

Практичне заняття «Обчислення границь функцій». Частина 2

Таблиця основних формул, пов'язаних з обчисленням границь

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k. \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e. \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}. \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}. \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1. \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1. \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1. \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k. \quad (12)$$

Обчислити наступні границі.

Приклад 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Приклад 2.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Приклад 3.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x+1}} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \left\| \begin{array}{l} x = t^3, \\ x \rightarrow -1, t \rightarrow -1 \end{array} \right\| = \\ &= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t+1}{\sqrt{t^3+1}} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t+1}{\sqrt{(t+1)(t^2-t+1)}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t^2-t+1}} = 0.\end{aligned}$$

Приклад 4.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\frac{\pi}{2} - x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \left\| \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x = t, x = \frac{\pi}{2} - t, \\ x \rightarrow \frac{\pi}{2}, t \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sin \left(t + \frac{\pi}{2} \right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{t} = \\ &= -2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{t}{2}}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \sin \frac{t}{2} = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.\end{aligned}$$

Приклад 5.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin a}{\cos a}}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x - a)}{\cos x \cdot \cos a \cdot (x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\cos x \cdot \cos a} \times \\ &\times \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x - a)}{x - a} = \frac{1}{\cos^2 a} \cdot 1 = \frac{1}{\cos^2 a}.\end{aligned}$$

Приклад 6.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \left\| \begin{array}{l} x-1=t, \\ x=t+1, \\ x \rightarrow 1, t \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t}{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{2} \right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\operatorname{tg} \frac{\pi t}{2}} = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi t}{2}}{\frac{\pi t}{2}}} = \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Приклад 7.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \left\| \begin{array}{l} \sin x = t, \\ x \rightarrow \frac{\pi}{6}, t \rightarrow \frac{1}{2} \end{array} \right\| = \\ &= \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2t^2 + t - 1}{2t^2 - 3t + 1} = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2(t+1)\left(t - \frac{1}{2}\right)}{2\left(t - \frac{1}{2}\right)(t-1)} = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{t+1}{t-1} = -3.\end{aligned}$$

Приклад 8.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} &= (1)^\infty = \left\| \begin{array}{l} x - \frac{\pi}{2} = t, x = t + \frac{\pi}{2}, \\ x \rightarrow \frac{\pi}{2}, t \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\sin \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \right)^{\operatorname{tg} \left(t + \frac{\pi}{2} \right)} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} (\cos t)^{-\operatorname{ctg} t} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + (\cos t - 1) \right)^{\frac{1}{\cos t - 1} \cdot (\cos t - 1) \cdot \left(-\frac{\cos t}{\sin t} \right)} = \\
 &= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{\sin t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \cos t} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} \cdot 1} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t}{2}} \cdot 1} = \\
 &= e^0 = 1.
 \end{aligned}$$

Приклад 9.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} &= \left\| \begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = t, x = t + \frac{\pi}{4}, \\ x \rightarrow \frac{\pi}{4}, t \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \left(t + \frac{\pi}{4} \right) - 1}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{tg} t + 1}{1 - \operatorname{tg} t} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{tg} t}{t(1 - \operatorname{tg} t)} = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \operatorname{tg} t} = \\ &= 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.\end{aligned}$$

Приклад 10.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{x \sin x} \cdot \frac{x \sin x}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{x \sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Приклад 11.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax + b} - \sqrt{x^2 + cx + d} \right) &= (\infty - \infty) = \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + ax + b} - \sqrt{x^2 + cx + d} \right) \left(\sqrt{x^2 + ax + b} + \sqrt{x^2 + cx + d} \right)}{\sqrt{x^2 + ax + b} + \sqrt{x^2 + cx + d}} = \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a - c)x + (b - d)}{\sqrt{x^2 + ax + b} + \sqrt{x^2 + cx + d}} = \frac{a - c}{2}.\end{aligned}$$

Приклад 12.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} \right) &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \times \\&\times \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \cdot \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} = \\&= (\text{нескінченно мала} \times \text{обмежена величина}) = 0.\end{aligned}$$

Приклад 13.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 7^x}{6^x - 5^x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(8^x - 1) - (7^x - 1)}{(6^x - 1) - (5^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{8^x - 1}{x} - \frac{7^x - 1}{x}}{\frac{6^x - 1}{x} - \frac{5^x - 1}{x}} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{x}} = \frac{\ln 8 - \ln 7}{\ln 6 - \ln 5}.\end{aligned}$$

Приклад 14.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x-2} \right)^x &= (1)^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{x+8}{x-2} - 1 \right) \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{10}{x-2} \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{10}{x-2} \right)^{\frac{x-2}{10} \cdot \frac{10}{x-2} \cdot x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x}{x-2}} = e^{10}.\end{aligned}$$

Приклад 15.

