Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет
Інженерний навчально-науковий інститут ім. Ю.М. Потебні

В. В. Хорошун

ПРИКЛАДНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Навчально-методичний посібник

для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності 051 «Економіка» освітньо-професійної програми «Інформаційна економіка»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
протокол № _ від __.__.2022 р.

Запоріжжя
2022

Хорошун В. В. Прикладні моделі економічних процесів : навчально-методичний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності 051 «Економіка» освітньо-професійної програми «Інформаційна економіка» Запоріжжя : ЗНУ, 2022. 150 с.

Навчально-методичний посібник призначено для студентів спеціальності 051 Економіка за освітньою програмою Інформаційна економіка, які вивчають курс «Прикладні моделі економічних процесів». Навчально-методичний посібник містять огляд основних теоретичних розділів дисципліни, контрольні запитання за кожною темою для самостійного засвоєння матеріалу, завдання до лабораторних робіт за темами кожного модуля, приклади тестових завдань, завдання до самостійної роботи, перелік питань, які виносяться на екзамен, а також критерії модульного оцінювання знань.

Укладач

Хорошун В. В., кандидат економічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційної економіки, підприємництва та фінансів Інженерного навчально-наукового інституту ім. Ю. М. Потебні ЗНУ.

Рецензент

Ажажа М. А., Доктор наук з державного управління, професор кафедри менеджменту організації та управління проектами Інженерного навчально-наукового інституту ім. Ю. М. Потебні ЗНУ.

Відповідальний за випуск

Шапуров О. О., доктор економічних наук, доцент, завідувач кафедри інформаційної економіки, підприємництва та фінансів Інженерного навчально-наукового інституту ім. Ю. М. Потебні ЗНУ.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Навчально-методичний посібник з дисципліни «Прикладні моделі економічних процесів» присвячено аналізу економіко-математичних методів і моделей динаміки розвитку економічних процесів. В ньому стисло висвітлені основні актуальні питання дослідження складних динамічних систем і процесів в економіці, загальні методи дослідження економічної динаміки, якісні методи аналізу поведінки динамічних соціально-економічних систем і процесів, методи управління динамічними економічними системами, основні лінійні та нелінійні моделі економічної динаміки, стохастичні моделі економічної динаміки, моделі економічних змін та їх аналіз.

Структура і зміст навчального посібника відповідає типовій навчальній програмі з дисципліни «Прикладні моделі економічних процесів», яка складена відповідно до Освітньо-професійної програми галузі знань *05 Соціальні та поведінкові науки*, спеціальності *051 Економіка*, другого (магістерського) освітньо-кваліфікаційного рівня, за освітньою програмою *Інформаційна економіка,* прийнятих у ЗНУ «Рекомендації щодо розробки та оформлення РНП дисципліни».

Навчальний матеріал у посібнику представлено *трьома заліковими модулями*, які є логічними завершеними частинами дисципліни і по закінченню яких проводяться *модульні контролі* знань студентів, що передбачають здачу комплексних тестів з усіх тем модулю. Для закріплення матеріалу подаються контрольні питання по кожній темі та завдання для самостійної роботи студентів за теоретичним матеріалом.

У першому модулі висвітлюються теоретичні основи дослідження динамічних систем і процесів в економіці та їх моделі, його можна умовно вважати теоретичною базою навчально-методичного посібника, яка охоплює основні поняття економічної динаміки, принципи моделювання економічних процесів, розглядаються основні лінійні динамічні моделі.

Другий модуль - нестійкість і нелінійність як джерело невизначеності економічних процесів – включає основні поняття рівноваги та нерівноваги, стійкості та нестійкості динамічних моделей економіки, розкриває особливості нелінійних динамічних моделей економічних систем.

У третьому модулі викладено основні матеріали щодо застосування динамічних моделей в економіці та соціальному розвитку, а саме розглянуто стохастичні моделі економічної динаміки, моделі економічних змін та їх аналіз.

У посібнику наведені методичні рекомендації для виконання лабораторних робіт за темами кожного модуля з прикладами виконання та варіантами для самостійного засвоєння завдань. У навчально-методичному посібнику подано тематику практичних занять по застосуванню методів та моделей економічної динаміки для розв‘язання конкретних економічних задач, наведені різноманітні вправи, запитання і завдання для самоконтролю.

ВСТУП

Економічна теорія перейшла у нову фазу свого розвитку. Це зумовлено багатьма факторами, передусім, ускладненням і глобалізацією світової економіки, проникненням в економічну науку методів нелінійної динаміки, теорії нечітких множин, появою нових комп‘ютерних технологій, що уможливлюють дослідження складних явищ і процесів, образно кажучи, на екрані дисплея.

Останні 40 років в економічній теорії домінувала лінійна парадигма, згідно з якою кожна дія викликає пропорційну реакцію. Але ринки рідко бувають настільки добре впорядкованими, а тому виникає нелінійна реакція на дію. Складовими нової нелінійної парадигми є новітні математичні інструменти – фрактальна геометрія, теорія хаосу, кліткові автомати, нечітка логіка, нейронні мережі тощо.

Економічні системи еволюціонують: вони є нелінійними, нестійкими, не детермінованими. Не лінійність і нестійкість у сучасних економічних теоріях (синергетичній економіці) розглядаються як джерела різноманітності та складності економічної динаміки, а не як джерела шумів і випадкових явищ, як це робиться у традиційній економіці. А тому використання лише статистичних методів і моделей може не привести до очікуваного результату. Дедалі ширше як інструмент дослідження поведінки реальних (динамічних) економічних систем застосовується інструментарій економічної динаміки.

Економічна динаміка – відносно новий напрямок в економічній теорії, який охвачує різні концепції та парадигми пояснювання складних процесів та явищ, що виникають в сучасних соціально-економічних системах на макро- і мікрорівнях.

Економічна динаміка вивчає поведінку економічних систем та розвиток процесів, що відбуваються в них. Застосування економічної динаміки дозволяє визначити і проаналізувати детермінований механізм поведінки системи, що у свою чергу зменшує невизначеність в її поведінці. При *динамічному підході* досліджується спектр станів системи протягом деякого часу. Дослідження динаміки поведінки економічних систем дозволяє не тільки визначити перспективи та існуючі сценарії розвитку об'єкта, що досліджується, але також розробити комплекс адаптивних впливів, виявити існуючі резерви та скоректувати політику, яка реалізується в реальній економічній системі.

Економічна динаміка досліджує поведінку динамічних економічних систем, їх характер і стабільність, економіко-математичні методи і моделі, дозволяє описувати і досліджувати складні явища і процеси в динамічних соціально-економічних системах.

Економіко-математичні моделі економічної динаміки здебільшого є дескриптивними. Їх призначення складається з опису поведінки складних динамічних систем. Однак, в економічній динаміці є ряд оптимізаційних моделей, що використовуються для пошуку оптимального стану чи траєкторії.

Як *методичний апарат* економічна динаміка використовує методи математичного аналізу, диференціальне числення, варіаційне числення, графічні методи, теорію катастроф и теорію хаосу.

При вивченні економічної динаміки застосовуються як формалізовані математичні методи та апарат економіко-математичного моделювання, так і евристичні методи, які засновані на якісних оцінках, в рамках поведінки розвитку економічних процесів.

Для більш успішного опанування матеріалу навчально-методичного посібника студент повинен мати певну підготовчу базу, в першу чергу з вищої математики, математичного програмування, економетрії, математичної статистики, економічної кібернетики, імітаційного моделювання, моделювання економіки, теорію катастроф та ін.

Економіко-математичні методи і моделі, що розглядаються в даному курсі, повинні допомогти студентам набути необхідні знання та вміння щодо прийняття ефективних управлінських рішень, розподілу й оптимізації ресурсів, аналізу й обробки даних, прогнозування наслідків.

Після опанування теоретичного матеріалу з курсу «Прикладні моделі економічних процесів», вдало закріпленого самостійною роботою над контрольними запитаннями по темам та успішно пройденого самоконтролю, студент набуває навички самостійно ставити і розв'язувати задачі аналізу та прогнозування стану динамічних економічних систем і процесів, володіти інструментарієм моделювання динамічних економічних процесів, будувати та аналізувати математичні моделі динаміки розвитку економічних процесів, приймати рішення та управляти ризиком з використання динамічних моделей, робити якісні, науково-обґрунтовані висновки та давати рекомендації щодо впровадження отриманих результатів в практичну діяльність

Набуті студентами теоретичні знання та практичні навички з курсу «Прикладні моделі економічних процесів» будуть необхідні їм при виконанні аналітичних досліджень під час переддипломної практики, при написанні випускних магістерських робіт, у подальшій професійній діяльності.

МОДУЛЬ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ І ПРОЦЕСІВ В ЕКОНОМІЦІ ТА ЇХ МОДЕЛІ

Тема 1. Основні поняття економічної динаміки

1.1. Динамічні системи та їх властивості

Динамічної називається система, параметри якої явно або неявно залежать від часу.

Розглянемо найважливіші властивості складних динамічних систем.

1. *Цілісність(емерджентність).* У системі окремі частини функціонують спільно, становлячи в сукупності процес функціонування системи як цілого.

2. *Взаємодія із зовнішнім середовищем.* Система реагує на вплив навколишнього середовища, еволюціонує під цим впливом, але при цьому зберігає якісну визначеність і властивості, що відрізняють її від інших систем.

3. *Структура.* При дослідженні системи структура виступає як спосіб опису її організації.

4. *Нескінченність пізнання системи.* Система може бути представлена нескінченним числом структурних і функціональних варіантів, що відбивають різні аспекти системи.

5. І*єрархічність системи.* Кожен елемент у декомпозиції системи може розглядатися як цілісна система, елементи якої, у свою чергу, можуть бути також представлені як система. Але, з іншого боку, будь-яка система - лише компонентів більше широкої системи.

6. *Елемент.* Під елементом розуміється найменша ланка в структурі системи, внутрішня будова якого не розглядається на обраному рівні аналізу.

1.2. Формальне визначення динамічних систем. Типи поведінки економічних систем

З визначення динамічної системи випливає, що якщо для поведінки системи визначені функціональні рівняння, то в них включається в явному виді змінні, які стосуються різних моментів часу.

Формально динамічна система в загальному виді може бути задана наступним кортежем:

$$M=<T,\Phi,X,\Omega,V,Y,G,R>. \qquad (1.1)$$

Властивості динамічної системи задаються наступними аксіомами:

1. Для системи S задана множина моментів часу T, макрофункція системи Ф, множина вхідних впливів X, множина збурювань Ω, множина станів V, множина значень вихідних величин Y, структура системи G і відношення емерджентності R.

2. Множина T є деяка впорядкована підмножина множини речовинних чисел, що представляє собою множину моментів часу, у якій досліджувана система.

3. Макрофункція системи визначається за допомогою двох функцій:

$$S:X\to Y \text{ и } V:X\times Y\to C \qquad (1.2)$$

де S - функціональна модель об'єкта, V - функції якості, або оцінна, функція, C – множина оцінок. Макрофункція системи визначається парою Ф=(S,V)

4. Множина збурювань Ω, або безліч невизначеностей, являє собою безліч всіх можливих впливів, які позначаються на поводженні системи.

Якщо така множина Ω не порожня, тобто Ω≠0, то функціональна модель об'єкта приймає вигляд:

$$S:X\times\Omega\to Y$$

$$V:X\times\Omega\times Y>C \qquad (1.3)$$

5. Існує перехідна функція стану

$$\Phi=\Phi\times\Phi\times V\times X\to V, \qquad (1.4)$$

значеннями якої служать стани $u(t)=\varphi(t,\tau,u,x)\epsilon V$, у яких виявляється система в момент часу $t\epsilon T$, якщо в початковий момент $\tau<t$ вона перебувала в стані $u(\tau)\epsilon V$ у відрізку $[\tau,t]$ на неї діяли вхідні впливи $x\epsilon X$.

6. Задано вихідне відображення

$$\eta:TxV\rightarrow Y \tag{1.5}$$

визначальні вхідні величини $y(t)=\eta(t,u(t))$

Пари (τ,u), де $\tau\epsilon T$, и $u\epsilon V$, називають *станом*, або *фазовими координатами системи*, а множина - *простором станів системи*.

Кінцевий набір станів системи $t_1,t_2\epsilon T$, що задає перехідною функцією й певний на деякому тимчасовому відрізку $[t_1,t_2]$, називається *траєкторією поведінки* системи на інтервалі $[t_1,t_2]$ при заданих початкових умовах.

Говорячи про рух системи, маємо на увазі траєкторію поведінки даної системи. Сукупність траєкторій системи, які відповідають різним (всім можливим) її початковим станам, називаються *фазовим портретом системи*.

7. Структура системи G визначається в термінах теорії графів:

$$G=(\{S_i\},(S_i,.,S_j,.)), \tag{1.6}$$

де S_j- вершини, (S_i,S_j) – дуги графів.

8. Відношення емерджентності $R:\Phi\rightarrow G$

Розглянуте поняття динамічної системи дозволяє виробити загальну термінологію, уточнити концептуалізацію й забезпечити єдиний підхід до опису загальних властивостей.

