \end{cases}$ **3.8.** $\begin{cases} \dot{x} = x - xy^4, \\ \dot{y} = y - x^2y^3. \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} \dot{x} = y^3 + x^5, \\ \dot{y} = x^3 + y^5. \end{cases}$ **3.10.** $\begin{cases} \dot{x} = -2y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y^3. \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xy^2, \\ \dot{y} = -\frac{3}{4}y + 3xz^3, \\ \dot{z} = -\frac{2}{3}z - 2xyz^2. \end{cases}$ **3.12.** $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{3}y - x - \frac{7}{2}x^3, \\ \dot{y} = -x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}y^3. \end{cases}$

$(v = x^2 + 2y^2 + 3z^2)$.

4. Дослідження на стійкість за першим наближенням

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1,2,\ldots,n), \tag{4.1}$$

де f_i – диференційовні в околі початку координат функції, $f_i(t,0,0,\ldots,0) \equiv 0$.

Дослідимо на стійкість точку спокою $x_i \equiv 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ системи (4.1). Зобразимо систему (4.1) в околі початку координат у вигляді

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + R_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1,2,\ldots,n), \tag{4.2}$$

де R_i мають порядок вище першого відносно $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (тобто фактично розвинемо праві частини (4.1) за формулою Тейлора за степенями x в околі початку координат). Замість точки спокою системи (4.1) дослідимо на стійкість точку спокою лінійної системи

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t)x_j \qquad (i = 1,2,...,n), \tag{4.3}$$

яка називається *системою рівнянь першого наближення*, або *лінеаризованою системою* для системи (4.1).

Виникає питання: чи випливає зі стійкості (нестійкості) точки спокою системи (4.3) стійкість (нестійкість) точки спокою вихідної системи (4.1)? Взагалі кажучи, строгого зв'язку між системами (4.1) і (4.3) немає.

Приклад 4.1. Розглянемо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = x^2. \tag{4.4}$$

Тут $f(t,x) \equiv x^2$. Лінеаризоване рівняння для рівняння (4.4) має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = 0. \tag{4.5}$$

Розв'язок $x\ (t) \equiv 0$ рівняння (4.5) є стійким. Але він є також розв'язком вихідного рівняння (4.4), причому для цього рівняння даний розв'язок не є стійким. Справді, кожний дійсний розв'язок рівняння (4.4) має вигляд

$$x = \frac{x_0}{1 - tx_0}, \qquad x|_{t=0} = x_0,$$

і перестає існувати при $t = \frac{1}{x_0}$ (розв'язок непродовжуваний).■

Приклад 4.2. Розглянемо нелінійне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 e^t. \tag{4.6}$$

Лінеаризоване рівняння має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = x. \tag{4.7}$$

Розв'язок $x\ (t) \equiv 0$ рівняння (4.7) нестійкий, оскільки кожний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$x(t) = Ce^t,$$

і очевидно, що $|x(t)| \to +\infty$ при $t \to +\infty$. З іншого боку, розв'язок $x(t) \equiv 0$ рівняння (4.6) є асимптотично стійким. Дійсно, загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$x(t) = Ce^t\left[1 + \frac{2}{3}C^2(e^{3t} - 1)\right]^{-1/2}$$

і, очевидно, прямує до нуля при $t \to +\infty$.■

Однак за певних умов із стійкості (нестійкості) розв'язку системи першого наближення випливає стійкість (нестійкість) розв'язку вихідної системи (4.1).

Обмежимось для простоти випадком, коли коефіцієнти $a_{ij}(t)$ в (4.3) сталі. В цьому випадку говорять, що система (4.2) стаціонарна в першому наближенні.

Теорема 4.1. *Якщо система рівнянь (4.2) стаціонарна в першому наближенні, всі члени R_i обмежені за t і розкладаються в ряд за степенями $x_1,...,x_n$ в деякій області $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le H$, причому розвинення починаються членами не нижче другого порядку, а всі корені характеристичного рівняння*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \tag{4.8}$$

мають від'ємні дійсні частини, то тривіальний розв'язок $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1,2,...,n)$ системи (4.2) асимптотично стійкий, тобто в цьому випадку можливе дослідження на стійкість за першим наближенням.

Теорема 4.2. *Якщо система рівнянь (4.2) стаціонарна в першому наближенні, всі функції R_i задовольняють умови теореми 4.1 і принаймні один з коренів характеристичного рівняння (4.8) має додатну дійсну частину, то точка спокою $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1,2,...,n)$ системи (4.2) нестійка, тобто і в цьому випадку можливе дослідження на стійкість за першим наближенням.*

Зауваження. Якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння (4.8) недодатні, причому дійсна частина принаймні одного кореня дорівнює нулю, то дослідження на стійкість за першим наближенням, взагалі кажучи, неможливе (в цьому випадку починають впливати нелінійні члени R_i).

Приклад 4.3. Дослідити на стійкість точку спокою $x = 0$, $y = 0$ системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + 2x^4 - y^6, \\ \dot{y} = x - 3y + 11y^4. \end{cases} \tag{4.9}$$

Розв'язок. Нелінійні члени задовольняють умови теорем 4.1 і 4.2. Дослідимо на стійкість точку спокою системи першого наближення

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases} \tag{4.10}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -1 - k & 1 \\ 1 & -3 - k \end{vmatrix} = 0$$

має від'ємні корені $k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$. Отже, на підставі теореми 4.1 точка спокою $x=0$, $y=0$ систем (4.9) і (4.10) асимптотично стійка.■

Приклад 4.4. Розглянемо рівняння коливання маятника

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\sin x = 0. \tag{4.11}$$

Тут x – кут відхилення маятника від вертикалі. Рівнянню (4.11) відповідає система

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ay - b\sin x. \end{cases} \tag{4.12}$$

Точки спокою системи (4.12):

$$x = k\pi \ (k - \text{ціле}), \qquad y = 0. \tag{4.13}$$

Дослідимо на стійкість точку спокою $x=0$, $y=0$, яку одержуємо з (4.13) при $k=0$. Використовуючи розвинення

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

запишемо систему першого наближення:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -bx - ay, \end{cases} \tag{4.14}$$

характеристичне рівняння якої

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{4.15}$$

Якщо $a>0$, $b>0$, то корені рівняння (4.15) мають від'ємні дійсні частини, і, отже, точка спокою $x=0$, $y=0$ стійка за першим наближенням.

Дослідимо тепер на стійкість точку $(\pi, 0)$, що відповідає $k=1$. Використовуючи розвинення

$$\sin x = -(x-\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!} - \ldots$$

і переносячи початок координат в точку $x=\pi$, $y=0$, прийдемо до системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = bx - ay, \end{cases} \tag{4.16}$$

характеристичне рівняння якої

$$\lambda^2 + a\lambda - b = 0. \tag{4.17}$$

При $a>0$, $b>0$ корені цього рівняння будуть дійсними і різних знаків. Отже, точка спокою $(\pi, 0)$ є нестійкою точкою для системи (4.16).■

Приклад 4.5. Дослідити на стійкість точку спокою $x=0$, $y=0$ системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y - xf(x,y), \\ \dot{y} = -x - yf(x,y), \end{cases} \tag{4.18}$$

де функція $f(x, y)$ розвивається в збіжний степеневий ряд і $f(0, 0) = 0$.

Розв'язок. Лінеаризована система має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \tag{4.19}$$

Точка спокою системи (4.19) є (0, 0).

Характеристичне рівняння системи (4.19)

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{або} \quad k^2 + 1 = 0 \tag{4.20}$$

має суто уявні корені $k_{1,2} = \pm i$. Точка спокою (0, 0) системи першого наближення (4.19) стійка (центр). Оскільки дійсні частини коренів характеристичного рівняння (4.20) дорівнюють нулю, то згідно з зауваженням на стор. 19 питання про стійкість точки спокою (0 ,0) потребує додаткового дослідження.

Для дослідження на стійкість точки спокою (0 ,0) системи (4.18) застосуємо другий метод Ляпунова. Беручи $v(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, знаходимо:

$$\frac{dv}{dt} = -(x^2+y^2)f(x,y).$$

Звідси: якщо $f(x,y) \geq 0$ в досить малому околі початку координат, то точка спокою (0, 0) стійка; якщо $f(x,y)$ – визначено додатна функція в деякому околі початку координат, то точка спокою (0, 0) асимптотично стійка; якщо $f(x,y) < 0$ в досить малому околі початку координат, то точка спокою (0, 0) нестійка.■

Останній приклад ілюструє той факт, що в деяких випадках не можна судити про стійкість точки спокою за першим наближенням.

Вправи

Дослідити на стійкість за першим наближенням точку спокою $x=0$, $y=0$ в наступних системах.

