
§3.5. Неперервність функції. Властивості неперервних функцій. Розриви функцій.

Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* $x = a$, якщо:

1) вона визначена в цій точці;

2) існує $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$;

3) ця границя дорівнює значенню функції в точці $x = a$, тобто

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Якщо хоч би одна із цих умов не виконується, то функція називається *розривною в точці* $x = a$, а саме точка $x = a$ називається *точкою розриву*.

Функція $y = f(x)$ називається *перервною в точці* $x = x_0$, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргументу $x - x_0 = \Delta x$, відповідає нескінченно малий приріст функції $y - y_0 = \Delta y$, тобто якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta y = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x - x_0) - f(x_0)) = 0.$$

Функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку (a, b) , якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0 *справа* (*зліва*), якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \quad (\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)).$$

Функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, якщо вона неперервна на проміжку (a, b) і неперервна в точці $x = a$ справа і в точці $x = b$ зліва.

Усі елементарні функції неперервні на інтервалах визначеності.

Функція $y = f(x)$, яка не є неперервною в точці x_0 , називається *розривною в цій точці*.

Точка x_0 називається *точкою розриву першого роду* функції $y = f(x)$, якщо існують скінчені границі $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ і при цьому, якщо виконується хоча б одна з трьох умов:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) &\neq f(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) &\neq f(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) &\neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \end{aligned} \right\} \text{ неусувний розрив I-го роду}$$

4) $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$ — усувний розрив I-го роду.

Точка x_0 називається *точкою розриву другого роду функції* $y = f(x)$, якщо одна із границь $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ не існує або нескінченна.

Стрибком функції в точці розриву $x = x_0$ називається різниця її односторонніх границь $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$, якщо вони різні.

При знаходженні точок розриву функції можна керуватися наступними положеннями:

1) елементарна функція може мати розрив тільки в окремих точках, але не може бути розривною у всіх точках якого-небудь інтервалу;

2) елементарна функція може мати розрив лише в тій точці де вона не визначена, при умові, якщо вона буде визначена хоча би з однієї сторони від цієї точки в як завгодно близьких до неї точках;

3) неелементарна функція може мати розриви як в точках, де вона невизначена, так і в таких, де вона визначена, зокрема, якщо функція задана кількома різними аналітичними виразами (формулами) для різних інтервалів зміни аргументу, то вона може мати розриви в тих точках, де змінюється її аналітичний вираз.

3.5.1. Розв'язання прикладів

Приклад 3.119. Знайти точки розриву функції $y = \frac{1}{x^2 - 4}$.

Розв'язок. Функція $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ визначена при всіх значеннях x ,

крім $x = \pm 2$. Ця функція елементарна, через це вона неперервна на

всій області свого визначення: $-\infty < x < -2$, $-2 < x < 2$, $2 < x < +\infty$. Вона не визначена в точках $x_1 = 2$ і $x_2 = -2$, але визначена поблизу цих точок. Задана функція в точках x_1 і x_2 має розриви. Знайдемо односторонні границі заданої функції при прямуванні аргументу x до точок розриву зліва і справа.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -2-0} y = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty,$$

так як при $x \rightarrow -2-0$ величина $x^2 - 4$ є додатною нескінченно малою величиною, а обернена її величина $\frac{1}{x^2 - 4}$ є додатною нескінченно великою;

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} y = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty,$$

так як при $x \rightarrow -2+0$ величина $x^2 - 4$ є від'ємною нескінченно малою, а обернена її величина є від'ємною нескінченно великою.

Отже, в точці $x = -2$ функція має нескінчений розрив.

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2-0} y = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty,$$

так як при $x \rightarrow 2-0$ величина $x^2 - 4$ є від'ємною нескінченно малою величиною, а обернена її величина

$\frac{1}{x^2 - 4}$ є від'ємною нескінченно великою;

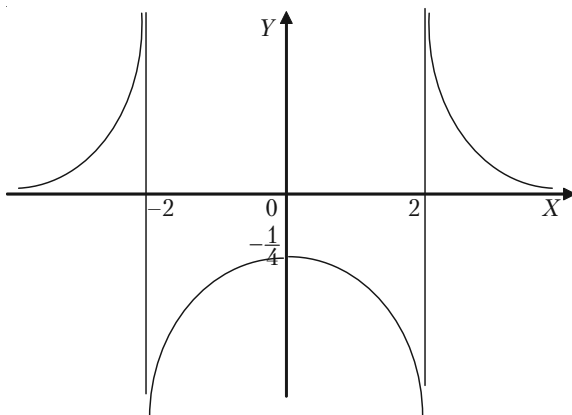


Рис. 3.34.

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} y = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty,$$

так як при $x \rightarrow 2+0$ величина $x^2 - 4$ є додатною нескінченно малою величиною, а обернена їй величина $\frac{1}{x^2 - 4}$ є додатною нескінченно великою.