1.3. Математичний апарат, що описує характеристики складних динамічних систем

Якщо поведінку системи розглядати як ланцюг послідовних кінцевих змін її станів, то змінні системи, міняючись у часі, у кожний даний момент будуть характеризуватися деякими значеннями. Якщо одне певне значення змінної u_1 у момент часу t_1, перетворюється в наступне значення u_2 у момент часу t_2, то вважається, що відбувся перехід з (u_1,t_1) в (u_2,t_2). Фактор, під дією якого відбувається перехід, називається *оператором*. Змінна, що випробувала вплив оператора, називається *операндом*. Результат переходу – (u_2,t_2) називається *образом*. Якщо розглядати деяку множину всіх переходів системи зі стану a у стан b, зі стану c у стан d і т.д., то така множина переходів для деякої множини операндів називається *перетворенням*.

Перетворенням можна дати математичне подання за допомогою методу, запропонованого У. Ешби.

Нехай множина станів деякої системи включає стан a,b,c,d і на цю множину операндів діє оператор *P*. Тоді поведінку системи можна описати, наприклад, у такий спосіб:

$$\mathrm{P} = \left\{ \frac{abcd}{bdac} \right. \qquad (1.7)$$

У першого рядка запису перераховані стани системи, або операнди. У другому рядку під кожним операндом перебувають образи, у які система переходить зі стану, записаного у верхньому рядку, під дією оператора *P*. У цьому прикладі множина елементів другого рядка не містить не одного нового елемента в порівнянні з першої.

Перетворення, що породжує нові елементи, називається *замкнутим*.

На рисунку1.1 представлений граф переходом системи з наведеними вище перетворенням.

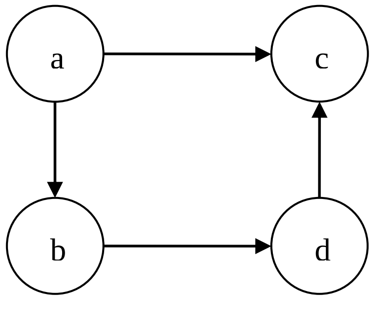


Рис. 1.1. Граф переходів станів системи

В іншім перетворенні $\mathrm{P} = \left\{ \frac{abcd}{ebca} \right.$ - утримується новий елемент e, отже, перетворення виходить за межі вихідної множини станів системи й називається *незамкнутим.*

Перетворення виду $P = \begin{cases} abcd \\ bdac \end{cases}$ є однозначним, взаємно однозначним і замкнутим. Перетворення виду $P = \begin{cases} abcd \\ abcd \end{cases}$ є тотожним.

Перетворення також можна представити в матричній формі, наприклад, для перетворення виду $P = \begin{cases} abcd \\ accb \end{cases}$ одержуємо матрицю переходів

p	a b c d,
a	1 0 0 0
b	0 0 0 1
c	0 1 1 0
d	0 0 0 0

де операнди представлені в заголовку стовпця, а образи - у заголовку рядка.

Наведений приклад описує зміна станів системи з детермінованою дією, що описана *однозначним* перетворювачем. Однозначність перетворення означає, що система не може перейти у два або більше стани при заданому вихідному. Таким чином, детермінована динамічна система поводиться так само, як замкнуте однозначне перетворення.

Якщо в систему (або її зовнішнє середовище) входять стохастичні елементи, то переходи зі стану в стани не будуть строго детермінованими. У цьому випадку перетворення повинне відбивати не тільки можливі нові стани системи, але й імовірність, з якої ці стани здійсняться. Наприклад, дане перетворення $P:\downarrow\left(\frac{a}{c+d}\,\frac{b}{e+k+m}\,\frac{c}{v}\right)$ при ймовірності $\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$. У матричній формі це перетворення буде виглядати в такий спосіб:

P	a	b	c
c	¾	0	0
d	¼	0	0
e	0	½	0
k	0	¼	0
m	0	¼	0
v	0	0	1

Система подій може бути описана за допомогою апарата символічної логіки. Логічні функції заперечення, кон‘юнкції, диз'юнкції, імплікації, еквіваленції широко застосовуються при моделюванні автоматичних систем.

Розрізняють три типи, або режими поведінки системи: рівноважний, перехідний і періодичний.

Стан рівноваги системи може розглядатися як деяка тотожність перетворень, що відбуваються в ній, що визначають однаковий стан системи в будь-який момент часу. У рівноважній системі кожна частина перебуває в стані рівноваги в умовах, обумовлені іншими її частинами.

При вивченні поведінки динамічних систем важливим є дослідження характеру перехідних процесів. *Перехідний процес* - це процес зміни в часі координат динамічної системи при її переході з одного сталого стану в інше під дією прикладеного збурювання, що змінює стан, структуру або параметри системи, або внаслідок ненульових початкових умов.

У безперервних системах, як правило, що встановився режим (тобто режим стійкого функціонування), досягається за нескінченно великий час.

До понять рівноваги й стійкості примикає поняття циклу в перетворенні системи.

Циклом називається така послідовність станів системи, при якій повторна зміна перетворень змушує систему проходити повторно цю послідовність. Це можна проілюструвати перетворенням виду (рис. 1.2):

$$\mathrm{P}\left\{\frac{abcdefgh}{chbhaceg}\right\} \tag{1.8}$$

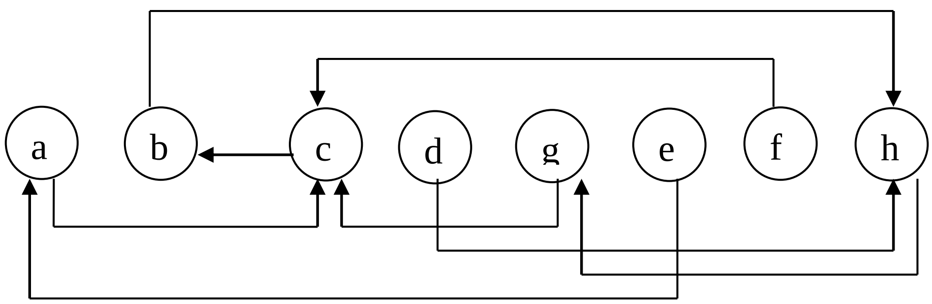


Рис. 1.2. Граф циклічного перетворення

Якщо в початковим момент часу система перебуває в стані *n*, то одержуємо послідовність станів:

$$a\ \underbrace{cbhg}\ \underbrace{cbhg}\ \underbrace{cbhg}\ldots \tag{1.9}$$

Очевидно, виділяється цикл довжиною 4. Перехід *a→c* можна розглядати як перехідний процес до сталої циклічної поведінки.

Більш загальним є опис системи з допомогу набору функцій: перехідної, передатної й імпульсної. Цей спосіб придатний для опису безперервних систем, що складаються з множини елементів.

Перехідна функція - функція, що відбиває реакцію динамічної системи на вхідний сигнал при нульових початкових умовах. Перехідна функція є важливою характеристикою системи, що повністю визначає її динамічні властивості. Знаючи перехідну функцію *h(t),* можна визначити сигнал *y(t)* на виході системи при подачі в момент часу t_0 - Про на її вхід сигнал *x(t)*:

$$y(t)=x(0)*h(t)+\int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau}h(t-\tau)d\tau \tag{1.10}$$

Передатна функція - це функція, що представляє собою відношення перетворювача Лагранжа *Y(p)* вихідної координати *y(t)* лінійної динамічної системи (або окремої ланки) до перетворення Лапласа *X(p)* її вхідної координати *x(t)* при нульових початкових умовах: *W(p)=Y(p)/X(p).* Передатна функція лінійних фізично реалізованих динамічних систем з постійними параметрами є дрібно-раціональними функціями параметра перетворювача Лапласа *p.*

Імпульсна функція задає вхідний сигнал, що надійшов у систему. Вона може мати, наприклад, східчастий вид, одиничний вплив і т.п.

Для лінійних динамічних систем імпульсна функція *g(t)* і передатна функція *w(p)* пов'язані з перехідною функцією *h(t)* співвідношеннями:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad h(t) = \frac{1}{2p}\int_{c-iw}^{c+iw}\frac{w(p)}{p}e^{pt}dp;$$

$$w(p)=\int_0^{\infty}\frac{dh}{dt}e^{-pt}dt\,.$$

де c - компонента абсолютної збіжності.

Перехідні й передатні функції широко використаються в пакетах програм імітаційного моделювання й прогнозування на основі нейронних мереж.

Контрольні запитання за першою темою

1. Яка система називається динамічної? Розкрийте найважливіші властивості складних динамічних систем.
2. Опишіть ряд найважливіших властивостей і характеристик динамічних систем.
3. Якими складовими формально описується динамічна система?
4. Що являє собою траєкторія поведінки системи?
5. Які основні якісні характеристики складної системи? Дайте коротке пояснення кожній властивості.
6. Які види перетворень використаються для опису динамічних характеристик систем?
7. Що називається циклом? Представте графічно циклічне перетворення.
8. Що являють собою перехідна й передатна функції?

Тема 2. Принципи моделювання економічних процесів

2.1. Типи, структури динамічних моделей та характер їх використання

Усі економічні системи класифікуються на статичні і динамічні:

- статична система припускає, що всі її входи та виходи задаються статично і незмінні;

- динамічна система - це система, для якої залежність між її входами і виходами визначається операторами з пам'яттю, тобто існує зв'язок з передісторією.

До операторів з пам'яттю належать: оператори запізнювання, диференційні та інтегральні оператори. Динамічні системи, що розглядаються в економічній динаміці, звичайно представляються у вигляді системи диференційних чи диференційно-різничних рівнянь.

Економічна динаміка, на відміну від статики, вивчає поведінку економічних систем та розвиток процесів, що відбуваються у них. Це вивчення дає відповідь на питання: яким буде стан системи в наступний момент часу, з огляду на її стан у даний момент часу.

Дослідження динаміки економічних систем здійснюється за схемою, приведеної на рисунку 2.1.

Етап І. Визначення та аналіз впливу факторів внутрішнього та зовнішнього навколишнього середовища на економічний об'єкт, оцінка їхнього впливу на результативний показник, визначення задач дослідження.

Етап П. Економіко-математичні моделі у більшості випадків є дескриптивними, тобто вони повинні описувати динаміку поведінки об'єкта. Однак, для пошуку оптимального стану, можуть застосовуватися також оптимізаційні моделі.

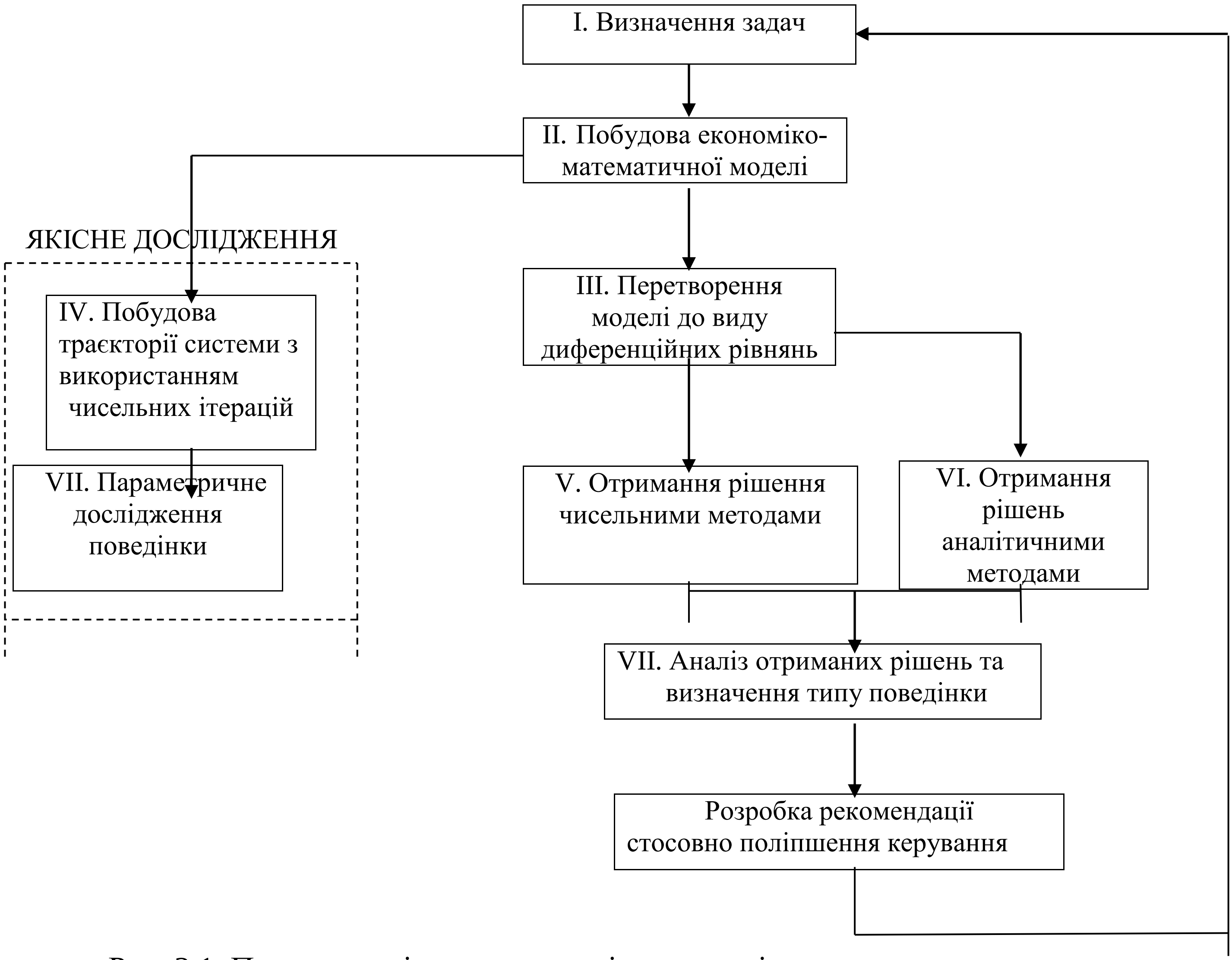


Рис. 2.1. Процес дослідження динаміки економічних систем

Етап III. Не всі економічні системи можуть бути зведені до виду єдиного рівняння. У цьому випадку модель досліджується як система диференційних рівнянь.