4.1. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 3x^2, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4. \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} \dot{x} = -\sin x + 3y + x^5, \\ \dot{y} = \frac{1}{4}x - 2y - \frac{1}{6}y^3. \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} \dot{x} = 2e^x + 5y - 2 + x^4, \\ \dot{y} = x + 6\cos y - 6 - y^2. \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + \sin^3 x - y^2, \\ \dot{y} = -2x + \sin y + e^y x^2. \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2\sin y - y^3 \sin x, \\ \dot{y} = 2y - 3x - x^3. \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + x^2 + y^2, \\ \dot{y} = x + y - y^2. \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y, \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} \dot{x} = -4x + \frac{7}{2}\sin y - 3x^2, \\ \dot{y} = -2x + x^2 + y + y^3. \end{cases}$

4.9. $\begin{cases}\dot{x} = -4y - x^3,\\ \dot{y} = 3x - y^3.\end{cases}$ **4.10.** $\begin{cases}\dot{x} = 10\sin x - 29y + 3y^3,\\ \dot{y} = 5x - 14\sin y + y^2.\end{cases}$

4.11. $\begin{cases}\dot{x} = y - xy^2,\\ \dot{y} = -x^3.\end{cases}$

4.12. Дослідити на стійкість точки спокою маятника, до якого прикладено обертальний момент L:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\sin x = L, \qquad \text{де } |L| < b.$$

5. Асимптотична стійкість в цілому. Стійкість за Лагранжем

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, ..., x_n), \qquad f_i(t, 0, ..., 0) = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n), \qquad (5.1)$$

і нехай ця система визначена в півпросторі

$$\Omega: \left\{a < t < +\infty, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < +\infty\right\}.$$

Говорять, що тривіальний розв'язок $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ системи (5.1) *асимптотично стійкий в цілому*, якщо він

1) асимптотично стійкий за Ляпуновим;

2) будь-який інший розв'язок $x_i(t)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ системи (5.1) має властивість

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Аналогічно визначається асимптотична стійкість в цілому нетривіального розв'язку системи (5.1).

Обмежимось автономними системами, тобто такими, праві частини яких не залежать явно від часу t:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, ..., x_n), \qquad f_i(0, ..., 0) = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n). \qquad (5.2)$$

Функцію Ляпунова $v(x_1, ..., x_n)$ назвемо нескінченно великою, якщо для будь-якого додатного числа M існує додатне число R таке, що зовні сфери $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = R^2$ має місце нерівність $v > M$.

Теорема 5.1 *(про асимптотичну стійкість в цілому). Якщо існує нескінченно велика визначено додатна функція $v(x_1, ..., x_n)$ така, що $\frac{dv}{dt} < 0$ зовні E і $\frac{dv}{dt} \ge 0$ на E, де множина E не містить цілих траєкторій (крім нульового положення рівноваги), то тривіальний розв'язок системи (5.2) буде асимптотично стійким в цілому.*

Приклад 5.1. Розглянемо рівняння

$$\ddot{x} + x^2\dot{x} + x^3 = 0. \qquad (5.3)$$

Запишемо рівняння (5.3) у вигляді еквівалентної йому системи рівнянь

$$\begin{cases}\dot{x} = y,\\ \dot{y} = -x^3 - x^2 y.\end{cases} \qquad (5.4)$$

В якості функції Ляпунова $v(x, y)$ візьмемо функцію

$$v(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4.$$

Маємо:

$$\frac{dv}{dt} = y\dot{y} + x^3\dot{x} = -x^3 y - x^2 y^2 + x^3 y = -x^2 y^2.$$

Очевидно, що $v(x, y) \to \infty$ при $x^2 + y^2 \to \infty$. Далі, $\dot{v}(x, y)$ перетворюється в нуль тільки на осях координат (множина E). Очевидно, що жодний розв'язок, за винятком точки спокою в початку координат, не залишається на цих осях при всіх $t \ge 0$. Дійсно, в усіх точках осі OY, відмінних від початку координат O, кутовий коефіцієнт

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^3 - x^2 y}{y}$$

має скінченне значення, а тому на цій осі не може лежати дуга траєкторії. З іншого боку, при підході до осі OX кутовий коефіцієнт $\frac{dy}{dx} \to \infty$, і тому на осі OX не можуть знаходитись дуги траєкторії. Отже, множина E не містить цілих траєкторій (крім початку координат).

Точка спокою (0, 0) є асимптотично стійкою в цілому.■

В силу теореми точка спокою (0, 0) є асимптотично стійкою в цілому.■

Може виявитись, що система (5.2) не володіє повною стійкістю, але, проте, для неї може існувати область асимптотичної стійкості.

Під областю асимптотичної стійкості системи (5.2) розуміють область, яка містить початок координат O і має ту властивість, що всі траєкторії, які починаються в цій області, прямують при $t \to \infty$ до початку координат.

В лінійних системах завжди буває тільки повна стійкість, тоді як в нелінійних системах вона може не бути такою.

Теорема 5.2. *Нехай $v(x_1, ..., x_n)$ – функція, яка має неперервні частинні похідні першого порядку для всіх x_i. Позначимо через Ω_l множину всіх точок, де $v(x_1, ..., x_n) < l$. Якщо множина Ω_l обмежена і на ній*

1) $v(x_1, ..., x_n) > 0$ при $x_i \ne 0$, $(i = 1, 2, ..., n)$,

2) $\dot{v}(x_1, ..., x_n) < 0$ при $x_i \ne 0$, $(i = 1, 2, ..., n)$,

то початок координат – асимптотично стійке положення рівноваги системи (5.2), а Ω_l – область асимптотичної стійкості.

Приклад 5.2. Вказати область асимптотичної стійкості рівняння

$$\ddot{x}+\varepsilon(x^2-1)\dot{x}+x=0 \qquad (\varepsilon<0)$$

(рівняння Ван-дер-Поля).

Розв'язок. Перепишемо рівняння у вигляді системи

$$\begin{cases}\dot{x}=y-\varepsilon\left(\dfrac{x^3}{3}-x\right),\\ \dot{y}=-x.\end{cases}$$

Єдина точка спокою – початок координат. Візьмемо $v(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2}$. Тоді

$$\dot{v}(x,\ y)=y\dot{y}+x\dot{x}=-\varepsilon x^2\left(\frac{x^2}{3}-1\right).$$

Очевидно, $\dot{v}\le 0$ при $x^2\le 3$ $(\varepsilon<0)$. Таким чином, в крузі $x^2+y^2<3$ маємо: $v>0$ при $x^2+y^2\ne 0$ і $\dot{v}<0$ при $x^2+y^2\ne 0$, тобто цей круг міститься в області асимптотичної стійкості.■

Нехай маємо систему

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,...,x_n) \qquad (i=1,2,...,n), \qquad (5.5)$$

де $f_i(t,x_1,...,x_n)$ задовольняють умови теореми існування та єдиності розв'язку системи (5.5) для всіх $t\in[t_0,+\infty)$ і будь-яких $x_1,...,x_n$.

Система (5.5) називається *стійкою за Лагранжем* (Lagrange Joseph Louis), якщо всі розв'язки цієї системи визначені і обмежені на $[t_0,+\infty)$.

Вправи

Дослідити на асимптотичну стійкість в цілому тривіальний розв'язок рівняння (див. [1]).

5.1. $\ddot{x}+\dot{x}^3+(\dot{x}^2+1)x=0$.

5.2. $\ddot{x}+\dot{x}+(\dot{x}^2+\dot{x}+2)(2x+x^5)=0$.

5.3. $\ddot{x}+x^2e^{-x}\dot{x}+x^3+2x=0$.

Показати, що рівняння є стійким за Лагранжем на $[1;+\infty)$.

5.4. $\ddot{x}(t)+\left(a^2+\dfrac{1}{1+t^2}\right)x(t)=0$.

5.5. $\ddot{x}(t)+\left(1+e^{-t^2}-\dfrac{1}{t+2}\right)x(t)=0$.

На прикладі наступних рівнянь показати, що із обмеженості всіх розв'язків „граничного" рівняння $\ddot{x}(t)+x(t)=0$ не випливає обмеженість розв'язків вихідного рівняння.

5.6. $\ddot{x}(t)-\dfrac{2}{t}\dot{x}(t)+x(t)=0$.

5.7. $\ddot{x}(t)+\dfrac{2}{t}\dot{x}(t)+x(t)=0$.

5.8. Показати, що якщо тривіальний розв'язок лінійної автономної системи асимптотично стійкий за Ляпуновим, то вин асимптотично стійкий в цілому.

6. Критерій Рауса – Гурвіца

Велике практичне значення мають необхідні і достатні умови того, щоб всі корені алгебраїчного рівняння з дійсними коефіцієнтами a_0, a_1, a_2, ..., a_n

$$f(\lambda)\equiv a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \qquad (6.1)$$

мали від'ємні дійсні частини. Не порушуючи загальності міркувань, можна припустити, що $a_0>0$.

Додатність всіх коефіцієнтів – необхідна, але не достатня умова для того, щоб всі корені рівняння (6.1) були розміщені зліва від уявної осі (у випадку рівнянь 1-го і 2-го степеня ця умова і достатня). Необхідні і достатні умови від'ємності дійсних частин коренів рівняння (6.1) дали Раус (Routh Edward John) і незалежно від нього Гурвіц (Hurwitz Adolf).

Теорема 6.1. *(Критерій Рауса – Гурвіца.) Для того щоб всі корені рівняння (6.1) мали від'ємні дійсні частини, необхідно і достатньо, щоб були додатними всі головні діагональні мінори матриці Гурвіца*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & ... & 0\\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & ... & 0\\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ..\\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}. \qquad (6.2)$$

Многочлен $f(\lambda)$ степеня $n\ge 1$ називають *стійким многочленом*, якщо всі його корені λ_1, λ_2, ..., λ_n мають від'ємні дійсні частини: $\mathrm{Re}\lambda_j<0$ ($j=1, 2, \dots, n$), тобто всі корені стійкого многочлена розміщені в лівій півплощині.

Матриця Гурвіца складається наступним чином. На головній діагоналі розміщуються коефіцієнти многочлена (6.1), починаючи з a_1 до a_n. Стовпці складаються по черзі з коефіцієнтів тільки з непарними або тільки з парними індексами, причому в число останніх включається коефіцієнт a_0. Всі елементи матриці, яких не стає (тобто коефіцієнти з індексами, більшими за n або меншими за 0), замінюються нулями.