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow 0} (2 - \cos \alpha)^{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} &= (1^\infty) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(1 + (1 - \cos \alpha) \right)^{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(1 + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right)^{\frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha}} = e^{2 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2} / \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha / \alpha} \right)^2} = e^{2 \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{e}.\end{aligned}$$

Приклад 16.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x-2}} &= (1^\infty) = \left\| \begin{array}{l} x-2=t, x=t+2, \\ x \rightarrow 2, t \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t+2}{2} \right)^{\frac{1}{t}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{t}{2} \right)^{\frac{2}{t} \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{t}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.\end{aligned}$$

Приклад 17.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} = \left\| \begin{array}{l} t = x \ln x, \\ x \rightarrow 1, t \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

Приклад 18.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Приклад 19.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x - 1} &= \left\| \begin{array}{l} \sqrt[4]{x} = t, x = t^4, \\ x \rightarrow 1, t \rightarrow 1 \end{array} \right\| = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{t^4-1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Таблиця еквівалентних нескінченно малих

1. $\sin \alpha \sim \alpha$	6. $e^\alpha - 1 \sim \alpha$
2. $\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$	7. $a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a$
3. $\arcsin \alpha \sim \alpha$	8. $\ln(1 + \alpha) \sim \alpha$
4. $\operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha$	9. $\log_a(1 + \alpha) \sim \frac{\alpha}{\ln a}$
5. $1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}$	10. $(1 + \alpha)^k - 1 \sim k\alpha$

Застосовуючи еквівалентні нескінченно малі, обчислити наступні границі.

Приклад 20.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\sin 4x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left\| \begin{array}{l} \arcsin 2x \sim 2x, \\ \sin 4x \sim 4x, \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 21.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1 + 2x)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left\| \begin{array}{l} \sin 3x \sim 3x, \\ \ln(1 + 2x) \sim 2x, \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2}{4x^2} = \frac{9}{4}.$$

Приклад 22.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 - 4x)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left\| \begin{array}{l} e^{2x} - 1 \sim 2x, \\ \ln(1 - 4x) \sim (-4x), \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-4x} = -\frac{1}{2}.$$

Приклад 23.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left\| \begin{array}{l} (1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{x}{3}, \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{3}}{x} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 24.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}^2(x-1)}{1 - \cos(x-1)} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \left\| \begin{array}{l} x-1=t, \\ x \rightarrow 1, t \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1 - \cos t} = \\ &= \left\| \begin{array}{l} \operatorname{tg} t \sim t, \\ 1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2} \end{array} \right\| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{\cancel{t^2} / 2} = 2. \end{aligned}$$

Приклад 25.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x \cdot x^3} = \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (1 - \cos x)}{x^3} = \left\| \begin{array}{l} \sin x \sim x. \\ 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right\| = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{2}}{x^3} = \\&= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Приклад 26.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + mx)}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left\| \begin{array}{l} \ln(1 + mx) \sim mx, \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x} = m.$$

Приклад 27.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 2) - \ln 2}{x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x + 2}{2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x} = \\&= \left\| \begin{array}{l} \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) \sim \frac{x}{2}, \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}/2}{x} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Приклад 28.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+(\cos x - 1))}{\ln(1+x^2)} = \left\| \begin{array}{l} 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \\ \ln(1+x^2) \sim x^2, \\ \ln\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \sim -\frac{x^2}{2} \end{array} \right\| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cancel{x^2}/2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Приклад 29.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln x} = \left\| \begin{array}{l} x - 1 = t, \\ x = t + 1, \\ x \rightarrow 1, t \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(e^t - 1)}{\ln(1+t)} =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} e^t - 1 \sim t, \\ \ln(1+t) \sim t, \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Приклад 30.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3 - 1}}{(1+x)\sqrt[3]{(1+x)^2} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{3}{5}} - 1}{(1+x)^{\frac{5}{3}} - 1} = \left\| \begin{aligned} (1+x)^{\frac{3}{5}} - 1 &\sim \frac{3}{5}x, \\ (1+x)^{\frac{5}{3}} - 1 &\sim \frac{5}{3}x \end{aligned} \right\| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{5} \cdot x}{\frac{5}{3} \cdot x} = \frac{9}{25}.\end{aligned}$$

Приклад 31.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(5^z - 1)(4^z - 1)}{(3^z - 1)(6^z - 1)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left\| \begin{aligned} a^z - 1 &\sim \ln a, \\ z &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\| = \frac{\ln 5 \cdot \ln 4}{\ln 3 \cdot \ln 6}.$$

Приклад 32.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x} - 2}{\sqrt[4]{16+5x} - 2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\left(1 + \frac{3x}{8} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right)}{2 \left(\left(1 + \frac{5x}{16} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right)} =$$
$$= \left\| \frac{(1+\alpha)^k - 1 \sim k\alpha,}{\alpha \rightarrow 0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{8}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{5x}{16}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{64}{5} = \frac{8}{5}.$$

Приклади для самостійної роботи

Обчислити границі.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}$. Відповідь: $-\frac{3}{2}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$. Відповідь: 4.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+1} - 1}$. Відповідь: 6.
4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}$. Відповідь: $\sqrt{2}$.

5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$. Відповідь: 0,5.

6. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha + 2h) - 2\sin(\alpha + h) + \sin \alpha}{h^2}$. Відповідь: $-\sin \alpha$.

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$. Відповідь: 3.

8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{7+2x-x^2}}{x^2 - 2x}$. Відповідь: $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{e^x - 1}$. Відповідь: $\ln 5$.

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+4x)}$. Відповідь: 0,5.

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x^2 + 1}$. Відповідь: e .

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x+b} \right)^{x+c}$. Відповідь: e^{a-b} .

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 4^x}{x^2 + x}$. Відповідь: $\ln \frac{5}{4}$.

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{\ln(1+x)}$. Відповідь: 2.