У деяких випадках досліджувані системи рівнянь моделі можуть мати диференційно-різничний вигляд. У цих випадках, для знаходження рішень, застосовуються чисельні методи, тому що методик отримання рішень аналітичними методами таких систем не існує.

Етап IV. Побудова фазового портрету системи, визначення характеру її поведінки (виконується в теорії катастроф).

Етап VI. Економічна динаміка розглядає аналітичні методи дослідження динамічних моделей. Ці методи є єдиною формалізованою методикою, не прив'язані жорстко до конкретних програмних засобів.

Переваги - більш повне уявлення про динаміку системи.

Недоліки - невисокий ступінь наочності, складність процедур дослідження.

Етап VII. Дозволяє одержати наочне уявлення про залежність поведінки системи від якого-небудь параметру (умови настання біфуркацій та т.п.).

Прикладні динамічні моделі за характером їх використання класифікуються на 3 основні типи:

1. Дискретні динамічні системи і моделі економічних об'єктів, що описують динаміку їх поведінки: моделі ринкової рівноваги і динаміки національного доходу.

2. Неперервні динамічні системи: моделі економічного росту та його стабілізації.

3. Динамічні системи зі складними типами поведінки: граничними циклами, біфуркаціями і хаосом.

Розглянемо кожен з них більш детально.

2.2. Моделі дискретних, неперервних та складних динамічних систем в економіці

Моделі дискретних динамічних систем в економіці. Моделі даного типу описують динаміку поведінки економічних показників у часі дискретно, тобто, отримуємо моментний або інтервальний ряд даних, де відстань між вимірюванням значень показників є дискретною величиною. Математичною формою представлення моделей даного типу є диференційно-різничні рівняння виду:

$$\Delta y_1 = f(t + 1) - f(t) = y_{t+1} - y_1 \qquad (2.1)$$

До моделей даного типу відносяться:

- павутиноподібна модель ринкової рівноваги - з допомогою даної моделі розраховується динаміка попиту, пропозиції та ціни на товар в умовах ринкової економіки. Визначаються умови, коли дана система має стійкий, або нестійкий стан рівноваги.

- моделі динаміки національного доходу - дозволяють відслідковувати в часі динаміку таких головних макроекономічних показників, як: валовий національний продукт (ВНП), споживчий попит, інвестиційні видатки, державні видатки, чистий експорт, додану вартість по галузях. З допомогою цих моделей пояснюється ефект мультиплікатора, коли зміна кінцевого попиту на продукцію галузей економіки призводить до мультиплікативного збільшення рівноважного обсягу ВНП; зміна макроекономічних показників відносно політики державного податкового навантаження. Також, визначаються умови, в яких економічна система є стійкою, або нестійкою, відносно свого стану рівноваги, до зовнішніх змін.

Моделі неперервних динамічних систем в економіці. Моделі даного типу описують динаміку поведінки економічних показників у часі, що змінюються неперервно. Математичною формою представлення моделей даного типу є диференційні рівняння, або система звичайних диференційних рівнянь:

де x_1, x_2, ... $x_п$ - змінні характеристики системи, динаміка яких відслідковується протягом часу.

До моделей даного типу відносяться:

- неокласичні моделі економічного росту — виходять зі стабільності ринкового попиту та пропозиції і направлені на вивчення причин економічного росту країн, зокрема, в залежності від темпів інтенсивного та екстенсивного технічного прогресу.

- моделі теорії довгих хвиль - пояснюють нерівномірність темпів економічного росту нерівномірністю здійснення базових інновацій, що формують технологічний уклад галузей народного господарства.

- моделі макроекономічних динамічних виробничих функцій - дозволяють оцінювати виробничі потужності економіки на основі наявних виробничих факторів, до яких відносяться основні фонди, людські ресурси тощо.

- динамічні міжгалузеві моделі - на базі узагальненої моделі Леонтьєва, що побудована на основі матриці міжгалузевого балансу, оцінюються в часі та взаємопов'язуються наступні макроекономічні показники: елементи кінцевого попиту, додана вартість, ціни на продукцію галузей тощо. З допомогою даних моделей вирішується задача - яким повинен бути рівноважний обсяг вробленої продукції по галузях економіки в умовах змінного попиту, з урахуванням проміжного споживання.

Моделі складних динамічних систем в економіці. Більшість моделей реальних економічних систем нелінійні. Вони мають, як правило, декілька особливих траєкторій, кожна з яких повинна бути досліджена для одержання глобального фазового портрету.

Хаотичні процеси в детермінованих нелінійних системах - одна з фундаментальних проблем досліджень економічних явищ. Можливість хаотичних процесів передбачав А. Пуанкаре: «У нестійких системах, незначна причина, що непомітна для спостереження за своєю малістю, викликає значну дію, яку неможливо передбачити». Розвиток ідей Пуанкаре призвів до створення фундаменту хаотичної динаміки детермінованих систем. Було встановлено, що необхідною умовою виникнення хаосу в динамічних системах є розмірність фазового простору, тобто коли стан системи характеризується мінімум трьома змінними.

Для того, щоб дати визначення явищу детермінованого хаосу, дамо спочатку визначення поняттям «детермінованість» та «хаос».

Детермінованість - це однозначний взаємозв'язок причини та наслідків: якщо задано деякий початковий стан системи в момент часу t_0, то він однозначно визначає стан системи в будь-який наступний момент часу $t>t_0$.

У загальному випадку, залежність майбутнього стану економічної системи $x(t)$, від початкового $x(t_0)$, можна записати у вигляді:

$$x(i)=F[x(t_0)] \tag{2.2}$$

де F - детермінований закон, що здійснює строго однозначне перетворення початкового стану економічної системи $x(t_0)$, у майбутній стан $x(t)$, для любого $t>t_0$.

Розглянемо поняття хаосу на прикладі експерименту з броунівською часткою. Помістимо частку в момент часу $t = t_0$ у розчин рідини і за допомогою мікроскопу почнемо фіксувати зміну її положення в часі, визначаючи координати частки через рівні інтервали Δt. Під дією випадкових поштовхів з боку навколишніх молекул, частка буде робити нерегулярні блукання, що характеризуються заплутаною траєкторією. Повторивши експеримент кілька разів, можна зробити наступні висновки:

- щоразу траєкторія поведінки системи складна та неперіодична;

- будь-яка спроба однозначного повторення експерименту приводить до негативного результату.

Класичне явище руху броунівської частки, дає чіткі фізичні уявлення про хаос як непередбачуваний, випадковий процес.

Поняття хаосу означає, що зміна стану системи протягом часу є випадковою (її не можна однозначно визначити) та не відтворюваною (процес не можна повторити).

Таким чином, детермінізм асоціюється з повною передбачуваністю та відтворюваністю поведінки системи, хаос - з повною непередбачуваністю та не відтворюваністю.

Для того, щоб визначити зміст поняття «детермінований хаос», дамо визначення стійкого та нестійкого стану рівноваги.

Якщо під незначним зовнішнім впливом динамічна система відхиляється від свого стану рівноваги і ці відхилення з часом згасають, а система прагне до свого стану рівноваги, то така рівновага є стійкою. Якщо ж початкові малі зрушення протягом часу збільшуються, то такий стан рівноваги називається нестійким.

Важливою властивістю систем з нестійким режимом поведінки є не лінійність. Порушивши стан рівноваги такої системи малим впливом, будемо спочатку фіксувати збільшення відхилень доти, поки в дію не вступить механізм нелінійного обмеження. Після цього, процес збільшення відхилень припиняється. Внаслідок обмеженості ресурсів системи, це нарощування повинно припинитися та змінитися на зменшення амплітуди відхилення.

Припустимо, що аналізується двовимірна диференційна динамічна система. Простір її станів - фазова площина з координатами Хі і хг. Якщо первісне незначне відхилення системи від стану рівноваги спочатку буде збільшуватися, а в результаті нелінійного обмеження далі зменшуватися, то можливі два варіанти сценаріїв розвитку:

- поява нових стійких станів рівноваги поблизу нестійкого;

- перехід у новий режим, що відповідає періодичним коливанням. Другий варіант показаний на рисунку 2.2.

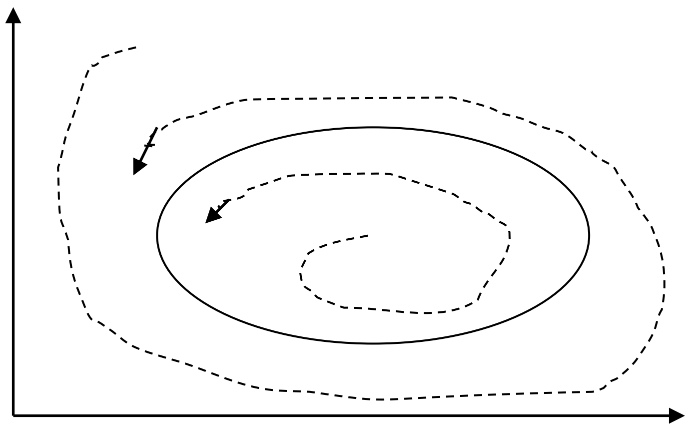


Рис. 2.2. Нелінійні обмеження для двовимірної динамічної системи

При незначному початковому відхиленні положення системи від точки рівноваги О, подальший її розвиток відбувається по спіралі, поступово віддаляючись від стану рівноваги. Якщо початкові відхилення системи від стану рівноваги значні, то траєкторія її розвитку протягом часу наближається до точки рівноваги. Замість нестійкого стану рівноваги з'являється новий режим - періодичні автоколивання, яким відповідає граничний цикл на фазовій площині.

Розглянемо динамічну систему, стан якої характеризується трьома незалежними змінними (фазовими координатами) у тривимірному фазовому просторі. Траєкторія розкручується, віддаляючись від особливої точки системи по спіралі. Досягши деяких значень, згідно дії механізму нелінійного обмеження, траєкторія знову наблизиться до свого вихідного положення. Через нестійкість, описаний процес буде повторюватися. Можливі два варіанти поведінки системи:

- протягом деякого часу траєкторія системи буде замикатися, демонструючи наявність складного, але періодичного процесу;

- траєкторія буде відтворювати деякий аперіодичний процес, якщо при любому і, замикання не відбудеться.

Другий варіант відповідає режиму детермінованого хаосу:

- майбутній стан системи однозначно визначається її початковим станом;

- процес розвитку системи складний, неперіодичний, зовні нічим не відрізняється від випадкового.

Важливо відзначити, що на відміну від випадкового, описаний процес цілком відтворюваний. Якщо систему повернути до її початкового стану, то, зважаючи на наявність детермінованості, ми знову відтворимо ту ж саму траєкторію незалежно від ступеня її складності.

У випадках нестійкого стану рівноваги детермінованих нелінійних систем, однозначно прогнозувати її майбутній стан можна тільки у випадку абсолютно точного завдання початкових умов. Однак, якщо враховувати можливість якої завгодно малої помилки, то детерміноване прогнозування стає неможливим - головною властивістю динамічних систем, що демонструють режим детермінованого хаосу, є чуттєва залежність режиму функціонування до яких завгодно малих змін початкових умов. Саме ця обставина веде до втрати детермінованої передбачуваності та необхідності вводити імовірнісні характеристики для опису динаміки таких систем.

Оскільки будь-яке вимірювання початкових умов положення системи визначається з кінцевою (якою завгодно малою) помилкою, то аналізувати еволюцію розвитку системи потрібно виходячи не тільки з початкового стану системи, але й також з початкової області навколо цієї точки.

Математичним образом функціонування динамічної системи в режимі детермінованого хаосу є атрактор - гранична траєкторія, яка представляє собою точки у фазовому просторі, до якого прагнуть усі вихідні режими. Якщо такий режим є стійким станом рівноваги, то атрактор системи буде представлений особливою точкою; якщо це стійкий періодичний рух – атрактором буде замкнута крива, яка називається граничним циклом.

Раніше вважалося, що атрактор - це образ винятково стійкого режиму функціонування системи. Сучасні погляди говорять про те, що режим детермінованого хаосу також є атрактором, в контексті визначення граничної траєкторії в обмеженій області фазового простору. Однак такий атрактор має дві суттєві відмінності: траєкторія такого атрактору неперіодична (вона не замикається) і режим функціонування нестійкий (малі відхилення від початкового стану рівноваги наростають). Ці атрактори отримали назву дивних. Швидка розбіжність двох близьких у початковий момент часу траєкторій означає дуже велику чутливість рішень до малої зміни початкових умов. Цим зумовлені великі труднощі, чи, навіть, неможливість довгострокового прогнозу поведінки нелінійних динамічних систем.