Головні діагональні мінори матриці Гурвіца:

$$\Delta_1 = a_1, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}. \tag{6.3}$$

Таким чином, умови Рауса – Гурвіца виглядають так:

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \Delta_n > 0. \tag{6.4}$$

Зауважимо, що оскільки $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot a_n$, то остання з умов $\Delta_n > 0$ може бути замінена вимогою $a_n > 0$.

Приклад 6.1. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок рівняння

$$y^{V} + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

Розв'язок. Складаємо характеристичне рівняння:

$$f(\lambda) \equiv \lambda^5 + \lambda^4 + 7\lambda^3 + 4\lambda^2 + 10\lambda + 3 = 0.$$

Тут $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 7$, $a_3 = 4$, $a_4 = 10$, $a_5 = 3$.

Випишемо матрицю Гурвіца:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо діагональні мінори матриці:

$$\Delta_1 = 1 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 10\Delta_3 - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix} = 50 - 3(49 + 3 - 10 - 28) = 8 > 0,$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\Delta_4 = 3 \cdot 8 = 24 > 0.$$

Таким чином, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0$, $\Delta_5 > 0$. Отже, тривіальний розв'язок $y \equiv 0$ рівняння асимптотично стійкий.■

Обчислення можна вести так. Спочатку складаємо мінор Δ_n. Потім послідовно обчислюємо мінори Δ_1, Δ_2, Δ_3 і т. д. Якщо зустрівся від'ємний мінор, то система нестійка і подальші обчислення зайві.

Якщо коефіцієнти рівняння (6.1) задані як числа, то умови (6.4) легко перевіряються. Якщо ж коефіцієнти рівняння (6.2) містять буквені параметри, то обчислення визначників при великих k утруднене.

Можна показати, що якщо умови (6.4) виконані, то всі коефіцієнти многочлена (6.1) додатні:

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ \ldots,\ a_n > 0. \tag{6.5}$$

Як вже зазначалось, умови (6.5) є необхідними, але не достатніми для того, щоб всі корені многочлена $f(\lambda)$ містились в лівій півплощині $\mathrm{Re}\lambda < 0$. Однак при виконанні умов (6.5) нерівності (6.4) вже не є незалежними. Так, наприклад, при $n = 5$ умови Рауса – Гурвіца зводяться до двох нерівностей: $\Delta_2 > 0$, $\Delta_4 > 0$. Це дозволило Льєнару (Liénard A.) і Шіпару (Chipart H.) встановити інші умови стійкості, в яких число детермінантних нерівностей приблизно вдвоє менше, ніж в умовах (6.4).

Теорема 6.2. *(Умови Льєнара – Шіпара.) Для того щоб многочлен*

$$f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{6.1'}$$

мав всі корені з від'ємними дійсними частинами, необхідно і достатньо, щоб:

1) всі коефіцієнти многочлена $f(\lambda)$ були додатними:

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ \ldots,\ a_n > 0;$$

2) мали місце детермінантні нерівності

$$\Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0,\ \ldots \tag{6.6}$$

(тут, як і раніше, Δ_k – визначник Гурвіца k-го порядку).

Приклад 6.2. Розглянемо те ж саме рівняння, що і в прикладі 6.1:

$$y^{V}+y^{IV}+7y'''+4y''+10y'+3y=0.$$

Тут

$$a_0=1>0,\ a_1=1>0,\ a_2=7>0,\ a_3=4>0,\ a_4=10>0,\ a_5=3>0,$$

тобто перша умова критерію Льєнара – Шіпара виконана.

Далі,

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\4&7&1&1\\3&10&4&7\\0&0&3&10\end{vmatrix}=8>0,\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}1&1\\4&7\end{vmatrix}=3>0,$$

тобто виконана і друга умова критерію.

Таким чином, тривіальний розв'язок рівняння асимптотично стійкий.■

Вправи

Дослідити на стійкість тривіальні розв'язки рівнянь.

6.1. $y^{IV}+7y'''+12y''+23y'+10y=0$.

6.2. $y^{IV}+2y'''+4y''+2y'+5y=0$.

6.3. $y^{IV}+y'''+3y''+2y'+y=0$.

6.4. $y^{V}+2y^{IV}+3y'''+2y''+y'+y=0$.

6.5. Який вигляд мають умови Гурвіца для зворотного рівняння

$$\lambda^4+p\lambda^3+q\lambda^2+p\lambda+1=0$$

(p і q – дійсні)?

При яких значеннях α будуть стійкими тривіальні розв'язки наступних рівнянь?

6.6. $y'''+\alpha y''+2y'+y=0$.

6.7. $y^{IV}+2y'''+y''+\alpha y'+3y=0$.

6.8. $y^{IV}+3y'''+\alpha y''+2y'+y=0$.

При яких значеннях α і β будуть стійкими тривіальні розв'язки наступних рівнянь?

6.9. $y'''+\alpha y''+2y'+\beta y=0$.

6.10. $y'''+\alpha y''+\beta y'+3y=0$.

6.11. $y^{IV}+\alpha y'''+2y''+\beta y'+y=0$.

7. Геометричний критерій стійкості (критерій Михайлова)

Нехай маємо диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими дійсними коефіцієнтами

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0. \qquad (7.1)$$

Питання про стійкість розв'язку диференціального рівняння (7.1) зводиться до питання про розміщення коренів характеристичного рівняння

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n=0 \qquad (7.2)$$

на комплексній площині. Це питання вирішується за допомогою наведеного нижче критерію Михайлова.

Нехай задано характеристичний многочлен

$$f(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n. \qquad (7.3)$$

Підставляючи в нього $\lambda=i\omega$, одержимо

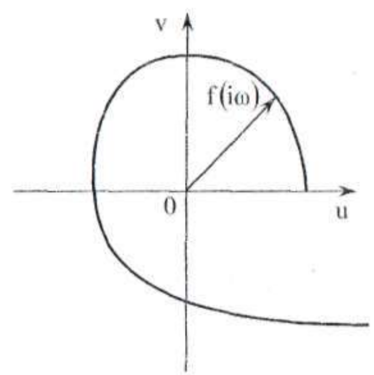
$$f(i\omega)=u(\omega)+iv(\omega), \qquad (7.4)$$

де

$$\left.\begin{aligned}u(\omega)&=a_n-a_{n-2}\omega^2+a_{n-4}\omega^4-\ldots,\\ v(\omega)&=a_{n-1}\omega-a_{n-3}\omega^3+a_{n-5}\omega^5-\ldots\end{aligned}\right\}. \qquad (7.5)$$

Величину $f(i\omega)$ згідно (7.4) і (7.5) при заданому параметрі ω можна зобразити на комплексній площині uOv у вигляді вектора. Якщо змінювати параметр ω в інтервалі $(-\infty, +\infty)$, то кінець цього вектора опише деяку криву, кожна точка якої відповідає певному значенню ω.

Одержаний таким чином годограф вектора $f(i\omega)$ називається *кривою Михайлова* для многочлена $f(\lambda)$ (мал. 7.1).



Мал. 7.1

При змінюванні ω від $-\infty$ до $+\infty$ вектор $f(i\omega)$ повернеться на деякий кут φ. Якщо многочлен $f(\lambda)$ має m коренів з додатними дійсними частинами, а решту $n-m$ коренів – з від'ємними, то

$$\varphi=(n-m)\pi+m(-\pi)=(n-2m)\pi. \qquad (7.6)$$

Зауваження. Оскільки функція $u(\omega)$ парна, то крива Михайлова симетрична відносно осі Ou, і тому достатньо будувати частину кривої Михайлова, яка відповідає зміні параметра ω від 0 до $+\infty$. Тоді формула (7.6) набуває вигляду:

$$\varphi=(n-m)\frac{\pi}{2}+m\left(-\frac{\pi}{2}\right)=(n-2m)\frac{\pi}{2}. \qquad (7.7)$$

Для стійкості розв'язку рівняння (7.1) необхідно і достатньо, щоб всі корені характеристичного рівняння $f(\lambda)=0$ мали від'ємні дійсні частини, тобто в формулі (7.7) повинно бути $m=0$.

Звідси випливає наступне формулювання критерію Михайлова.

Теорема 7.1. *(Критерій стійкості Г.О. Михайлова). Для стійкості тривіального розв'язку рівняння (7.1) необхідно і достатньо, щоб:*

1) вектор $f(i\omega)$ при змінюванні ω від 0 до $+\infty$ здійснив поворот на кут $\varphi=n\frac{\pi}{2}$, тобто зробив $\frac{n}{4}$ обертів проти годинникової стрілки;

2) годограф $f(i\omega)$ при змінюванні ω від 0 до $+\infty$ не проходив через нульову точку.

Інакше, для стійкості розв'язку рівняння (7.1) необхідно і достатньо, щоб крива Михайлова проходила по черзі n квадрантів проти годинникової стрілки, охоплюючи весь час початок координат.

Проходження по черзі квадрантів означає, що крива по черзі перетинає осі координат. Отже, координати $u(\omega)$ і $v(\omega)$ точок кривої Михайлова для стійкості розв'язку повинні по черзі перетворюватись в нуль. Звідси випливає інше формулювання критерію стійкості Михайлова.

