

Практичне заняття «Обчислення границь функцій з використанням еквівалентних нескінченних функцій».

Таблиця еквівалентних нескінченно малих

1. $\sin \alpha \sim \alpha$	6. $e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$
2. $\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$	7. $a^{\alpha} - 1 \sim \alpha \ln a$
3. $\arcsin \alpha \sim \alpha$	8. $\ln(1 + \alpha) \sim \alpha$
4. $\operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha$	9. $\log_a(1 + \alpha) \sim \frac{\alpha}{\ln a}$
5. $1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}$	10. $(1 + \alpha)^k - 1 \sim k\alpha$

Застосовуючи еквівалентні нескінченно малі, обчислити наступні границі.

Приклад 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\sin 4x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left\| \begin{array}{l} \arcsin 2x \sim 2x, \\ \sin 4x \sim 4x, \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1 + 2x)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left\| \begin{array}{l} \sin 3x \sim 3x, \\ \ln(1 + 2x) \sim 2x, \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x^2}{4x^2} = \frac{9}{4}.$$

Приклад 3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 - 4x)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left\| \begin{array}{l} e^{2x} - 1 \sim 2x, \\ \ln(1 - 4x) \sim (-4x), \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-4x} = -\frac{1}{2}.$$

Приклад 4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left\| \begin{array}{l} (1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{x}{3}, \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{3}}{x} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 5.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}^2(x-1)}{1 - \cos(x-1)} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \left\| \begin{array}{l} x-1 = t, \\ x \rightarrow 1, t \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1 - \cos t} = \\ &= \left\| \begin{array}{l} \operatorname{tg} t \sim t, \\ 1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2} \end{array} \right\| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{\cancel{t^2}/2} = 2. \end{aligned}$$

Приклад 6.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x \cdot x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (1 - \cos x)}{x^3} = \left\| \begin{array}{l} \sin x \sim x. \\ 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right\| = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{2}}{x^3} = \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Приклад 7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + mx)}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left\| \begin{array}{l} \ln(1 + mx) \sim mx, \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x} = m.$$

Приклад 8.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 2) - \ln 2}{x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x + 2}{2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x} = \\ &= \left\| \begin{array}{l} \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) \sim \frac{x}{2}, \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}/2}{x} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Приклад 9.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+(\cos x - 1))}{\ln(1+x^2)} = \left\| \begin{array}{l} 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \\ \ln(1+x^2) \sim x^2, \\ \ln\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \sim -\frac{x^2}{2} \end{array} \right\| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2/2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Приклад 10.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln x} = \left\| \begin{array}{l} x - 1 = t, \\ x = t + 1, \\ x \rightarrow 1, t \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(e^t - 1)}{\ln(1+t)} =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} e^t - 1 \sim t, \\ \ln(1+t) \sim t, \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right\| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Приклад 11.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{(1+x)\sqrt[3]{(1+x)^2} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{3}{5}} - 1}{(1+x)^{\frac{5}{3}} - 1} = \left\| \begin{aligned} (1+x)^{\frac{3}{5}} - 1 &\sim \frac{3}{5}x, \\ (1+x)^{\frac{5}{3}} - 1 &\sim \frac{5}{3}x \end{aligned} \right\| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{5} \cdot x}{\frac{5}{3} \cdot x} = \frac{9}{25}.\end{aligned}$$

Приклад 12.

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(5^z - 1)(4^z - 1)}{(3^z - 1)(6^z - 1)} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \left\| \begin{aligned} a^z - 1 &\sim z \ln a, \\ z &\rightarrow 0 \end{aligned} \right\| = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 \ln 5 \cdot \ln 4}{z^2 \ln 3 \cdot \ln 6} = \\ &= \frac{\ln 5 \cdot \ln 4}{\ln 3 \cdot \ln 6}.\end{aligned}$$

Приклад 13.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x} - 2}{\sqrt[4]{16+5x} - 2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\left(1 + \frac{3x}{8} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right)}{2 \left(\left(1 + \frac{5x}{16} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right)} =$$
$$= \left\| \frac{(1+\alpha)^k - 1 \sim k\alpha,}{\alpha \rightarrow 0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{8}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{5x}{16}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{64}{5} = \frac{8}{5}.$$

Приклади для самостійної роботи

Обчислити границі.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}$. Відповідь: $-\frac{3}{2}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$. Відповідь: 4.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+1} - 1}$. Відповідь: 6.
4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}$. Відповідь: $\sqrt{2}$.

5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$. Відповідь: 0,5.

6. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha + 2h) - 2\sin(\alpha + h) + \sin \alpha}{h^2}$. Відповідь: $-\sin \alpha$.

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$. Відповідь: 3.

8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{7+2x-x^2}}{x^2 - 2x}$. Відповідь: $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{e^x - 1}$. Відповідь: $\ln 5$.

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+4x)}$. Відповідь: 0,5.

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x^2 + 1}$. Відповідь: e .

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x+b} \right)^{x+c}$. Відповідь: e^{a-b} .

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 4^x}{x^2 + x}$. Відповідь: $\ln \frac{5}{4}$.

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{\ln(1+x)}$. Відповідь: 2.