Те, що чутливість динамічної системи до початкових даних веде до хаосу, у 1963 р. зрозумів американський метеоролог Э. Лоренц. Він

запропонував найпростішу модель конвекції повітря (яка відіграє важливу роль в динаміці атмосферних умов).

Комп'ютерний аналіз системи Лоренца привів до принципового результату: детермінований хаос, тобто, неперіодичний рух у детермінованих системах, де майбутній стан однозначно визначається минулим, має кінцевий горизонт прогнозування.

У загальному випадку наявність дивного атрактору означає, що:

- система чутлива щодо малих змін у початкових умовах;

- загальні характеристики системи стійкі і не залежать від початкових умов.

Окрім розглянутих випадків, до моделей складних динамічних систем в економічній динаміці, відносять модель ринкової адаптації, яка описує процес коригування стратегії фірми, відповідно до якої вона змінює рівень виробництва, зі зміною ринкової ситуації, а також в умовах повної відсутності інформації по цих змінах. В такому випадку фірма скоріше шукає доход, а не максимізує його.

2.3. Екстенсивні та інтенсивні фактори розвитку. Факторні моделі

Економічний розвиток є процесом взаємодії багатьох факторів, серед яких важливо розрізняти *екстенсивні* й *інтенсивні.* Сполучення цих двох груп факторів обумовлюють типи економічного зростання (розширеного відтворення).

Екстенсивне зростання – це збільшення виробництва виключно за рахунок кількісного збільшення залучуваних ресурсів попередньої якості.

Інтенсивне зростання – це зростання виробництва виключно за рахунок його удосконалювання (у тому числі підвищення якості використовуваних ресурсів) при незмінних фізичних обсягах залучуваних ресурсів. У реальній економіці, як правило, сполучаються й екстенсивні й інтенсивні ознаки зростання. Залежно від переживання екстенсивних чи інтенсивних джерел зростання можна говорити про *переважно екстенсивний і переважно інтенсивний* типи економічного розвитку. Так, якщо за рахунок підвищення ефективності виробництва досягається понад 50% приросту продукції, то маємо переважно інтенсивний тип.

Екстенсивний чи переважно екстенсивний шлях розвитку народного господарства може використовуватися тільки на обмежених часових інтервалах, оскільки призводить до неминучого вичерпання джерел зростання.

Необхідною умовою збереження високих темпів розвитку при збільшенні ролі інтенсивних факторів є підвищення ефективності використання виробничих ресурсів – виходу продукції на одиницю витрат. Тому до числа важливих завдань економічної динаміки належить вимірювання і прогнозування ефективності виробництва.

Основними *окремими* показниками економічної ефективності є продуктивність праці, фондовіддача, випуск продукції на одиницю затрачу вальних сировини і матеріалів, урожайність тощо. Спільне для цих показників те, що вони характеризують дію кожного виробничого фактора окремо («однофакторний» підхід). Методологія визначення *сукупної* (*(інтегральної*) ефективності використовуваних факторів виробництва ґрунтується на вивчені процесу їхньої взаємодії («багатофакторний» підхід). Показники ефективності виробничих факторів (ресурсів) поділяються також на *середні* і *приросту* (граничні).

Нижче основні показники ефективності розглядаються у зв’язку з одно факторними і багатофакторними моделями економічного зростання.

Однофакторні моделі економічного зростання.

Однофакторна модель економічного зростання виражає залежність динаміки обсягу виробництва (y_t) від динаміки одного з виробничих факторів

$$(x_{it}) \colon y_t=f_i(x_{it}); \tag{2.3}$$

Функція (2.3) є динамічним варіантом *виробничої функції*, яка ґрунтується на припущенні *взаємодоповнюваності* виробничих факторів. Ця функція умовно «приписує» результат виробництва якомусь одному виробничому фактору (залежно від його кількості, якості, ефективності використання). Для дослідження динаміки виробництва залежно від виробничих фондів, залучуваних природних ресурсів тощо будуються особливі одно факторні моделі. Усі однофакторні моделі економічного зростання поєднуються умовою:

$$y_t = \min f(x_{it}) \tag{2.4}$$

З функцією (2.4) пов’язані окремі показники ефективності використання ресурсів:

а) по інтегральні (річні): $\mu_{it} = \frac{y_t}{y_{it}}$, t =0.1.2…..;

б) середні за період (якщо – інтегральна величина): $\mu_i\ _{[I,T]} = \frac{\sum_{i=1}^{T} y_t}{\sum_{t=1}^{T} x_{it}}$;

в) приросту: $v_{i[t_1, t_2]} = \frac{y_{t_2} - y_{t_1}}{x_{it_2} - x_{it_1}}$

З наведених формул виходить, що середні і приросту ефективності ресурсів у загальному випадку – змінні величини; вони змінюються і в часі, і залежно від величини використовуваного ресурсу.

При аналізі економічної динаміки часто ставиться питання про частки приросту продукції, одержувані за рахунок екстенсивних та інтенсивних факторів.

Багатофакторні моделі економічного зростання

Багатофакторна модель, на відміну від однофакторної, відображає взаємодію ряду виробничих факторів з урахуванням зміни їхньої якості, ефективності використання, а також загальних наслідків науково-технічного прогресу й удосконалення організації суспільного виробництва. Багатофакторна модель економічного зростання є динамічним варіантом виробничої функції з взаємозамінними ресурсами. Відмінність динамічної виробничої функції від статичної в тому, що її параметри змінюються в часі і, крім того, вона може ясно включати змінну часу.

Багатофакторну модель економічного зростання зручно подати в такому вигляді:

$$y_t = f(X_t, A_t, t) \quad (2.5)$$

Важлива перевага багатофакторних моделей, в порівнянні з аналогічними показниками однофакторних моделей, полягає в тому, що вони враховують сполучення всіх основних виробничих факторів. Тому з їх допомогою можна досліджувати сполучення виробничих факторів, що призводять, наприклад, до найбільшого зростання продуктивності праці чи до найбільшої економії деяких природних ресурсів тощо. Унаслідок того, що параметри функції (2.5) змінюються в часі, результати такого аналізу можуть істотно відрізнятися від висновків, одержуваних з аналізу статичних виробничих функцій.

Ознака підвищення ефективності використання виробничих факторів визначається діленням похідних у часі : $\frac{d\mu_{iit}}{dt}>0$, $\frac{dv_{it}}{dt}>0$.

Якщо у динаміці і-го ресурсу підвищується, то темп приросту виробництва буде вище темпу приросту відповідного ресурсу. В основі багатофакторного аналізу ролі екстенсивних та інтенсивних факторів економічного зростання лежить розкладання повного збільшення функції багатьох змінних і економічна інтеграція елементів такого розкладання.

Контрольні запитання за другою темою

1. Дайте детальний опис процесу дослідження динаміки економічних систем.
2. Наведіть переваги та недоліки аналітичних методів дослідження динамічних моделей.
3. Прикладні динамічні моделі за характером їх використання класифікуються на 3 основні типи, назвіть їх.
4. Що описують моделі дискретних динамічних систем в економіці? Наведіть їх математичну форму запису.
5. Які моделі відносяться до моделей дискретних динамічних систем?
6. Дайте визначення моделям неперервних динамічних систем в економіці.
7. Назвіть та дайте короткий опис моделям, що належать до типу моделей неперервних динамічних систем.
8. Охарактеризуйте моделі складних динамічних систем в економіці.
9. Чим відрізняються екстенсивні й інтенсивні типи зростання
10. Які Ви знаєте типи факторних моделей? Надайте їх визначення та характеристику.

Тема 3. Лінійні динамічні моделі

3.1. Динамічна модель В. Леонтьєва

Динамічна модель Леонтьєва є деталізованою моделлю росту валового суспільного продукту й національного доходу. Базою для динамічної моделі Леонтьєва служить статична модель міжгалузевого балансу в грошовому вираженні, що відбиває виробництво й розподіл валового суспільного продукту в галузевому розрізі, міжгалузеві виробничі зв'язки, використання матеріальних і трудових ресурсів, створення й розподіл національного доходу(НД). Кожна галузь у балансу розглядається двічі - як споживач і як виробник. Це й визначає матричну структуру балансу. У балансі розглядаються як галузі, так і підгалузі. В окремих випадках баланс може включати до декількох сотень позицій.

В основі статичної моделі лежить припущення про взаємозв'язок між нагромадженням і приростом валового продукту.

При побудові динамічної моделі В.Леонтьєва, як і для моделі міжгалузевого балансу, робляться наступні припущення:

1) у кожній галузі (або підгалузі) є єдина технологія виробництва;

2) норми виробничих витрат не залежать від обсягу випускної продукції;

3) не допускається заміщення у виробництві одних видів продукції іншими.

При цих припущеннях величина міжгалузевого потоку x_{ij} виявляється пов'язаної з валовою продукцією галузі в такий спосіб

$$x_{ij} = a_{ij}X_j$$

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \qquad (3.1)$$

де a_{ij} – коефіцієнт прямих матеріальних витрат, за допомогою якого виміряються технологічні зв'язки між галузями.

Коефіцієнт a_{ij} показує скільки одиниць продукції *i-ої* галузі безпосередньо затрачається на випуск одиниці валової продукції *j-ої* галузі. Так, при $i=j$ маємо коефіцієнт витрат власної продукції галузі на одиницю її валового випуску.

Всі коефіцієнти прямих матеріальних витрат утворять квадратну матрицю A_{nxn}

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right] . \quad (3.2)$$

Статична модель міжгалузевого балансу в матричній формі має вигляд:

$$X=AX+Y, \quad (3.3)$$

де A - матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат;

X - вектор-стовпець валових обсягів випуску (ВОВ);

Y - вектор-стовпець кінцевого продукту (НД).

В основі динамічної моделі лежить припущення про взаємозв'язок між нагромадженням і приростом валової продукції. Цей взаємозв'язок реалізується за допомогою матриці капіталомісткості приростів виробництва. Крім того, передбачається миттєвість перетворень у приріст основних фондів і миттєвість віддачі цих фондів в обсяги виробництва (що, загалом кажучи, невірно). Час передбачається безперервним, що й визначає застосування диференціальних рівнянь.

Основне співвідношення моделі має вигляд:

$$X(t) = AX(t) + B\frac{dX}{dt} + C(t) \quad (3.4)$$

де X(t) - вектор обсягів валового випуску продукції по галузях у момент часу t;

$\frac{dX}{dt}$ - вектор абсолютних приростів за малу одиницю часу;

A - матриця коефіцієнтів прямих витрат, включаючи витрати на відшкодування вибуття основних фондів;

AX(t) - виробниче споживання, що забезпечує просте відтворення;

B – матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів виробництва(b_{ij} – витрати виробничого нагромадження i-го виду продукції на одиницю приросту j-го виду продукції);

C(t) - вектор-стовпець, що характеризує споживання по галузях.

Рівняння моделі (3.4) записано у векторно-матричній формі відносно ВОВ.

Щодо величин, які приймають участь у рівнянні (3.4) передбачається виконання наступних умов.

1. *Матриця А продуктивна й нерозкладна.*

Визначення. Нехай $N=\{1,\ldots n\}$ - множина всіх галузей. Підмножина галузей $S\in N$ *ізольовано*, якщо $a_{ij}=0$, при всіх $i\notin S$ і $j\in S$. Це означає, що галузі з множини S не має потреби в продукції, виробленої іншими галузями, навіть побічно.

Якщо в множині галузей існує ізольована підмножина, то за допомогою перестановок рядків і стовпців матрицю А можна привести до виду

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}. \qquad (3.5)$$

Визначення. Матриця А називається *нерозкладної,* якщо її не можна привести до виду (3.5) тільки перестановкою рядків і стовпців.

Одне з основних властивостей нерозкладних матриць описується *теоремою Фробеніуса – Перона:*

1) Нерозкладна матриця А має позитивне власне число $\lambda_A > 0$, що перевершує по модулю всі інші її власні числа.

2) Власному числу λ_A відповідає єдиний (з точністю до ненульового множника) цілком позитивний вектор $\mathbf{X_A}$.

Отже, матриця коефіцієнтів повних витрат строго позитивна:

$(E\text{-}A)^{-1}>0$, $\det(B) \neq 0$.

2. Матриці A и B постійні в часі.

3. Капіталовкладення (інвестиції) виступають єдиним джерелом зростання виробництва. Тобто, у жодній галузі немає резервних виробничих потужностей.

При таких припущеннях змістовно інтерпретованими в рамках даної моделі можуть бути тільки стани, для яких $\frac{dX}{dt} \geq 0$. Якщо виконується ця умова, то системи будемо називати припустимими. Траєкторії, що не виводять систему з області припустимих станів, будемо також називати припустимими.

Використовуючи взаємозв'язок між ВОВ і НД у статичній моделі

$$X(t)=(E\text{-}A)^{-1}Y(t), \tag{3.6}$$

де вектор Y(t) характеризує галузеву структуру НД, одержимо рівняння моделі Леонтьева відносно НД:

$$Y(t) = B(E - A)^{-1}\frac{dY}{dt} + C(t). \tag{3.7}$$

Позначимо $B(E - A)^{-1} = B$. Коефіцієнт цієї матриці $\tilde{b}_{ij}$ характеризує величину виробничого нагромадження продукції i-го виду на одиницю приросту j-го елемента НД, а сама вона називається матрицею коефіцієнтів *повної приростної капіталомісткістю*.