Теорема 7.1′. *(Критерій стійкості Г.О. Михайлова). Для стійкості розв'язку рівняння (7.1) необхідно (а за умови, що крива проходить проти годинникової стрілки – і достатньо), щоб всі корені рівнянь $u(\omega)=0$, $v(\omega)=0$, були дійсними і чергувались поперемінно один з одним, тобто щоб між будь-якими двома коренями одного з цих рівнянь знаходився корінь іншого рівняння.*

Приклад 7.1. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок рівняння

$$y^{IV}+2y'''+3y''+2y'+y=0.$$

Розв'язок. Складаємо характеристичний многочлен:

$$f(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+1.$$

Далі:

$$f(i\omega)=\omega^4-2i\omega^3-3\omega^2+2i\omega+1,$$

$$u(\omega)=\omega^4-3\omega^2+1,$$

$$v(\omega)=-2\omega^3+2\omega=2\omega(1-\omega^2)=2\omega(1-\omega)(1+\omega).$$

Будемо змінювати ω від 0 до $+\infty$ і побудуємо криву (мал. 7.2)

$$\begin{cases} u=u(\omega), \\ v=v(\omega). \end{cases}$$

Врахуємо, що

$$\lim_{\omega\to+\infty}\frac{v}{u}=0.$$

ω	0	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$
u	1	0	−1	0
v	0	+	0	−

Кут повороту радіуса-вектора:

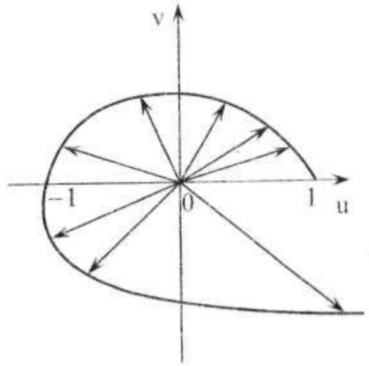
$$\varphi=4\frac{\pi}{2}=(n-2m)\frac{\pi}{2}.$$

Звідси $n-2m=4$; $n=4$; отже, $m=0$. Таким чином, всі корені характеристичного рівняння лежать в лівій півплощині, тобто тривіальний розв'язок $y\equiv0$ асимптотично стійкий.

До цього ж самого висновку можна було прийти, виходячи з критерію Льєнара – Шіпара, оскільки всі коефіцієнти характеристичного рівняння додатні і

$$\Delta_{n-1}=\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=4>0,$$

$$\Delta_{n-3}=\Delta_1=2>0.\blacksquare$$



Мал. 7.2

Вправи

Дослідити на стійкість тривіальні розв'язки рівнянь.

7.1. $2y^{IV}+4y'''+3y''+3y'+y=0$.

7.2. $3y^{IV}+4y'''+3y''+3y'+y=0$.

7.3. $y^{V}+5y^{IV}+10y'''+11y''+7y'+2y=0$.

7.4. $y^{IV}+5y'''+4y''+3y'+2y=0$.

7.5. $y^{V}+2y^{IV}+2y'''+46y''+89y'+260y=0$.

7.6. $y^{V}+y^{IV}+7y'''+4y''+10y'+3y=0$.

7.7. $y^{VII}+7y^{VI}+23y^{V}+37y^{IV}+56y'''+36y''+12y'+4y=0$.

7.8. $y^{IV}+3y'''+4y''+3y'+y=0$.

7.9. $y^{IV}+7y'''+18y''+22y'+12y=0$.

7.10. $y^{IV}+2y'''+3y''+2y'+y=0$.

7.11. $y^{IV}+11y'''+59y''+107y'+60y=0$.

7.12. $y^{IV}+5y'''+18y''+53y'+60y=0$.

7.13. $y^{IV}+6y'''+15y''+18y'+10y=0$.

7.14. $y^{IV}+4y'''+10y''+12y'+5y=0$.

7.15. $y'''+6y''+11y'+6y=0$.

7.16. $y^{IV}+7y'''+12y''+23y'+10y=0$.

7.17. $y^{IV}+3y'''+3y''+3y'+2y=0$.

7.18. $y^{IV}+2y'''+4y''+2y'+5y=0$.

7.19. $y^{IV}+2y''+8y'+5y=0$.

7.20. $y^{V}+4y^{IV}+5y'''+2y'+2y=0$.

8. D-розбиття

Нехай маємо лінійне диференціальне рівняння зі сталими дійсними коефіцієнтами

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=0. \tag{8.1}$$

Його характеристичне рівняння має вигляд

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_nz=0 \tag{8.2}$$

Для судження про стійкість розв'язку рівняння (8.1) немає необхідності обчислювати корені характеристичного рівняння. Достатньо лише встановити, що всі вони лежать в лівій півплощині. Зазвичай зустрічаються дві постановки задачі.

Перша. Вважаючи заданими всі коефіцієнти рівняння (8.1), встановити, чи буде стійким розв'язок при цих значеннях коефіцієнтів.

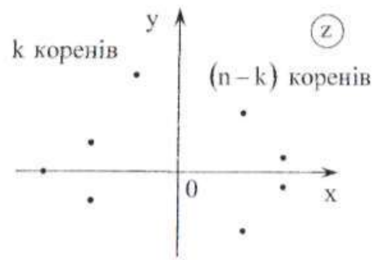
Друга. Вважаючи заданими деякі коефіцієнти рівняння (8.1), визначити, при яких значеннях інших коефіцієнтів розв'язок рівняння стійкий.

Для вирішення другої задачі в просторі коефіцієнтів будують так звані області стійкості. В свою чергу, для цього необхідно ввести поняття D-розбиття.

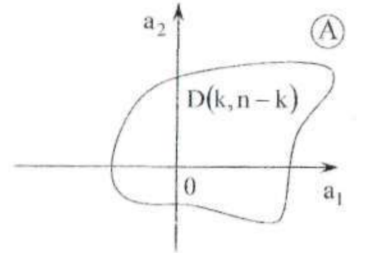
Нехай маємо характеристичне рівняння (8.2). Сукупність значень коефіцієнтів рівняння (8.1) можна розглядати як точку $n+1$-*вимірного* простору R_{n+1}. Кожній точці простору R_{n+1} відповідає певне значення коефіцієнтів a_0, a_1, ..., a_n, а отже, і певне значення всіх коренів z_1, z_2, ..., z_n характеристичного рівняння (8.2). Якщо в R_{n+1} існує така область, що кожній її точці відповідає характеристичне рівняння, всі корені якого лежать в лівій півплощині, то ця область називається *областю стійкості*, а гіперповерхня, що обмежує її, називається *межею області стійкості*. Нехай, наприклад, в характеристичному рівнянні (8.2) всі коефіцієнти, крім двох (скажімо, a_1 і a_2), – конкретні числа.

Припустимо, що при деяких певних значеннях a_1 і a_2 дане рівняння в площині коренів (тобто в площині z) має k коренів, які лежать зліва, і $n-k$ коренів, які лежать справа від уявної осі (мал. 8.1).

На площині A (площина параметрів a_1 і a_2) існує крива, що обмежує таку



Мал. 8.1



Мал. 8.2

область (мал. 8.2), кожна точка якої визначає многочлен з наступними властивостями: він має k коренів, які лежать зліва, і $n-k$ коренів, які лежать справа від уявної осі. Цю область позначимо через $D(k,\ n-k)$ (k – ціле, $0\le k\le n$).

Наприклад, якщо характеристичне рівняння третього степеня, тобто $n=3$, то в загальному випадку в просторі коефіцієнтів можуть бути вказані області

$$D(0,\ 3),\ D(1,\ 2),\ D(2,\ 1),\ D(3,\ 0).$$

Область $D(3,\ 0)$ і буде областю стійкості.

Зауважимо, що деякі області, зокрема, $D(3,\ 0)$, можуть бути відсутніми.

Розбиття простору коефіцієнтів характеристичного рівняння на області, які відповідають одному й тому ж самому числу коренів, що розміщені в лівій півплощині z, називається D-розбиттям простору коефіцієнтів.

Аналогічно можна побудувати D-розбиття простору будь-яких параметрів, від яких можуть залежати коефіцієнти характеристичного рівняння.

Припустимо, що в характеристичному рівнянні (8.2) коефіцієнти залежать від двох параметрів ξ і η (цими параметрами можуть бути, зокрема, просто два коефіцієнта розглядуваного рівняння).

Розглянемо сім'ю многочленів

$$f(z,\ \xi,\ \eta)=\xi P(z)+\eta Q(z)+R(z), \tag{8.3}$$

де $(\xi,\ \eta)$ – дійсні параметри, а P, Q, R – відомі многочлени від z з дійсними коефіцієнтами.

Задача ставиться так: в площині параметрів $(\xi,\ \eta)$ (площина w) знайти область $D(n,\ 0)$ таку, що для будь-якої точки $(\xi,\ \eta)\in D(n,\ 0)$ многочлен (8.3) буде мати всі корені z в лівій півплощині, або впевнитись, що такої області немає.

Побудова областей $D(k,\ n-k)$ грунтується на наступних міркуваннях:

1. Корені алгебраїчного рівняння неперервно залежать від його коефіцієнтів, тобто якщо коефіцієнти многочлена $f(z, \xi, \eta)$ мало змінити, то й корені його зміняться мало.

2. Якщо точка (ξ, η) лежить на межі області $D(k, n-k)$, то принаймні один корінь многочлена (8.3) лежить на уявній осі, тобто межа D-розбиття є образом уявної осі площини z.

Дійсно, якщо, наприклад, точка $(\xi, \eta) \in D(n, 0)$, то многочлен (8.3) має при цьому всі корені в лівій півплощині.

Якщо (ξ, η) лежить зовні $D(n, 0)$, то многочлен (8.3) має принаймні один корінь в правій півплощині.

При неперервному русі точки (ξ, η) з області $D(n, 0)$ в сусідню неперервно змінюються корені многочлена $f(z, \xi, \eta)$. Оскільки при цьому з'являється принаймні один корінь в правій півплощині, то в процесі зміни (неперервного руху) точки (ξ, η) він повинен перетнути уявну вісь (вісь Oy). Це буде, коли точка (ξ, η) перетне межу області $D(n, 0)$.