Отже, в точці $x = 2$ функція має нескінченний розрив. Див. рис. 3.34.

Приклад 3.120. Знайти точки розриву функції $y = \frac{|x+1|}{x+1}x - 1$ і

стрибок функції в точці розриву.

Розв'язок. Задана функція визначена і неперервна на всій числовій осі крім точки $x = -1$. Із цього слідує, що в точці $x = -1$ функція має розрив.

Дослідимо цю точку розриву

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \left(\frac{|x+1|}{x+1} x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -1-0} \left(\frac{-(x+1)}{x+1} x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -1-0} (-x - 1) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \left(\frac{|x+1|}{x+1} x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \left(\frac{x+1}{x+1} x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -1+0} (x - 1) = -2.$$

Отже, односторонні границі функції в точці $x = -1$ існують, але не рівні між собою. В цій точці задана функція має розрив першого роду. Сстрибок функції дорівнює

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} y - \lim_{x \rightarrow -1-0} y = -2 - 0 = -2.$$

Графік функції складається із двох напівпрямих:

$$y = \begin{cases} -x - 1, & \text{при } x < -1 \\ x - 1, & \text{при } x > -1 \end{cases}.$$

Її графік зображено на рис. 3.35.

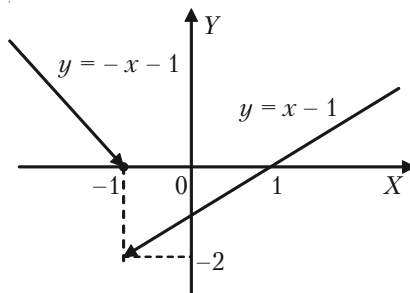


Рис. 3.35.

Приклад 3.121. Для заданої функції

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 4 - 2x, & \text{при } 1 < x < 2,5, \\ 2x - 7, & \text{при } 2,5 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

знайти точки розриву та стрибки функції в точках розриву, побудувати графік.

Розв'язок. Неелементарна функція $f(x)$ визначена для всіх значень $x \geq 0$. Вона може мати розрив в точках $x = 1$ і $x = 2,5$, де змінюється її аналітичний вираз. У всіх інших точках своєї області визначення $f(x)$ неперервна, так як кожна із формул, якими вона задана, визначає собою елементарну функцію, неперервну в своєму інтервалі зміни аргументу x .

Дослідимо точки $x = 1$ і $x = 2,5$:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} 2\sqrt{x} = 2; \\ \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+0} (4 - 2x) = 2. \end{aligned}$$

Згідно умови значення функції $f(x)$ в точці $x = 1$ визначається першою формулою $f(1) = 2\sqrt{1} = 2$. Отже, в точці $x = 1$ виконуються всі умови неперервності: функція визначена в околі точки $x = 1$ і $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1$, через це в точці $x = 1$ функція $f(x)$ неперервна.

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 2,5-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2,5-0} (4 - 2x) = -1; \\ \lim_{x \rightarrow 2,5+0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2,5+0} (2x - 7) = -2. \end{aligned}$$

Тут границі зліва та справа існують і скінченні, але не однакові, тобто не виконується умова неперервності. Через це в точці $x = 2,5$ функція має розрив I-го роду. Стрибок функції в точці розриву:

$$\lim_{x \rightarrow 2,5+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2,5-0} f(x) = -2 - (-1) = -1.$$

Див. рис. 3.36.

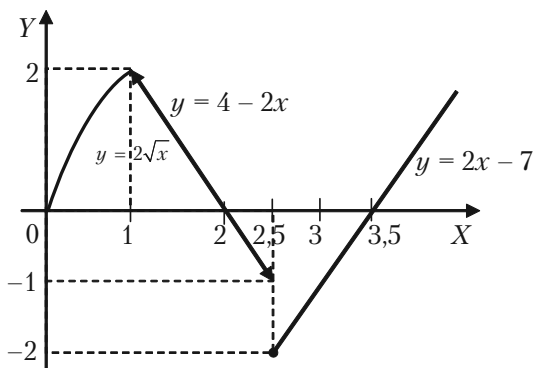


Рис. 3.36.

3.5.2. Приклади для самостійного розв'язку

3.122. Задана функція. Знайти її точки розриву, якщо вони існують, і стрибок функції в кожній точці розриву:

а) $y = \frac{x}{x^2 - 9}$;

б) $y = \frac{4}{x^2 - 2x + 1}$;

в) $y = x + \frac{x+2}{|x+2|}$;

г) $y = \frac{1}{x^3 - 3x^2 - 4x}$;

д) $y = e^{\frac{1}{x+1}}$;

ж) $y = \begin{cases} -x, & \text{при } x \leq -1, \\ \frac{2}{x-1}, & \text{при } x > -1. \end{cases}$