Для обчислення можливостей системи досліджуємо модель (3.7) при різних траєкторіях споживання.

Визначимо технологічні можливості системи, які визначаються параметрами A и B. Для цього покладемо C(t) = 0. У цьому випадку (3.7) прийме вид:

$$Y(t) = B(E - A)^{-1}\frac{dY}{dt}\ . \tag{3.8}$$

Вираження (3.8) є система однорідних лінійних диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами першого порядку. Загальне рішення цієї системи відповідно до теорії диференціальних рівнянь має вигляд

$$Y(t) = \sum_l d_l K_l e^{\frac{1}{s_l}t} \tag{3.9}$$

де s_l – власні числа матриці повної *приростної капіталомісткістю*;

K_l – відповідні їм власні вектори;

d_l - коефіцієнти, які визначаються з початкової умови

$Y(0) = \sum_l d_l K_l$

Траєкторія, що виходить із Y(0), являє собою комбінацію експонент із різними темпами приросту ($1/s_l$). Отже, у загальному випадку розвиток по траєкторії $Y(t) = Y_0 e^{kt}$, тобто з єдиним для всіх галузей темпом, неможливо, і воно відбувається з постійними структурними змінами.

Внаслідок допущень моделі матриця $\tilde{B}=B(E-A)^{-1}>0$, отже в неї існує корінь Фробеніуса - Перона, s. Величину цього кореня покладено в межах:

$$\min_j \sum_i \tilde{b}_{ij} < s < \max_j \sum_i \tilde{b}_{ij}$$

Величина $\tilde{b}_{ij}=\sum\tilde{b}_{ij}$ (j=1,…n) називається повною *приростною капіталомісткістю* j-ої галузі.

Можливі два випадки поведінки траєкторії (3.8).

У першому випадку в траєкторії (3.8) домінує (переважає) експонента з показником ступеня, що пов'язаний з коренем Фробеніуса-Перрона. У цьому випадку згодом темп приросту кожного елемента НД починає наближатися до темпу, обумовленому даною експонентою, тобто **1/s**. Таким чином, на нескінченному періоді часу кожний з елементів НД починає розвиватися з темпом 1/s. Таким чином, *технологічний темп приросту* має вигляд: $\acute{p}=\frac{1}{s}$.Структура НД прагне в тому випадку до власного вектора, що відповідає K_s.

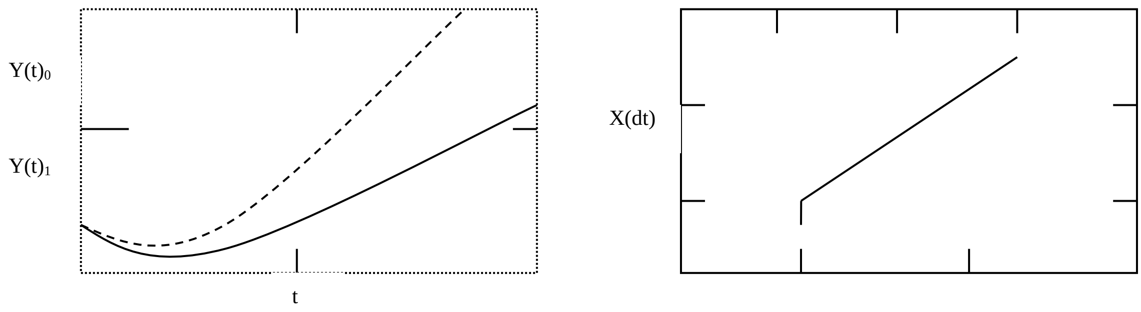


Рис. 3.1. Припустимі траєкторії розвитку

У другому випадку в (3.9) домінує експонента з показником ступеня, відмінним від 1/s. Це відбувається, коли існує позитивне власне число, відмінне від s. Позначимо домінуючий показник $1/s_0$. У цьому випадку власний вектор, що відповідає s_0, обов'язково має негативні компоненти й, тому що $s_0K_{s0} = \tilde{B}K_{s0}=B(E\text{-}A)^{-1}K_{s0}$, стовпець $(E - A)^{-1}K_{s0}$ також містить негативні компоненти. З огляду на (3.9), запишемо X(t) у такий спосіб:

$$X(t) = \sum_l d_l (E - A)^{-1} K_l e^{\frac{1}{s_l}t} \tag{3.10}$$

В останній рівності в останній частині присутні негативні компоненти, причому зі збільшенням t вони збільшуються по абсолютній величині. Отже, із часом вони з'являться й у лівій частині рівності. Таким чином, траєкторія виходить у неприпустиму зону.

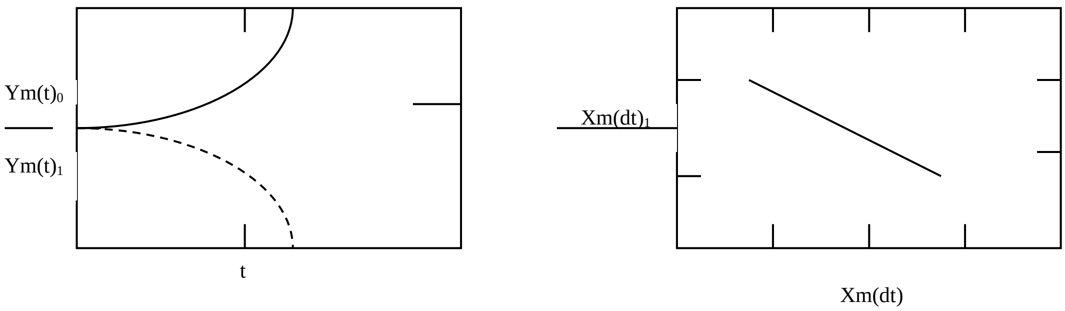


Рис. 3.2. Неприпустимі траєкторії розвитку

Зауваження: Траєкторія системи в першому випадку є припустимої, хоча початковий стан системи може бути й неприпустимим. І, навпаки, у другому випадку, хоча початковий стан системи є припустимим, траєкторія розвитку може виходити за межі припустимої області.

3.2. Лінійні моделі попиту та пропозиції

Розглянемо спочатку дискретну модель на прикладі павукоподібної. Нехай ринок якого-небудь окремого товару характеризується наступними функціями попиту та пропозиції: $D=D(P)$, $S=S(P)$.

Для існування рівноваги ціна повинна бути такою, щоб товар на ринку був розпроданий, або $D(P) = S(P)$.

Ціна рівноваги $\overline{P}$ задається цим рівнянням (яке може мати безліч рішень), а відповідний обсяг покупок-продажів, позначуваний через $\overline{X}$, описується наступним рівнянням:

$$\overline{X} = D(\overline{P}) - S(\overline{P}) \qquad (3.11)$$

Динамічна модель виходить при наявності запізнювання попиту або пропозиції. Найпростіша модель у дискретному аналізі включає незмінне запізнювання або відставання пропозиції на один інтервал:

$D_t = D(P_t)$ і $S_t = S(P_{t-1})$.

Це може трапитися, якщо для виробництва розглянутого товару потрібен певний період часу, обраний за інтервал. Дія моделі така: при заданому P_{t-1} попереднього періоду обсяг пропозиції на ринку в поточному періоді буде $S(P_{t-1})$ і величина P_t повинна встановитися так, щоб був куплений весь обсяг запропонованого товару. Іншими словами, P_t і обсяг покупок-продажів X_t характеризуються рівнянням:

$$X_t = D(P_t)=S(P_{t-1}), \qquad (3.12)$$

Отже, знаючи вихідну ціну P_0, за допомогою цих рівнянь ми можемо одержати значення P_1 і X_1. Потім, використовуючи наявну ціну P_1, з відповідних рівнянь одержимо значення P_2 і X_2, і т.д. Загалом, зміна P_t характеризується різницевим рівнянням першого порядку (одноінтервальне відставання):

$$D(P_t) =S(P_{t-1}). \qquad (3.13)$$

Рішення можна проілюструвати діаграмою, представленої на рис. 3.3, де D і S — відповідно криві попиту та пропозиції, а положення рівноваги (зі значеннями $\overline{P}$ й $\overline{X}$) відповідає крапці їхнього перетинання Q. У динамічній моделі D має той же зміст, що й у статичної, але ордината кривій S показує обсяг пропозицій у даний період часу залежно від цін. керуючих ринком у попередній момент часу. Ціна в початковий момент часу дорівнює P_0.

Відповідна крапка Q_0 на кривій S дає обсяг пропозиції в період 1. Весь цей запропонований обсяг товару розкуповується при ціні P_1 заданою крапкою Q_1 на кривій D з тією же ординатою (X_1), що й Q_o. У другий період часу рух відбувається спочатку по вертикалі від крапки Q_1 до крапки на кривій S, що дає X_2, а потім по горизонталі — до крапки Q_2 на кривій D. Остання крапка характеризує P_2. Продовження цього процесу й дає графік павутини, показаний на рис. 3.3.

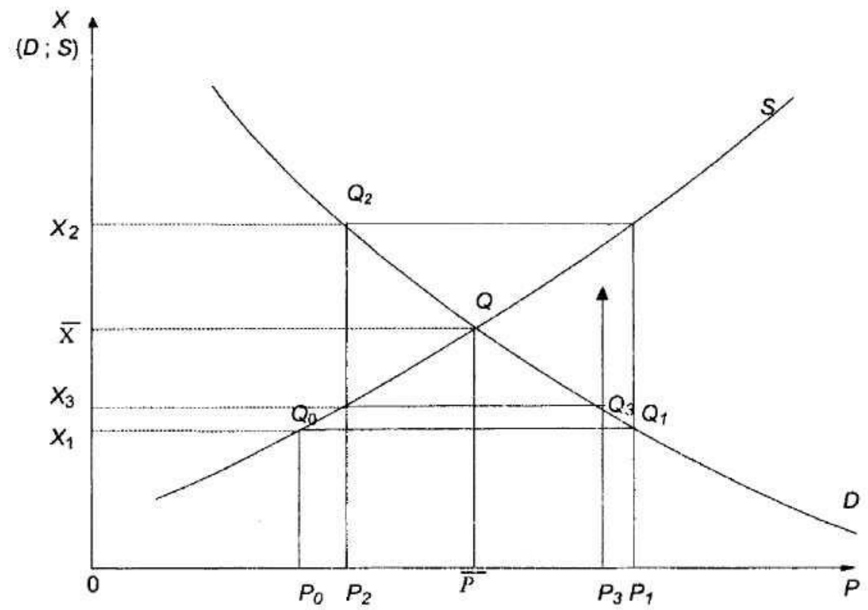


Рис. 3.3. Графічне рішення павукоподібної моделі попиту та пропозиції

Ціни й обсяги (покупок — продажів) у послідовні періоди часу є відповідно координатами крапок Q_1, Q_2, Q_3, ..,Q_n на кривій попиту D. У розглянутому випадку послідовність крапок прагне до Q. При цьому крапки по черзі розташовуються на лівій і правій стороні від Q. Отже, і значення ціни P_t прагнуть до $\overline{P}$, розташовуючись по черзі по обох сторони від $\overline{P}$. Точно так само й з обсягами покупок-продажів (X_t). Припустимо, що D іде вниз, а S - нагору. Тоді інтуїтивно ясно, що рух із загасаючими коливаннями виникне, якщо крива D у крапці рівноваги Q опускається до осі абсцис OP крутіше (під більшим кутом), чим крива S. Вибуховий коливальний рух виникає у випадку, коли крива D менш крута стосовно осі OP, чим S (кут нахилу кривій D до осі OP менше кута нахилу S). При рівних кутах нахилу D і S виникають регулярні коливання, тобто незатухаючі й невибухові.

Рішення можна одержати алгебраїчно для випадку лінійних функцій попиту та пропозиції: D=α+a, S=β+b. Значення рівноваги $\overline{P}$ й $\overline{X}$ будуть задані рівняннями: $\overline{X} = \alpha + a\overline{P} = \beta + b\overline{P}$, тобто

$$\overline{P} = \frac{\alpha - \beta}{b - a}, \overline{X} = \frac{b\alpha - a\beta}{b - a} \tag{3.14}$$

Дискретна динамічна модель задається рівнянням:

$$X_t = \alpha + aP_t = \beta + bP_{t-1} \tag{3.15}$$

Шукаємо спочатку рішення, що дає рівновагу. Для цього покладемо $P_t = \overline{P}$ і $X_t = \overline{X}$. Для всіх значень t

$$\overline{X} = \alpha + a\overline{P} = \beta + b\overline{P} \tag{3.16}$$

Одержуємо ті ж значення $\overline{P}$ й $\overline{X}$, що й в (3.14). Отже, якщо в якому-небудь періоді існували ціни й обсяги, що забезпечують рівновагу, то в динамічній моделі (3.15) вони зберігаються й у наступних періодах. Статична рівновага погодиться із цією моделлю. Віднімемо рівняння (3.16) з (3.15) і покладемо $p_t=P_t-\overline{P}$, $x_t=X_t-\overline{X}$. Тоді

$$X_t=ap_t=bp_{t-1} \tag{3.17}$$

Рівняння (3.17) аналогічні (3.15), за винятком того, що вони описують відхилення від рівнів рівноваги (тепер уже відомо, що такі існують). Обоє ці рівняння є різницевими рівняннями першого порядку. Покладемо c=b/a й підставимо його в рівняння (3.17), так що різницеве рівняння відносно p_t буде: $p_t=cp_{t-1}$.