Нехай $z = x + iy$ – корінь многочлена $f(z, \xi, \eta)$. Рівність $f(z, \xi, \eta) = 0$ рівносильна рівностям

$$\begin{cases} \xi u_1(x,y) + \eta u_2(x,y) + u_3(x,y) = 0, \\ \xi v_1(x,y) + \eta v_2(x,y) + v_3(x,y) = 0, \end{cases} \tag{8.4}$$

де u_1, u_2, u_3 і v_1, v_2, v_3 –дійсні і' уявні частини многочленів P, Q і R відповідно.

Якщо визначник системи (8.4)

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система (8.4) однозначно розв'язна відносно ξ і η:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y), \\ \eta = \eta(x,y). \end{cases} \tag{8.5}$$

Рівняння (8.5) в точках, де $\Delta \neq 0$, визначають однозначне відображення площини коренів многочлена $f(z, \xi, \eta)$ на площину параметрів (ξ, η).

Обернене відображення неоднозначне: фіксованій парі значень (ξ, η) відповідає, взагалі кажучи, n коренів. Якщо визначник системи (8.4) в точці $z_0 = x_0 + iy_0$ перетворюється в нуль, то система або несумісна, або одне рівняння є наслідком іншого.

В цьому останньому випадку на площині параметрів w існує ціла пряма, яка складається з точок (ξ, η), для яких $z_0 = x_0 + iy_0$ є коренем многочлена $f(z, \xi, \eta)$. Таку точку $x_0 + iy_0$, а також відповідну їй пряму будемо називати *винятковими*.

Знайдемо на площині параметрів (ξ, η) ті точки, для яких многочлен (8.3) має принаймні один суто уявний корінь $z = iy$.

Геометричне місце таких точок складається з лінії, параметричні рівняння якої є

$$\begin{cases} \xi = \xi(0,y), \\ \eta = \eta(0,y) \end{cases} \qquad (-\infty < y < +\infty) \tag{8.6}$$

і яку можні одержати, покладаючи $x = 0$ в рівняннях (8.5), а також із виняткових прямих, які відповідають винятковим точкам осі Oy (якщо такі є).

Зауважимо, що рівняння (8.6) дають образ осі Oy при відображенні (8.5).

Це геометричне місце точок будемо називати *лінією L*.

Лінія L розбиває площину параметрів на деяке число зв'язних областей.

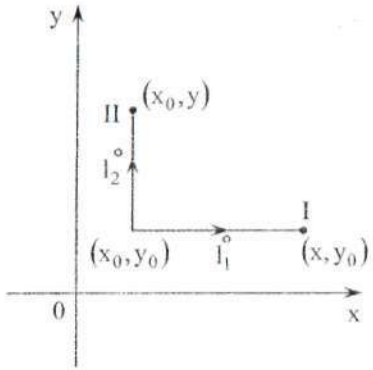
Кожна з таких областей має ту властивість, що для будь-якої її точки (ξ, η) многочлен $f(z, \xi, \eta)$ має одне і те ж саме число коренів, розміщених у лівій півплощині, тобто є областю типу $D(k, n-k)$ $(0 \le k \le n)$.

Таким чином, лінія L – межа шуканого D-розбиття.

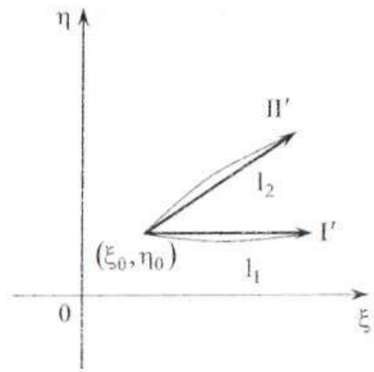
Розглянемо відображення (8.5) площини коренів на площину параметрів

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y), \\ \eta = \eta(x,y). \end{cases}$$

Проведемо через точку (x_0, y_0) дві лінії: горизонтальну I і вертикальну II.



Мал. 8.3



Мал. 8.4.

Якщо напрям повороту від I до II зберігається при відображенні (8.5), то говорять, що відображення *зберігає орієнтацію* в точці (x_0, y_0); в протилежному випадку – що воно *не зберігає орієнтацію* (мал. 8.3 і 8.4).

Якщо визначник

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} > 0$$

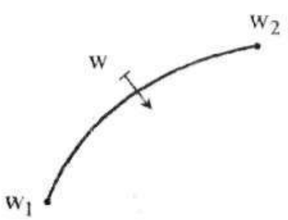
в точці $(x_0,\ y_0)$, то відображення (8.5) в точці $(x_0,\ y_0)$ зберігає орієнтацію. При $J<0$ орієнтація порушується. Якщо $J=0$, то питання про збереження чи незбереження орієнтації вирішують старші похідні. Можна показати (див., наприклад, Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного, М.: Наука, 1973), що знак визначника J збігається зі знаком визначника Δ, де

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix},$$

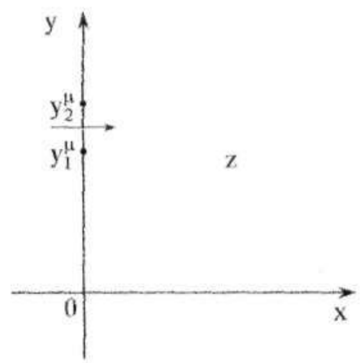
так що якщо $\Delta>0$, то відображення з площини коренів на площину параметрів зберігає орієнтацію, якщо $\Delta<0$, то орієнтація змінюється.

Розглянемо знову розбиття площини w (площина параметрів) на області $D(k,\ n-k)$ $(k \le n)$ і позначимо через L межу цих областей. Додатним напрямом на L будемо вважати той, який відповідає зростанню y (починаючи з $y=-\infty$); при цьому крива L може складатись з кількох віток, і при повному обході осі Oy її ділянки можуть проходитись по декілька разів (не більш ніж n, де n – степінь многочлена $f(z,\ \xi,\ \eta)$).

Розглянемо деяку ділянку w_1w_2 кривої L і припустимо, що при повному обході осі Oy вона проходиться r разів, тобто що цій ділянці відповідає r ділянок $y_1^\mu y_2^\mu$ $(\mu=1, 2, ..., r)$ осі Oy. Покладемо $\varepsilon_\mu=1$, якщо напрям $y_1^\mu y_2^\mu$ збігається з напрямом осі Oy, і $\varepsilon_\mu=-1$ в протилежному випадку. Покладемо також $\delta_\mu=1$, якщо на $y_1^\mu y_2^\mu$ визначник $\Delta>0$, і $\delta_\mu=-1$ – у випадку $\Delta<0$. Нехай точка w, рухаючись неперервно вздовж деякого досить малого шляху,



Мал. 8.5



Мал. 8.6

перетинає дугу w_1w_2 зліва направо (мал. 8.5). Цьому шляху в площині z відповідає r шляхів, які перетинають відрізки $y_1^\mu y_2^\mu$ осі Oy. Якщо $\varepsilon_\mu\cdot\delta_\mu>0$, то відповідний шлях йде з лівої півплощини в праву, і многочлен

$$f(z,\ \xi,\ \eta)=\xi P(z)+\eta Q(z)+R(z)$$

одержує на ньому один корінь з додатною дійсною частиною і втрачає корінь з від'ємною дійсною частиною; у випадку $\varepsilon_\mu\cdot\delta_\mu<0$ – навпаки.

Дійсно, нехай $\varepsilon_\mu\cdot\delta_\mu>0$. Це може бути в двох випадках: 1) $\varepsilon_\mu=1$, w_1w_2; 2) $\varepsilon_\mu=-1$, $\delta_\mu=-1$. В першому випадку напрям відрізку $y_1^\mu y_2^\mu$ осі Oy збігається з додатним напрямом цієї осі $(\varepsilon_\mu=1)$ і зберігається орієнтація $(\delta_\mu=1)$, тобто якщо в площині w ми переходимо дугу w_1w_2 зліва направо, то і в площині z ми переходимо з лівої півплощини в праву (тобто вісь Oy перетинаємо також зліва направо, мал. 8.6).

В другому випадку вектор $\overrightarrow{y_1^\mu y_2^\mu}$ направлений в сторону, протилежну напряму $\overrightarrow{Oy}$ $(\varepsilon_\mu=-1)$. Оскільки $\delta_\mu=-1$, то орієнтація в цьому випадку змінюється, і при переході зліва направо в площині w ми знову одержуємо перехід зліва направо в площині z через вісь Oy.

Аналогічно розглядається випадок $\varepsilon_\mu\cdot\delta_\mu<0$.

Отже, при переході з лівої сторони дуги w_1w_2 кривої L на праву сторону многочлен $f(z,\ \xi,\ \eta)$ втрачає

$$N=\varepsilon_1\delta_1+\varepsilon_2\delta_2+...+\varepsilon_r\delta_r$$

коренів з від'ємною дійсною частиною.

Приклад 8.1. *(Приклад Вишнеградського.)* Дано многочлен $f(z)=z^3+\xi z^2+\eta z+1$. Знайти область $D(3,\ 0)$.

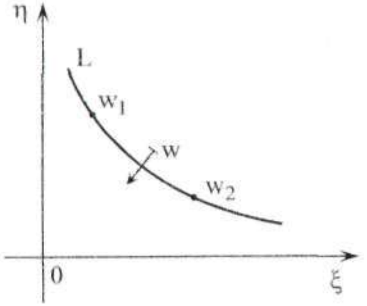
Розв'язок. Покладаючи $z=iy$ і розділюючи дійсну і уявну частини, знайдемо параметричні рівняння кривої L:

$$\xi=\frac{1}{y^2},\quad \eta=y^2.$$

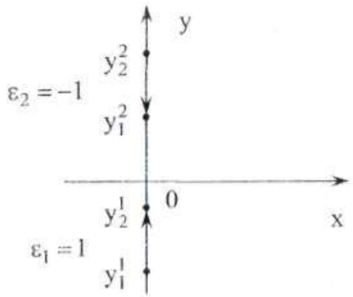
Це – вітка гіперболи $\xi\eta=1$, що лежить в першому квадранті. При повному обході осі Oy (y змінюється від $-\infty$ до $+\infty$) гіпербола описується два рази, тобто r = 2; при цьому один раз гіпербола проходиться в одному напрямі при зміні y від $-\infty$ до 0.

При подальшій зміні y від 0 до $+\infty$ гіпербола проходиться другий раз, але вже в протилежному напрямі. Таким чином, відрізку w_1w_2 кривої L відповідають два відрізка осі Oy: $y_1^1y_2^1$ і $y_1^2y_2^2$ (мал. 8.7 і 8.8). Визначник Δ на осі Oy дорівнює $\Delta=-y^3$. Отже, $\delta_1=1$ (оскільки при $\mu=1$ $y<0$), а $\delta_2=-1$ (оскільки при $\mu=2$ $y>0$). При переході точки w через w_1w_2 зліва направо втрачається N коренів з від'ємною частиною, де

$$N=\varepsilon_1\delta_1+\varepsilon_2\delta_2=2.$$

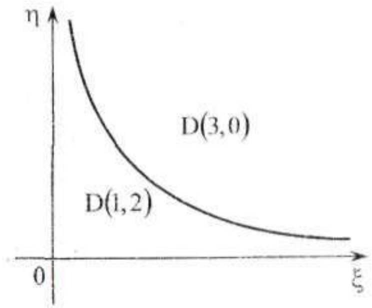


Мал. 8.7



Мал. 8.8

В початку координат $\xi=\eta=0$ многочлен $f(z)$ набуває вигляду z^3+1 і має корені $z_1=-1$, $z_{2,3}=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$, отже, область під гіперболою є D (3, 0). Дійсно,



Мал. 8.9

при переході з цієї області в D (1, 2) многочлен $f(z)$ втратив два кореня з від'ємною дійсною частиною і перетворився в многочлен, який має один корінь з від'ємною дійсною частиною. Отже, в області над гіперболою було три корені з від'ємною дійсною частиною (мал. 8.9.). Для перевірки можна взяти точку $\xi=\eta=3$, в якій многочлен набуває вигляду

$$z^3+3z^2+3z+1$$

і має трьохкратний корінь $z=-1$.■

Отже, для побудови D-областей діємо наступним чином:

1. В многочлені $f(z,\ \xi,\ \eta)$ покладаємо $z=iy$, розділюємо дійсну і уявну частини і прирівнюємо їх нулю:

$$\begin{cases}\xi u_1(y)+\eta u_2(y)+u_3(y)=0,\\ \xi \upsilon_1(y)+\eta \upsilon_2(y)+\upsilon_3(y)=0.\end{cases} \tag{8.7}$$

Розв'язуючи (8.7) відносно ξ і η, одержуємо

$$\begin{cases}\xi=\xi(y),\\ \eta=\eta(y)\end{cases}$$

– параметричні рівняння лінії L.

2. Будуємо криву L на площині параметрів, змінюючи y в межах від $-\infty$ до $+\infty$, причому якщо в рівняннях (8.7) ξ – перша за порядком написання змінна, а η – друга, то при побудові кривої L система координат $\xi O\eta$ повинна бути правою.

Якщо при деякому значенні y визначник системи (8.7) і визначники

$$\Delta_\xi=\begin{vmatrix}-u_3 & u_2\\ -v_3 & v_2\end{vmatrix} \quad і \quad \Delta_\eta=\begin{vmatrix}u_1 & -u_3\\ v_1 & -v_3\end{vmatrix}$$

перетворюються в нуль, то при цьому значенні y одне з рівнянь (8.7) є наслідком другого, і для цього значення y одержуємо в площині $\xi O\eta$ не точку, а пряму лінію (особлива або виняткова пряма). Її ми також включаємо в межу D-розбиття.

Якщо коефіцієнт при старшому члені характеристичного рівняння залежить від параметрів ξ і η, то, прирівнюючи цей коефіцієнт нулю, одержуємо рівняння ще однієї особливої прямої, яка відповідає значенню $y=\infty$.

Якщо, нарешті, визначник системи (8.7) $\Delta\equiv 0$, то межею D-розбиття служать тільки особливі прямі.

3. Виділяємо зв'язні області, на які L розбиває площину параметрів. Це і будуть області $D(k,\ n-k)$ $(0\le k\le n)$.

4. Визначаємо характер цих областей, тобто знаходимо k і n –k. Для цього вибираємо в кожній з областей $D(k,\ n-k)$ по одній точці $(\xi_0,\ \eta_0)$ і досліджуємо одержаний многочлен $f(z,\ \xi_0,\ \eta_0)$ з числовими коефіцієнтами на стійкість за допомогою викладених вище критеріїв стійкості Рауса – Гурвіца або Михайлова (див. розділи 6 і 7).

Вправи.

Побудувати D-області для наступних многочленів.

8.1. $z^3+\xi z^2+\eta z+6$.

8.2. $z^4+\xi z^3+\eta z^2+4z+1$.

8.3. $z^3+\xi z^2+11z+\eta$.

8.4. $z^3+\xi(z^2+2)+\eta z-4$.

8.5. $z^4+2z^3+\xi z^2+z+\eta$.

8.6. $z^3+3z^2+\xi z+\eta$.

8.7. $z^3+\xi z^2+\eta(z+1)+1$.

8.8 $z^3+\eta z^2+\xi z+6$.

8.9. $z^3+2z^2+\xi(z-1)+\eta$.

8.10. $z^3+\xi(z^2+z)+z+2\eta$.

8.11. $\xi z^3+3z^2+\eta z+1$.

8.12. $\xi(z^3+z^2)+\eta(z^2+1)+2z$.

8.13. $\xi(z^3-z)+\eta(z^2+z-1)+1$.

9. Стійкість розв'язків різницевих рівнянь

9.1. Розв'язок однорідних лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Нехай маємо різницеве рівняння порядку k:

$$f(n+k)+a_1 f(n+k-1)+\ldots+a_k f(n)=0, \tag{9.1}$$

де $a_k \neq 0$; f(n) – шукана функція цілочислового аргументу; a_1, ..., a_k – дійсні сталі.

Для знаходження нетривіальних (ненульових) розв'язків рівняння (9.1) складаємо характеристичне рівняння:

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + ... + a_{k-1}\lambda + a_k = 0. \quad (9.2)$$

Нехай λ_1, λ_2, ..., λ_k – корені рівняння (9.2).

Можливі наступні випадки:

1) λ_1, λ_2, ..., λ_k – дійсні і відмінні.

Загальним розв'язком рівняння (9.1) буде

$$f(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + ... + C_k\lambda_k^n, \quad (9.3)$$

де C_1, C_2, ..., C_k – довільні сталі, які можуть бути визначені, якщо задані початкові умови

$$f(0) = f_0,\ f(1) = f_1,\ ...,\ f(k-1) = f_{k-1}.$$

2) Корені характеристичного рівняння дійсні, але серед них є кратні. Нехай, наприклад, $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_j = \widetilde{\lambda}$, тобто $\widetilde{\lambda}$ є j-кратним коренем рівняння (9.2), а всі решта $k - j$ коренів відмінні.

Загальним розв'язком рівняння (9.1) буде

$$f(n) = C_1\widetilde{\lambda}^n + C_2 n\widetilde{\lambda}^n + ... + C_j n^{j-1}\widetilde{\lambda}^n + C_{j+1}\lambda_{j+1}^n + ... + C_k\lambda_k^n. \quad (9.4)$$

3) Серед коренів характеристичного рівняння (9.2) є прості комплексні корені. Нехай, наприклад, для визначеності

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$
$$\lambda_3 = \gamma + i\delta, \quad \lambda_4 = \gamma - i\delta,$$

решта коренів дійсні і відмінні.

Загальний розв'язок (9.1) має тоді вигляд

$$f(n) = C_1|\lambda_1|^n \cos(n\arg\lambda_1) + C_2|\lambda_1|^n \sin(n\arg\lambda_1) +$$
$$+ C_3|\lambda_3|^n \cos(n\arg\lambda_3) + C_4|\lambda_3|^n \sin(n\arg\lambda_3) + C_5\lambda_5^n + ... + C_k\lambda_k^n. \quad (9.5)$$

4) У випадку, якщо $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ є j-кратним коренем рівняння (9.2) $\left(j \le \frac{k}{2}\right)$, то $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ також буде j-кратним коренем, і загальний розв'язок (9.1) має вигляд

$$f(n) = \left(C_1 + C_2 n + ... + C_j n^{j-1}\right)|\lambda_1|^n \cos(n\arg\lambda_1) +$$
$$+ \left(C_{j+1} + C_{j+2}n + ... + C_{2j}n^{j-1}\right)|\lambda_1|^n \sin(n\arg\lambda_1) +$$
$$+ C_{2j+1}\lambda_{2j+1}^n + ... + C_k\lambda_k^n. \quad (9.6)$$

Зауваження. Корінь $\lambda = 0$ відповідає тривіальному (нульовому) розв'язку $f(n) \equiv 0$.