При даному значенні p_0 у момент t = 0 рішення легко виходить шляхом ітерації:

$$p_t=p_0c^t, P=\overline{P}+(P_0-\overline{P})c^t \tag{3.18}$$

Обсяги покупок-продажів у кожний період визначаються з рівняння (3.17).

Звичайно крива попиту йде вниз (a < 0), а крива пропозиції — нагору (b > 0), тобто з = b/a < 0. У цьому випадку покладемо r=$|c| = b/(-a)$, так що r буде позитивно. Тоді p_t – $p_0(k)r^t$ і послідовні значення p_t при t=0, 1, 2, 3,... будуть відповідно p_0, $-p_0r$, $-p_0r^2$, $-p_0r^3$,…,…, так що p_t приймає по черзі позитивні й негативні значення. Отже, чергуються й знаки P_t, які по черзі будуть розташовуватися вище й нижче $\overline{P}$. Є наступні три можливості:

1) b>(-a) — кут нахилу S (до OP) більше, ніж кут нахилу D. У цьому випадку r>1, і ряд послідовних значень p_t є нескінченно зростаючим по абсолютній величині. Отже, P→∞, і має місце вибухове коливання (при чергуванні знаків);

2) b=(-a) — кути нахилу D і S рівні. У цьому випадку r=1, і ряд значень p_t буде просто складатися із чергування p_0 і $(-p_0)$. Тому P_t буде послідовно більше й менше P на ту саму величину, рівну первісній розбіжності (P_0-$\overline{P}$), тобто буде мати місце регулярне коливання (із чергуванням знаків).

3) b<(-a) — кут нахилу D (до OP) більше, ніж S. У цьому випадку r < 1, і послідовність p_t зменшується по абсолютній величині. Виходить, P_t→P послідовно ліворуч і праворуч, тобто прагне із загасаючими коливаннями до рівня рівноваги.

У випадку (3), чим більше буде -*a* стосовно b, тобто чим крутіше D порівняно з S, тим скоріше будуть загасати коливання й тем швидше P_t буде прагнути к $\overline{P}$. Початкові збурювання також впливають на амплітуду коливання. Ніж далі P_0 від $\overline{P}$, тим більше буде розмах коливань і тим довше проміжок часу, необхідний для їхнього припинення.

Необхідно відзначити, що випадок (2) із триваючими й правильними коливаннями настільки рідкий, що його можна вважати майже тривіальним - на базі його не можна побудувати ніякої теорії циклу.

Проведемо аналіз случаючи (3). Незважаючи на можливе заперечення, що складається в тім, що загасаючі коливання «нереальні», можна запропонувати дуже простий розвиток моделі (3) із загасаючими коливаннями, що дозволяє представити рух P_t із триваючими коливаннями в часі. Для цього замість кривих попиту та пропозиції, незмінних у часі, візьмемо криві, які під впливом зовнішніх сил змінюються в часі або регулярно, або циклічно, або випадково, або як-небудь інакше.

Тоді ще до припинення коливань, які зображені на рис. 3.3, яке-небудь зрушення в кривій D або S приведе до збурювання, і коливання з'являться знову. Наприклад, Q_0 могла перебувати в крапці рівноваги або поблизу її до зрушення нагору кривій D до положення, показаному на рис. 3.1. Тоді коливання будуть відбуватися вищеописаним образом, триваючи, скажемо, до крапки Q_3, де коливальний рух буде порушено зрушенням нагору кривій S. Виникне, отже, коливальний рух із ще більшою амплітудою, що поступово припиниться до появи якого-небудь нового збурювання. Для лінійної моделі можливо алгебраїчне тлумачення у випадку паралельного переміщення кривих попиту та пропозиції. Рівняння (3.15) тоді буде мати вигляд:

$$X_t = \alpha_t + aP_t = \beta_t + bP_{t-1} \qquad (3.19)$$

де α_t β_t характеризують зрушення в момент t=0, 1, 2, 3,.... Різницевим рівнянням щодо ціни буде:

$$P_t = \frac{b}{a} P_{t-1} + \frac{\beta_t - \alpha_t}{a} \qquad (3.20)$$

Для рішення рівняння (3.20) необхідно лише визначити різниця β_t- α_t зрушень у часі попиту та пропозиції.

У безперервній моделі ціна є функція часу P(t). Попит та пропозиція (потоки в одиницю часу) суть також функції, часу. Попередня павутиноподібна модель ураховувала запізнювання пропозиції. Цьому буде грубо відповідати передумова про зміну ціни на стороні попиту, а не пропозиції. Тоді одержимо модель, рівносильну моделі з безперервним запізнюванням пропозиції. Це запізнювання має просту показову форму. D(t) залежить від P и d/dt, а S(t) - тільки від P. Модель діє, як і в попередньому випадку, а саме: у кожний момент ціна P установлюється так, щоб попит повністю поглинав пропозицію, тобто X(t) і P(t) задовольняли рівнянню:

Якщо функції лінійні, то

$$X = \alpha + aP + a_1 \frac{dP}{dt} = \beta + bP \qquad (3.21)$$

Покладемо P(t)= $\overline{P}$ і X(t)=$\overline{X}$ для всіх t, тобто для спільного положення рівноваги обох змінних:

$$\overline{X} = \alpha + a\overline{P} = \beta + b\overline{P} \qquad (3.22)$$

Віднімемо (3.22) з (3.21) і покладемо p=P-$\overline{P}$ і x=X-$\overline{X}$. Тому що *dp/dt* = *d/dt*, то:

$$x = ap + a_1 \frac{dp}{dt} = bp \qquad (3.23)$$

Рівняння (6.21) і (6.22) являють собою диференціальні рівняння першого порядку. Покладемо $c = \frac{b-a}{a_1}$Тоді диференціальне рівняння відносно P(t) буде мати вигляд:

$$\frac{dp}{dt} = cp \qquad (3.24)$$

Для рішення помітимо, що $\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\ln p$. Тоді $\frac{d}{dt}\ln p = c$, тобто lnp=const+ct, тобто $p = p_0e^{ct}$ або $P = \overline{P} + (P_0 - \overline{P})e^{ct}$.

В звичайному випадку, якщо $a < 0$, $a_1 < 0$, $b > 0$, то з < 0, де *з = b-a/a₁*

Отже, ціна P(t) рухається в часі монотонно до $\overline{P}$ - ціни рівноваги, тому що різниця $p \to 0$ подібно показової функції e^{-t}. Менш звичайний випадок, коли також $b < 0$. Але якщо тільки -b<-a, тобто кут нахилу D до осі OP у площині OPX більше, ніж кут нахилу S, те приходимо до того ж результату, що й у першому випадку. Диференціальне рівняння цієї моделі має менше рішень, чим відповідне кінцево-різницеве рівняння, наведене вище.

Розглянуті павукоподібна й безперервна моделі дуже прості й добре відомі. Вони є частково динамічними, тому що встановлюють співвідношення на ринку тільки одного товару й ураховують ціну лише його одного, а не ціни інших товарів і доходи. Проте, вони містять основні формулювання динаміки й дозволяє розкрити деякі найважливіші властивості, загальні для всіх динамічних моделей попиту та пропозиції.

Контрольні запитання за третьою темою

1. Основні припущення динамічної моделі В. Леонтьєва.
2. Загальний вид рівнянь динамічної моделі В. Леонтьєва.
3. Поняття про допустимість станів і траєкторії динамічної моделі Леонтьева.
4. Рішення динамічної моделі В. Леонтьєва у випадку відсутності екзогенного споживання й з його обліком.
5. Аналіз економічного росту при різних траєкторіях споживання на основі динамічної моделі В. Леонтьєва.
6. Дискретна й безперервна моделі попиту та пропозиції.
7. Методи рішення дискретної й безперервної моделей попиту та пропозиції.

Завдання до лабораторних робіт за темами Модуля 1

Динамічна модель Леонтьєва. Побудова траєкторії розвитку

Розглянемо умовний приклад для динамічної моделі Леонтьєва. Нехай економіка агрегована до двох галузей, відомі матриці прямих матеріальних витрат, пріростної капіталоємності і початковий стан системи:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,9 \\ 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Визначимо траєкторію розвитку системи. Для цього обчислимо матрицю повної пріростної капіталоємності:

$$(E-A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-0,1 & 0-0,2 \\ 0-0,2 & 1-0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,8 \\ -0,8 & 0,7 \end{pmatrix}; \qquad (E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,19 & 0,34 \\ 0,34 & 1,53 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = B(E-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,25 & 1,64 \\ 0,73 & 0,78 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власні числа цієї матриці, вирішуючи характеристичне рівняння:

$$\left|\tilde{B} - \lambda E\right| = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1,25 & 1,64 \\ 0,73 & 0,78 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,25-\lambda & 1,64 \\ 0,73 & 0,78-\lambda \end{pmatrix} = (1,25-\lambda)(0,78-\lambda) - 0,73 \cdot 1,64 = \lambda^2 - 2,03\lambda - 0,22 = 0;$$

$$\lambda_1 = 2,14; \qquad \lambda_2 = -0,10.$$

Отже, показники міри експонент в загальному рішенні дорівнюють:

$$Y(t) = \sum_l d_l K_l e^{\frac{1}{\lambda_l}t}$$

$$\rho_1 = \frac{1}{\lambda_1} = 0,47, \quad \rho_2 = \frac{1}{\lambda_2} = -9,69$$

Визначаємо відповідні власні вектори K_1 і K_2 з точністю до множника.

Для $\lambda_1 = 2,14$ характеристичне рівняння матриці $\tilde{B}$ прийме вигляд:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1,25-\lambda_1 & 1,64 \\ 0,73 & 0,78-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,25-2,14 & 1,64 \\ 0,73 & 0,78-2,14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,89 & 1,64 \\ 0,73 & -1,36 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -0,89 & 1,64 \\ 0,73 & -1,36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{cases} -0,89x_1 + 1,64x_2 = 0 \\ 0,73x_1 - 1,36x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0,54 \end{cases}$$

Відповідно для $\lambda_2 = -0,1$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1,25 - \lambda_2 & 1,64 \\ 0,73 & 0,78 - \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,35 & 1,64 \\ 0,73 & 0,88 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1,35 & 1,64 \\ 0,73 & 0,88 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{cases} 1,35x_1 + 1,64x_2 = 0 \\ 0,73x_1 + 0,88x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -0,83 \end{cases}$$

Зрозуміло, що траєкторія системи є допустимою, оскільки єдиний доданок з позитивним показником ступеня складається з позитивних компонент.

Визначимо, виходячи з початкових умов, коефіцієнти d_1:

$$d_1K_1 + d_2K_2 = Y(0) \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 + d_2 = 25 \\ 0,54d_1 - 0,83d_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 26,09 \\ d_2 = -1,09 \end{cases}.$$

Остаточно траєкторія розвитку має вигляд

$$Y(t) = d_1 \cdot K_1 \cdot e^{\rho_1 t} + d_2 \cdot K_2 \cdot e^{\rho_2 t}$$

$$Y(t) = 26,09 * \begin{pmatrix} 1 \\ 0,54 \end{pmatrix} e^{0,47t} - 1,09 * \begin{pmatrix} 1 \\ -0,83 \end{pmatrix} e^{-9,69t}.$$

Траєкторія розвитку двохгалузевої економічної системи на період 10 років представлена в таблиці.

t	Y_1	Y_2	
0	25	15	
1	41,74216	23,41933	
2	66,7068	36,8738	
3	106,6018	58,37502	
4	170,3567	92,73537	
5	272,2411	147,6455	
6	435,059	235,3954	
7	695,2526	375,6254	
8	1111,059	599,7222	
9	1775,545	957,8435	
10	2837,436	1530,145	4367,581

Сукупний дохід через 10 років складе: $Y = Y_1 + Y_2 = 2837,436 + 1530,145 = 4367,581$

Графічна зміна валового обсягу випуску (ВОП), тобто траєкторія розвитку представлена на рисунку.

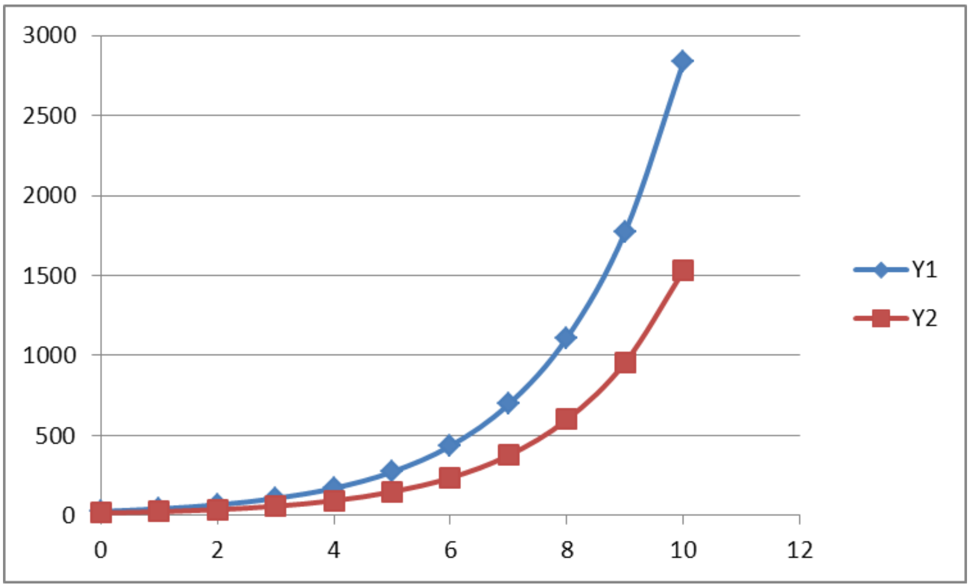


Рисунок. Траєкторія розвитку зміни ВОП

Зауваження. Зміна структурних параметрів може привести до якісно іншому розвитку системи, хоча параметри макромоделі збережуться.