Приклад 9.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$f(n+2) + 4f(n+1) + f(n) = 0.$$

Розв'язок. Складаємо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0.$$

Його корені $\lambda_1 = -2 - \sqrt{3}$, $\lambda_2 = -2 + \sqrt{3}$ відмінні і дійсні, отже,

$$f(n) = C_1\left(-2-\sqrt{3}\right)^n + C_2\left(-2+\sqrt{3}\right)^n. ■$$

Приклад 9.2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = 0.$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0, \text{ або } (\lambda-1)^3 = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Загальним розв'язком буде

$$f(n) = \left(C_1 + C_2 n + C_3 n^2\right)\cdot 1^n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2. ■$$

Приклад 9.3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$f(n+2) - 2f(n+1) + 2f(n) = 0.$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

має прості комплексні корені

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i.$$

Знаходимо:

$$|1 \pm i| = \sqrt{2}, \qquad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$f(n) = C_1 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi}{4} + C_2 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4} = 2^{\frac{n}{2}}\left(C_1\cos\frac{n\pi}{4} + C_2\sin\frac{n\pi}{4}\right). ■$$

Приклад 9.4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$f(n+4) + 2f(n+3) + 4f(n+2) - 2f(n+1) - 5f(n) = 0.$$

Розв'язок. Складаємо характеристичне рівняння:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0.$$

Перепишемо його в вигляді

$$\left(\lambda^2 - 1\right)\left(\lambda^2 + 2\lambda + 5\right) = 0.$$

Коренями цього рівняння будуть

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -1 + 2i, \quad \lambda_4 = -1 - 2i.$$

Тут

$$|-1 \pm 2i| = \sqrt{5}, \quad \arg(-1+2i) = \pi - \mathrm{arctg}2.$$

Загальним розв'язком даного рівняння буде

$$f(n) = C_1 + C_2(-1)^n + [C_3\cos n(\pi - \mathrm{arctg}2) + C_4\sin n(\pi - \mathrm{arctg}2)]5^{\frac{n}{2}},$$

або

$$f(n) = C_1 + C_2(-1)^n + (-1)^n 5^{\frac{n}{2}}[C_3\cos(n\,\mathrm{arctg}2) - C_4\sin(n\,\mathrm{arctg}2)]. ■$$

9.2. Розв'язок неоднорідних лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Нехай маємо неоднорідне лінійне різницеве рівняння порядку k:

$$f(n+k)+a_1 f(n+k-1)+\ldots+a_k f(n)=g(n) \qquad (9.7)$$

зі сталими дійсними коефіцієнтами a_1, ..., a_k. Загальний розв'язок цього рівняння представляє собою суму загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і якого-небудь частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

1) Нехай права частина $g(n)$ рівняння (9.7) має вигляд

$$g(n)=r^n u(n),$$

де $u(n)$ – многочлен від n степеня m, а r – дійсне число.

Якщо r не є коренем характеристичного рівняння (9.2), то частинний розв'язок $\tilde f(n)$ шукається у вигляді

$$\tilde f(n)=r^n \tilde u(n),$$

де $\tilde u(n)$ – многочлен степеня m; якщо ж r є j-кратним коренем рівняння (9.2), то $\tilde u(n)$ – многочлен степеня $m+j$.

2) Якщо права частина $g(n)$ рівняння має вигляд

$$g(n)=u(n)\sin\alpha n \qquad \text{або} \qquad g(n)=u(n)\cos\alpha n,$$

то частинний розв'язок шукається у вигляді

$$\tilde f(n)=\tilde u(n)\sin\alpha n+\tilde{\tilde u}(n)\cos\alpha n.$$

3) Якщо $g(n)=u(n)\operatorname{sh}\alpha n$ або $g(n)=u(n)\operatorname{ch}\alpha n$, то частинний розв'язок шукається у вигляді

$$\tilde f(n)=\tilde u(n)\operatorname{sh}\alpha n+\tilde{\tilde u}(n)\operatorname{ch}\alpha n.$$

Тут і в п. 2) $\tilde u(n)$ і $\tilde{\tilde u}(n)$ – многочлени, степінь яких визначається за правилом, вказаним в п. 1).

Приклад 9.5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$f(n+2)-4f(n+1)+3f(n)=2^n(n+1). \qquad (9.8)$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння $\lambda^2-4\lambda+3=0$ має корені $\lambda_1=3$, $\lambda_2=1$. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$f(n)=C_1\cdot 3^n+C_2.$$

Оскільки число 2 не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\tilde f(n)=2^n(An+B), \qquad (9.9)$$

де A і B – невизначені коефіцієнти. Підставляємо (9.9) в (9.8), одержимо:

$$2^{n+2}(An+2A+B)-4\cdot 2^{n+1}(An+A+B)+3\cdot 2^n(An+B)=2^n(n+1),$$

або

$$4(An+2A+B)-8(An+A+B)+3(An+B)=n+1.$$

Звідси знаходимо

$$4A-8A+3A=1,$$

$$8A+4B-8A-8B+3B=1,$$

так що $A=-1$, $B=-1$. Таким чином, частинний розв'язок даного рівняння:

$$\tilde f(n)=-2^n(n+1);$$

загальний розв'язок:

$$f(n)=C_1\cdot 3^n+C_2-2^n(n+1).\blacksquare$$

9.3. Стійкість розв'язків різницевих рівнянь. Розв'язок $f^*(n)$ різницевого рівняння порядку k, який задовольняє початкові умови

$$f^*(0)=f_0^*,\quad f^*(1)=f_1^*,\quad \ldots,\quad f^*(k-1)=f_{k-1}^*,$$

називається *стійким*, якщо для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta(\varepsilon)>0$ таке, що для будь-якого розв'язку f(n) рівняння (9.1), який задовольняє початкові умови

$$f(0)=f_0,\quad f(1)=f_1,\quad \ldots,\quad f(k-1)=f_{k-1},$$

із сукупності нерівностей

$$|f_0-f_0^*|<\delta,\quad |f_1-f_1^*|<\delta,\quad \ldots,\quad |f_{k-1}-f_{k-1}^*|<\delta$$

випливає нерівність $|f(n)-f^*(n)|<\varepsilon$ при будь-якому $n\ge 0$.

Якщо при як завгодно малому $\delta(\varepsilon)>0$ нерівність $|f(n)-f^*(n)|<\varepsilon$ не виконується для будь-якого розв'язку f(n), то розв'язок $f^*(n)$ називається *нестійким*.

Якщо крім виконання нерівності $|f(n)-f^*(n)|<\varepsilon$ виконується також умова

$$\lim_{n\to\infty}|f(n)-f^*(n)|=0,$$

то розв'язок $f^*(n)$ називається *асимптотично стійким*.

Дослідження на стійкість розв'язку $f^*(n)$ неоднорідного лінійного різницевого рівняння

$$f(n+k)+a_1 f(n+k-1)+\ldots a_k f(n)=g(n)$$

за допомогою заміни $\varphi(n)=f(n)-f^*(n)$ зводиться до дослідження стійкості нульового (тривіального) розв'язку однорідного рівняння

$$\varphi(n+k)+a_1\varphi(n+k-1)+\ldots+a_k\varphi(n)=0.$$

В подальшому ми обмежимось дослідженням стійкості тільки тривіальних розв'язків однорідних рівнянь.

Приклад 9.6. Виходячи з означення стійкості різницевого рівняння, дослідити на стійкість розв'язок рівняння

$$2f(n+2)-2f(n+1)+f(n)=0, \qquad (9.10)$$

який задовольняє початкові умови f(0) = 0, f(1) = 0.

Розв'язок. Розв'язок даного рівняння, який задовольняє початкові умови f(0) = 0, f(1) = 0, є

$$f(n)\equiv 0,$$

оскільки з (9.10)

$$f(n+2)=f(n+1)-\frac{1}{2}f(n).$$

Будь-який розв'язок цього рівняння, який задовольняє умови $f(0)=f_0$, $f(1)=f_1$, має вигляд

$$f^*(n)=\frac{1}{2^{n/2}}\left[f_0\cos\frac{n\pi}{4}+(f_1-f_0)\sin\frac{n\pi}{4}\right].$$

Візьмемо довільне $\varepsilon>0$ і покажемо, що існує $\delta(\varepsilon)>0$ таке, що при $|f_0-0|<\delta$ і $|f_1-0|<\delta$ має місце нерівність

$$\left|0-f^*(n)\right|=\frac{1}{2^{n/2}}\left|f_0\cos\frac{n\pi}{4}+(f_1-f_0)\sin\frac{n\pi}{4}\right|<\varepsilon$$

для всіх $n\ge 0$. Це і буде означати згідно з означенням, що нульовий розв'язок $f^*(n)\equiv 0$ стійкий.

Очевидно, що

$$\frac{\left|f_0\cos\frac{n\pi}{4}+(f_1-f_0)\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{2^{n/2}}\le\frac{|f_0|+|f_1-f_0|}{2^{n/2}}\le$$

$$\le|f_0|+|f_1-f_0|\le|f_0|+|f_1|+|f_0|\le 2(|f_0|+|f_1|)$$

для всіх $n\ge 0$. Тому, якщо $|f_0|+|f_1|<\frac{\varepsilon}{2}$, то і подавно $\left|0-f^*(n)\right|<\varepsilon$ для всіх $n\ge 0$. Отже, якщо, наприклад, взяти $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{4}$, то при $|f_0|<\delta$ і $|f_1|<\delta$ буде виконуватись нерівність $\left|0-f^*(n)\right|<\varepsilon$ для всіх $n\ge 0$, так що нульовий розв'язок даного рівняння стійкий. Ця стійкість асимптотична, оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left[0-f^*(n)\right]=-\lim_{n\to\infty}\frac{f_0\cos\frac{n\pi}{4}+(f_1-f_0)\sin\frac{n\pi}{4}}{2^{n/2}}=0.\blacksquare$$

Для дослідження на стійкість нульового розв'язку $f(n)\equiv 0$ рівняння (9.1) користуються наступним загальним правилом

1. Якщо всі корені характеристичного рівняння (9.2) за модулем менші від одиниці, то розв'язок $f(n)\equiv 0$ рівняння (9.1) асимптотично стійкий.
2. Якщо принаймні один корінь характеристичного рівняння за модулем більший від одиниці, то розв'язок $f(n)\equiv 0$ нестійкий.
3. Якщо характеристичне рівняння має прості корені з модулями, які дорівнюють одиниці, а решта коренів, якщо вони є, за модулем менші від одиниці, то розв'язок $f(n)\equiv 0$ стійкий, але не асимптотично.
4. Якщо характеристичне рівняння має принаймні один кратний корінь з модулем, який дорівнює одиниці, то розв'язок $f(n)\equiv 0$ нестійкий.