Дослідження моделі Леонтьева дозволяє зробити наступний висновок: на відміну від макроекономічної моделі, яка при нульовому споживанні завжди має допустиму траєкторію, траєкторія структурної моделі навіть при нульовому споживанні може бути недопустимою унаслідок певних структурних параметрів.

Економічне зростання при різних траєкторіях споживання

Проведемо аналіз траєкторій економічного розвитку, що враховують динаміку споживання. Подамо загальний розв'язок системи $Y(t) = B(E - A)^{-1} \dfrac{dY(t)}{dt} + C(t)$, (де C(t)-вектор-стовпець споживання) у вигляді суми загального розв'язку однорідної системи $Y_1(t)$ і частинного розв'язку неоднорідної системи $Y_2(t)$:

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t). \qquad (1)$$

Будемо розглядати траєкторію споживання у вигляді $C(t)=C(0)e^{n}$, тобто вважаючи, що компоненти вектора споживання зростають однаковим постійним темпом $r \geq 0$, причому $C(0) \geq 0$. (При $r=0$ маємо $C(t)=C(0)=const.$)

Частинний розв’язок $Y_2(t)$ визначається в такий спосіб:

$$Y_2(t)=[E-rB(E-A)^{-1}]^{-1}C(0)e^{rt}, \tag{2}$$

а невизначені постійні q_1 загального розв’язку (що входять у $Y_1(t)$)знаходяться з розв’язку системи рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i K_i = Y(0)-[E-rB(E-A)^{-1}]^{-1}C(0). \tag{3}$$

Таким чином, загальний розв’язок $Y(t)=B(E-A)^{-1}\frac{dY(t)}{dt}+C(t)$ набуває вигляду:

$$Y(t)=\sum_{i=1}^{n} d_i K_i e^{\lambda it} + [E-rB(E-A)^{-1}]^{-1}C(0)e^{rt}. \tag{4}$$

При відомих (однозначно визначених) значеннях K_i, λ_i конкретні розв’язки знаходяться шляхом задання темпу приросту споживання r і розрахунку відповідних заданому r значень d_i.

Визначити розв’язки щодо r у двогалузевій системі.

r не повинно перевищувати технологічний темп приросту. Якщо $r>\lambda$ випливає:

а) доданок $Y_2(t)$ у (4) зростає за модулем швидше доданка, що містить $e^{\lambda t}$;

б) матриця $rB(E-A)^{-1}$ непродуктивна і в силу цього вектор $Y_2(t)$ не може бути невід’ємним.

Оскільки деякі компоненти $Y_2(t)$ від’ємні, то починаючи з деякого t і у векторі $Y(t)$ з’являються від’ємні компоненти, що економічно неприпустимо. Таким чином, доходимо висновку, що необхідною умовою існування економічно інтерпретованої траєкторії зростання національного доходу є $r>\lambda$.

Дійсно, невід’ємність $Y_2(t)$ згідно з $Y(t)=B(E-A)^{-1}\frac{dY(t)}{dt}$ еквівалентна нерівність $[E-rB(E-A)^{-1}]^{-1} C(0) \geq 0$.

Це означало б, що рівняння $Y\text{-}rB(E\text{-}A)^{-1}Y=C(0)$ при $C(0)\geq 0$ має невід'ємний розв'язок $Y=\hat{Y}$. У цьому випадку відповідно до визначення продуктивності матриця $rB(E\text{-}A)^{-1}$, будучи нерозкладною, виявилася б продуктивною. Тому умовою продуктивності $rB(E\text{-}A)^{-1}$ є нерівність $r<\lambda$.

Можуть бути проаналізовані якісно різні ситуації в рамках виконуваної умови $0<r\lambda<1$. Тут виявляються подібні властивості результатів макроекономічної і міжгалузевої моделі. Однак повної еквівалентності результатів не існує. Відмінності поведінки розв'язку (4) при різних r від поведінки розв'язку макромоделі $y(t)=\frac{1}{1-Br}c(0)e^{rt}$ пояснюються впливом міжгалузевих зв'язків, у тому числі галузевої структури початкових умов (вектор Y(0) і C_0.

Однією з найбільш характерних властивостей макромоделі відтворення національного доходу є існування траєкторії з незмінною функціональною структурою (співвідношенням споживання і нагромадження) і постійним темпом приросту $r_0=\frac{1-c_o}{By(0)}$, де c_0 – задане число, $c_0<y(0)$.

Для міжгалузевої моделі при заданих векторах $y(0)\geq 0$ $C_0\leq Y(0)$ можна порушити питання про існування траєкторії пропорціонального зростання (при незмінній галузевій і функціональній структурі) з темпом $r_0>0$. Шуканий темп r_0 повинен задовольняти систему з n рівнянь: $r_0B(E\text{-}A)^{-1}Y(0)=Y(0)\text{-}C_0$. У загальному випадку така система (перевизначена) не має розв'язку.

Можлива інша постановка питання про пропорційне зростання з постійним темпом.

У макромоделі можна, зафіксувавши $0<r_0<1/B$, знайти c_0, що задовольняє умову $0<c_0<y(0)$. Аналогічна задана формально реалізується і для міжгалузевої моделі. Розрахунок C_0 при заданих Y(0) і $r_0<\lambda$ здійснюється за формулою

$$C_0=E\text{-}r_0B(E\text{-}A)^{-1}Y(0).$$

Може виявитися, однак, що одержувана структура вектора C_0 неприйнятна з погляду соціально-економічних критеріїв.

Приклад

Розглянемо економіку двох галузей. Нехай

$$A=\begin{bmatrix}0{,}2 & 0{,}3\\ 0{,}3 & 0{,}4\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}5\\ 1{,}0 & 0{,}8\end{bmatrix}\qquad X(0)=\begin{bmatrix}50\\ 50\end{bmatrix}\qquad Y(0)=\begin{bmatrix}25\\ 15\end{bmatrix}$$

Макроекономічні параметри: a=0,6; b=1,4.

$$(E-A)^{-1}=\begin{bmatrix}1{,}54 & 0{,}77\\ 0{,}77 & 2{,}05\end{bmatrix}\qquad \tilde{B}=\begin{bmatrix}1{,}16 & 1{,}41\\ 2{,}16 & 2{,}41\end{bmatrix}$$

Повна капіталоємкість валового продукту дорівнює 3,5.

Знаходимо всі елементи розв'язку:

$$Y_1(t)=40{,}4\begin{bmatrix}0{,}35\\ 0{,}61\end{bmatrix}e^{0{,}275t}+9{,}6\begin{bmatrix}1{,}15\\ -1{,}00\end{bmatrix}e^{-14{,}2t}$$

Технологічний темп приросту дорівнює 0,275. Йому відповідає власний вектор $\hat{K}=\begin{pmatrix}0{,}35\\ 0{,}61\end{pmatrix}$, що визначає структуру вектора Y(t).

Використовуючи ці вихідні данні, знайдемо розв'язки за формулою (4)

$$Y(t)=\sum_{i=1}^{n} d_i K_i e^{\lambda it}+[E-rB(E-A)^{-1}]^{-1}C(0)e^{rt},$$

при трьох значеннях темпу приросту споживання: r=0,2; r=0,056; r=0,10.

Маємо

1) $y_1=2{,}844e^{0{,}275t}+1{,}156e^{-14{,}18t}+21$;

   $y_2=5{,}003e^{0{,}275t}-1{,}003e^{-14{,}18t}+11$;

2) $y_1=1{,}195e^{-14{,}18t}+23{,}805e^{0{,}056t}$;

   $y_2=-1{,}036e^{-14{,}18t}+16{,}03e^{0{,}056t}$;

3) $y_1=-3{,}509e^{0{,}275t}+1{,}275e^{-14{,}18t}+27{,}284e^{0{,}1t}$;

   $y_2=-6{,}173e^{0{,}275t}-1{,}063e^{-14{,}18t}+22{,}236e^{0{,}1t}$.

Відображення цих траєкторій у просторі Y(t) показано на рисунку 2.

При постійному рівні споживання (r=0) темп приросту $y_1(t)$ і $y_2(t)$ швидко наближаються до технологічного темпу приросту λ=0,275; при цьому встановлюються пропорції $y_1:y_2$ = 2,84:5,00.

Траєкторія, що відповідає r=0,056, найбільше відповідає типу пропорційного зростання з постійною нормою нагромадження. У цьому випадку, починаючи з деякого моменту часу всі функціональні і галузеві компоненти валового продукту і національного доходу3 зростають темпом, практично рівним q_0=0,056, а структура виробництва і використання продукції стабілізується (зокрема, y_1:y_2 = 23,8:16,0).

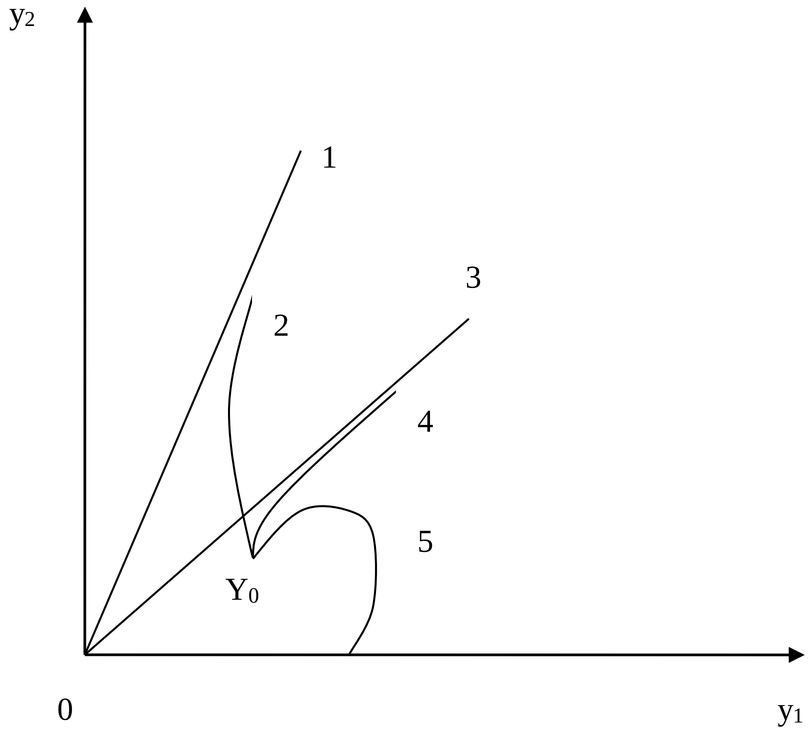


Рис. 1. Траєкторії продукції, використовуваної на споживання *і* нагромадження, при постійних темпах зростання споживання: 1 – магістраль; 2- $0 \le r \le r_0$; 3 – асимптотична траєкторія зростання з постійною нормою нагромадження; 4 – $r=r_0$; 5 – $r>r_0$.

Нарешті, при r=0,10 зростання $y_1(t)$ і $y_2(t)$ відбувається тільки на початковому відрізку траєкторії, після чого починає зменшуватися обсяг y_2, а потім і y_1. Одночасне зменшення $y_1(t)$ і $y_2(t)$ означає, що нагромадження і прирости виробництва стають від'ємними, тобто розв'язок втрачає допустимість. Далі і траєкторія Y(t) досить швидко йде у від'ємну область.

Варіанти завдань для самостійного закріплення матеріалу

1. Економічна система характеризується випуском продукції в двох галузях виробництва, нагромадження капіталу пропорційне темпам приросту валового випуску по галузям. Матеріальні витрати галузей описуються коефіцієнтами прямих витрат матриці Леонтьєва.

Коефіцієнти матриці матеріальних витрат (А) та коефіцієнти матриці нагромадження капіталу (В) по галузям становлять:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

За допомогою динамічної моделі Леонтьєва визначити траєкторію розвитку двохгалузевої економічної системи на період моделювання 10 років при наступних початкових даних: кінцевий продукт (Y) на початок моделювання:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}$$

2. Економічна система характеризується випуском продукції в двох галузях виробництва, нагромадження капіталу пропорційне темпам приросту валового випуску по галузям. Матеріальні витрати галузей описуються коефіцієнтами прямих витрат матриці Леонтьєва.

Коефіцієнти матриці матеріальних витрат (А) та коефіцієнти матриці нагромадження капіталу (В) по галузям становлять:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

За допомогою динамічної моделі Леонтьєва визначити траєкторію розвитку двохгалузевої економічної системи та період моделювання, за яким обсяги кінцевого продукту (Y) в галузі 2 зростуть втричі, якщо на початок моделювання Y(0)=(10; 50)

3. Економічна система характеризується випуском продукції в двох галузях виробництва, нагромадження капіталу пропорційне темпам приросту валового випуску по галузям. Матеріальні витрати галузей описуються коефіцієнтами прямих витрат матриці Леонтьєва.