Вказане правило зводить питання про стійкість нульового розв'язку рівняння (9.1) до з'ясування того, якими є модулі коренів характеристичного рівняння (9.2).

Приклад 9.7. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок $f(n)\equiv 0$ рівняння

$$2f(n+2)-2f(n+1)+f(n)=0.$$

Розв'язок. Складаємо характеристичне рівняння:

$$2\lambda^2-2\lambda+1=0.$$

Його корені $\lambda_{1,2}=\frac{1\pm i}{2}$. Маємо:

$$\left|\lambda_{1,2}\right|=\left|\frac{1\pm i}{2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}<1.$$

Отже, розв'язок $f(n)\equiv 0$ цього рівняння асимптотично стійкий.■

Приклад 9.8. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівняння

$$f(n+2)-2f(n+1)+5f(n)=0.$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння:

$$\lambda^2-2\lambda+5=0$$

має корені

$$\lambda_1=1+2i,\ \lambda_2=1-2i.$$

Маємо:

$$|\lambda_1|=|\lambda_2|=|1\pm 2i|=\sqrt{5}>1.$$

Обидва корені за модулем більші від одиниці, отже, розв'язок $f(n)\equiv 0$ нестійкий.■

Відомо, що функція

$$\lambda=\frac{w+1}{w-1}$$

відображає внутрішність одиничного круга площини λ на ліву півплощину площини w. Кореням характеристичного рівняння (9.2), які лежать всередині одиничного круга $|\lambda|<1$ (тобто за модулем меншим від одиниці), будуть відповідати корені перетвореного рівняння

$$(w+1)^k+a_1(w+1)^{k-1}(w-1)+\ldots+a_k(w-1)^k=0,$$

або

$$b_0\omega^k+b_1\omega^{k-1}+\ldots+b_n=0, \tag{9.11}$$

які лежать в лівій півплощині площини w.

Питання про розміщення коренів рівняння (9.11) може бути розв'язане за допомогою критерію Рауса – Гурвіца або критерію Михайлова.

Приклад 9.9. Знайти необхідні й достатні умови того, що корені характеристичного рівняння

$$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0 \quad (9.12)$$

знаходяться в одиничному крузі $|\lambda|<1$.

Розв'язок. Покладемо $\lambda=\frac{w+1}{w-1}$. Тоді рівняння (9.12) набуває вигляду

$$(w+1)^2+a_1(w+1)(w-1)+a_2(w-1)^2=0,$$

або

$$(1+a_1+a_2)w^2+(2-2a_2)w+(1-a_2+a_2)=0. \tag{9.13}$$

До многочлена (9.13) застосовуємо критерій Рауса – Гурвіца. Матриця Гурвіца має вигляд

$$\begin{pmatrix} 2-2a_2 & 1+a_1+a_2 \\ 0 & 1-a_1+a_2 \end{pmatrix}.$$

Головні діагональні мінори матриці Гурвіца:

$$\Delta_1 = 2-2a_2, \qquad \Delta_2 = (2-2a_2)(1-a_1+a_2).$$

В силу вказаного критерію повинно бути

$$1+a_1+a_2>0, \qquad 1-a_2>0, \qquad 1-a_1+a_2>0. \tag{9.14}$$

Отже, характеристичне рівняння (9.12) має в крузі $|\lambda|<1$ корені тоді й тільки тоді, коли виконуються умови (9.14).■

Наслідок. *Лінійне однорідне різницеве рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами*

$$f(n+2)+a_1 f(n+1)+a_2 f(n)=0$$

має асимптотично стійкий нульовий розв'язок $f(n)\equiv 0$ тоді й тільки тоді, коли його коефіцієнти задовольняють умови (9.14).

Приклад 9.10. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок $f(n)\equiv 0$ рівняння

$$2f(n+2)-2f(n+1)+f(n)=0.$$

Розв'язок. Перепишемо це рівняння у вигляді

$$f(n+2)-f(n+1)+\frac{1}{2}f(n)=0.$$

Тут $a_1=-1$, $a_2=0{,}5$. Тому

$$1+a_1+a_2=0{,}5>0,$$
$$1-a_2=0{,}5>0,$$
$$1-a_1+a_2=2{,}5>0.$$

Умови (9.14) критерію Рауса – Гурвіца виконані. Отже, розв'язок $f(n)\equiv 0$ асимптотично стійкий.■

Приклад 9.11. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівняння

$$f(n+2)+f(n+1)+2f(n)=0.$$

Розв'язок. Тут $a_1=1$, $a_2=2$. Маємо:

$$1+a_1+a_2=4>0,$$
$$1-a_2=-1<0.$$

Нульовий розв'язок нестійкий.■

Вправи.

Розв'язати однорідні різницеві рівняння.

9.1. $3f(n+2)-2f(n+1)-8f(n)=0$.

9.2. $f(n+3)+3f(n+2)+3f(n+1)+f(n)=0$; $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f(2)=3$.

9.3. $4f(n+2)-8f(n+1)+5f(n)=0$.

9.4. $f(n+3)-8f(n)=0$.

9.5. $f(n+4)-f(n+2)+2f(n+1)+2f(n)=0$.

Знайти загальний розв'язок неоднорідних лінійних різницевих рівнянь.

9.6. $f(n+2)-2f(n+1)-f(n)=n$.

9.7. $f(n+2)+2f(n+1)+f(n)=3^n\cdot 32$, $f(0)=0$, $f(1)=0$.

9.8. $f(n+2)+f(n)=\sin 2n$, $f(0)=0$, $f(1)=1$.

9.9. $f(n+3)-3f(n+2)+3f(n+1)-f(n)=e^n$.

9.5. $f(n+3)+8f(n)=2^n$.

Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок різницевого рівняння, виходячи з означення стійкості.

9.6. $8f(n+2)+2f(n+1)-f(n)=0$.

9.7. $f(n+2)+f(n)=0$.

9.8. $4f(n+2)-4f(n+1)+f(n)=0$.

9.9. $f(n+2)-6f(n+1)-7f(n)=0$.

Для різницевого рівняння знайти необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості тривіального розв'язку.

9.10. $a_0f(n+3)+a_1f(n+2)+a_2f(n+1)+a_3f(n)=0$.

9.11. $f(n+4)+pf(n+2)+qf(n)=0$.

9.12. $f(n+5)+pf(n)=0$.

9.13. $af(n+5)-bf(n)=0$, $a\neq 0$, $b>0$.

Використовуючи критерій Рауса – Гурвіца, дослідити на стійкість тривіальний розв'язок різницевого рівняння.

9.14. $11f(n+4)-8f(n+3)+8f(n+2)-4f(n+1)+f(n)=0$.

9.15. $f(n+4)+f(n+3)+f(n)=0$.

9.16. $12f(n+4)-3f(n+3)+2f(n+2)+2f(n+1)-2f(n)=0$.

9.17. $7f(n+4)-4f(n+3)+30f(n+2)-4f(n+1)+3f(n)=0$.

9.18. $f(n+5)-f(n+1)+f(n)=0$.

9.19. $f(n+5)-f(n+2)-f(n)=0$.

9.20. $f(n+5)+f(n+1)-f(n)=0$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967.
2. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970.
3. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: Иностранная литература, 1958.
4. Головач Г.П., Калайда О.Ф. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь. -- Київ: Техніка, 1997.
5. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.
6. Дубошин Н.Г. Основы теории устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1952.
7. Зубов В.И. Методы А.М. Ляпунова и их применение. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1957.
8. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959.
9. Ла-Салль Ж. Лефшетц С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М.: Мир, 1964.
10. Ляпунов А.М. Общая задача устойчивости движения. – М. - Л.: Гостехиздат, 1950.
11. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1952.
12. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1967.
13. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М., 1949.
14. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1964.
15. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1965.
16. Самойленко А. М., Кривошия С.А., Перестюк М.О., Диференціальні рівняння в задачах. – Київ: Либідь, 2003.
17. Самойленко А. М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – Київ: Либідь, 2003.
18. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1957.
19. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965.
20. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1964.
21. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. – М.: Гостехиздат, 1955.
22. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965.
23. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения. – М.: Гостехиздат, 1957.

ЗМІСТ

Передмова........3
1. Поняття про стійкість розв'язку системи диференціальних рівнянь........5
2. Найпростіші типи точок спокою........7
3. Другий метод Ляпунова........13
4. Дослідження на стійкість за першим наближенням........17
5. Асимптотична стійкість у цілому. Стійкість за Лагранжем........22
6. Критерій Рауса – Гурвіца........25
7. Геометричний критерій стійкості (критерій Михайлова)........29
8. D-розбиття........32
9. Стійкість розв'язків різницевих рівнянь........39
9.1. Розв'язок однорідних лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами........39
9.2. Розв'язок неоднорідних лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами........42
9.3. Стійкість розв'язків різницевих рівнянь........43
Рекомендована література........48