Коефіцієнти матриці матеріальних витрат (А) та коефіцієнти матриці нагромадження капіталу (В) по галузям становлять:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

За допомогою динамічної моделі Леонтьєва визначити траєкторію розвитку двохгалузевої економічної системи за 10 років та встановити початкове значення кінцевого продукту у галузі 1 Y1(0), згідно якого сукупні обсяги кінцевого продукту в галузях складуть 6000 од., якщо на початок моделювання обсяг кінцевого продукту у галузі 2 складає Y2(0)=200 од.

4. Економічна система характеризується випуском продукції в двох галузях виробництва, нагромадження капіталу пропорційне темпам приросту валового випуску по галузям. Матеріальні витрати галузей описуються коефіцієнтами прямих витрат матриці Леонтьєва.

Коефіцієнти матриці матеріальних витрат (А) та коефіцієнти матриці нагромадження капіталу (В) по галузям становлять:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

За допомогою динамічної моделі Леонтьєва визначити траєкторію розвитку двохгалузевої економічної системи на період моделювання 10 років при наступних початкових даних: кінцевий продукт (Y) на початок моделювання Y(0)=(10; 50).

Тестові завдання до Модуля 1

1. Економічна динаміка -

 напрямок в економічній теорії, що вивчає стан соціально-економічних систем у певний момент часу.

 напрямок в економічній теорії, що вивчає моделі розвитку соціально-економічних явищ

 напрямок в економічній теорії, що охоплює різні концепції складних процесів і явищ, що виникають у соціально-економічних системах.

2. Динамічний підхід вивчає -

 стан системи в різних проміжках часу

 стан системи протягом певного часу

 стан економічної системи в дискретний момент часу

3. Статистичний підхід вивчає-

 стан економічної системи в дискретний момент часу

 стан системи протягом певного часу

 стан системи в різних проміжках часу

4. Об'єктом економічної динаміки є

 складні динамічні економічні системи

 поведінка динамічних економічних систем

 економіко-математичні методи й моделі

5. Предметом економічної динаміки є

 складні динамічні економічні системи

 поведінка динамічних економічних систем

 економіко-математичні методи й моделі

6. Показник абсолютного приросту за одиницю часу характеризує

□ швидкість зміни рівня

□ інтенсивність зміни

□ відносну швидкість зміни

7. Показник темпу росту за одиницю часу характеризує

□ швидкість зміни рівня

□ інтенсивність зміни

□ відносну швидкість зміни

8. Показник темп приросту за одиницю часу характеризує

□ швидкість зміни рівня

□ інтенсивність зміни

□ відносну швидкість зміни

9. Статична модель міжгалузевого балансу в матричній формі має вигляд

□ Y=AX+X

□ X(t) = AX(t) + B*d/dt + C(t);

□ X=AX+Y

10. Матриця коефіцієнтів повної приростної капіталомісткості виглядає

□ (E - A)-1

□ B(E - A)-1

□ C(t)

11. Чи може зміна структурних параметрів привести до якісно іншого розвитку системи

□ ні, при цьому параметри макромоделі зміняться

□ ні, при цьому параметри макромоделі збережуться

□ так, при цьому параметри макромоделі зміняться

□ так, при цьому параметри макромоделі збережуться

12. Умова продуктивності, забезпечувана теоремою Фробеніуса-Перрона, для матриці В*

 r < 1/S

 r > 1/S

 r = 1/S

13. Яке із припущень при побудові динамічної моделі В.Леонтьева є невірним

 норми виробничих витрат залежать від обсягу випускає продукции

 у кожній галузі (або подотрасли) є єдина технологія виробництва

 не допускається заміщення у виробництві одних видів продукції іншими.

14. Що характеризує параметр S у павукоподібній моделі попиту та пропозиції

 обсяг пропозиції в даний період часу залежно від цін, керуючих ринком у попередній момент часу

 обсяг пропозиції в даний період часу залежно від цін, керуючих ринком у сучасний момент часу

 обсяг попиту в даний період часу залежно від цін, керуючих ринком у попередній момент часу

 обсяг попиту в даний період часу залежно від цін, керуючих ринком у сучасний момент часу

15. Що характеризує параметр D у павукоподібній моделі попиту та пропозиції

 обсяг попиту в даний період часу залежно від цін, керуючих ринком у попередній момент часу

 обсяг пропозиції в даний період часу залежно від цін, керуючих ринком у сучасний момент часу

 обсяг пропозиції в даний період часу залежно від цін, керуючих ринком у попередній момент часу

☐ обсяг попиту в даний період часу залежно від цін, керуючих ринком у сучасний момент часу

16. У моделі попиту та пропозиції у випадку якщо параметр $b>(-a)$

☐ має місце регулярне коливання

☐ має місце вибухове коливання

☐ має місце загасаючі коливання до рівня рівноваги

17. У моделі попиту та пропозиції у випадку якщо параметр $b=(-a)$

☐ має місце регулярне коливання

☐ має місце вибухове коливання

☐ має місце загасаючі коливання до рівня рівноваги

18. У моделі попиту та пропозиції у випадку якщо параметр $b<(-a)$

☐ має місце регулярне коливання

☐ має місце вибухове коливання

☐ має місце загасаючі коливання до рівня рівноваги

19. У якому випадку система не перебуває в стані рівноваги

☐ попит перевищує пропозиція

☐ пропозиція перевищує попит

☐ попит дорівнює пропозиції

20. Припущення Маршалла необхідне при побудові моделі рівноваги

☐ пропозиція прагне до збільшення, якщо ціна надлишкового попиту позитивна

☐ пропозиція прагне до зменшення, якщо ціна надлишкового попиту негативна

☐ пропозиція прагне до збільшення, якщо ціна надлишкового попиту негативна

☐ пропозиція прагне до зменшення, якщо ціна надлишкового попиту позитивна

МОДУЛЬ 2

НЕСТІЙКІСТЬ І НЕЛІНІЙНІСТЬ ЯК ДЖЕРЕЛО НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Тема 4. Рівновага та нерівновага, стійкість та нестійкість динамічних моделей економіки

4.1. Рівновага й стійкість динамічних систем

Усяка динамічна система в будь-який момент часу характеризується своїм станом і напрямком руху.

Зі станом системи пов'язане поняття рівноваги. Під *рівновагою* розуміється стан, що зберігається як завгодно повинне при відсутності зовнішніх впливів. Таким чином, *рівноважний стан системи* – це такий її стан, з якого система не вийде під дією тільки внутрішніх причин.

Під впливом зовнішніх впливів рівновага може бути порушено, і система перейде в інший стан. У цьому випадку в дію вступає друга характеристика динамічної системи – *поведінка* (стійка й нестійка).

Під *стійкістю* розуміється здатність системи повертатися в рівноважний стан. *Нестійка* система продовжує подальше видалення від вихідного стану.

Поведінка системи також може бути піддано деяким змінам у часі. Цієї можливості відповідає поняття стаціонарності. *Стаціонарність* є властивістю поведінки, процесів, що відбуваються в системі, і означає, що характер функціонування системи не змінюється згодом. (Наприклад, функціонування виробничо-економічної системи можна вважати стаціонарним, якщо технологія виробництва не міняється протягом розглянутого періоду часу).

Класифікація станів рівноваги динамічних систем:

1) *Прості стани рівноваги;*
2) *Вузли (невироджені, вироджені, дикритичні);*
3) *Сідло;*
4) *Фокус.*

Формальне подання стійкості динамічних систем. Динамічні властивості економічних систем можуть бути описані диференціальними рівняннями. У загальному випадку це рівняння виду:

$$y' = f(y,t) \tag{4.1}$$

У загальному виді рішення цього рівняння буде представлено функцією:

$$y' = f(t, y_0, t_0) \tag{4.2}$$

Рішення диференціального рівняння містить у собі час t і початкові умови (y_0 ,t_0).

Якщо $f(y_0;t) = 0$ при різних t, це значить, що система визначена, тобто рішення знайдені й система стабільна (стійка).

Для складних систем, зокрема економічних, стійкість означає, що при виникненні збурювання, що злегка виводить систему зі стану рівноваги, система буде прагнути до відновлення колишнього стану, тобто всі її наступні стани будуть перебувати поблизу стану рівноваги (рис.4.1).

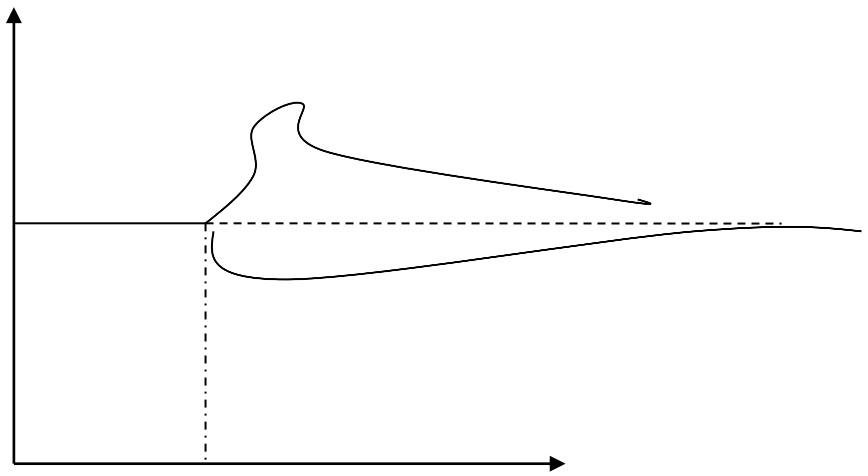


Рис. 4.1. Стійкість для динамічних систем

Принцип стійкості: $y'(t) = y_B(t) + y_\Pi(t)$

y(t) – змушене рішення;

$y_\Pi(t)$ - перехідна складова.

Система є стійкої, якщо при $t \longrightarrow \infty$ перехідна складова прагне до нуля $y_\Pi(t) \longrightarrow 0$.

4.2. Критерій стійкості Гурвица

Найпоширенішим алгебраїчним критерієм стійкості сформулював в 1895 Гурвиц.

Розглянемо критерій Гурвица без доказу.

Для характеристичного рівняння $a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1} p + a_n = 0$ (де р – деяке комплексне число, що є коренем характеристичного рівняння) складемо квадратну матрицю коефіцієнтів розмірністю $n \times n$.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & ... & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & ... & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & ... & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

Матриця будується в такий спосіб. По діагоналі від лівого верхнього до правого нижнього кута проставляються всі коефіцієнти один за іншим від a_1 до a_n. Кожний ряд доповнюється коефіцієнтами зі зростаючими індексами ліворуч праворуч так, щоб чергувалися ряди з непарними й парними індексами. У випадку відсутності даного коефіцієнта, а також, якщо індекс його <u>менше нуля</u> або <u>більше *n*</u> на його місце <u>пишеться нуль</u>.

Критерій стійкості зводиться до того, що при $a_0>0$ повинні бути більше нуля всі n визначників Гурвица, отримані із квадратної матриці коефіцієнтів. Визначники Гурвица складаються за наступним правилом (4.3).

$$\Delta_1=a_1>0 \quad (4.4)$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \succ 0 \quad (4.5)$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \quad (4.6)$$

Останній визначник містить у собі всю матрицю. Але, тому, що в останньому стовпці матриці всі елементи (крім нижнього) рівняються нулю, останній визначник Гурвица виражається через передостанній таким способом:

$$\Delta_n=a_n\Delta_{n-1}>0 \tag{4.7}$$

Однак у стійкій системі передостанній визначник теж повинен бути позитивним. Тому умова позитивності останнього визначника зводиться до умови $a_n>0$.

Умова знаходження системи в рамках стійкості можна одержати, дорівнявши до нуля останній визначник: $\Delta_n=0$ за умови, що інші визначники позитивні. У такому випадку умова (4.7) розбивається на два: $a_n=0$ і $\Delta_{n-1}=0$. Перша умова відповідає границі стійкості першого типу й друга - границя стійкості другого типу.

Розкриваючи визначники, що фігурують у загальному формулюванні критерію стійкості Гурвица, можна одержати критерії стійкості для окремих випадків - систем першого, другого, третього й більше високих порядків.

1. *Рівняння першого порядку:*

$$a_0p+a_1=0 \tag{4.8}$$

Для цього рівняння критерій Гурвица дає: $a_0>0$; $\Delta_1=a_1>0$

Т.е. коефіцієнти характеристичного рівняння повинні бути позитивними.

2. *Рівняння другого порядку:*

$$a_0p^2+a_1p+a_2=0 \tag{4.9}$$

Для цього рівняння критерій Гурвица вимагає виконання $a_0>0$; $\Delta_1=a_2>0$

Таким чином, і для рівняння другого порядку *необхідною й достатньою умовою* є *позитивність всіх коефіцієнтів* характеристичного рівняння.

3. *Рівняння третього порядку.*

$$a_0p^3+a_1p^2+a_2p+a_3=0 \tag{4.10}$$

Для цього рівняння умови наступні: $a_0>0$; $\Delta_1=a_1>0$;

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_a - a_0a_3 \succ 0$$

Таким чином, для рівняння 3-го порядку вже недостатньо умови позитивності всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння. Необхідно ще виконання наступного співвідношення між коефіцієнтами: $a_1a_2>a_0a_3$.

4.3. Стохастична стійкість

Детерміністична теорія стійкості являє собою один з розділів якісної теорії динамічних систем. Більшість результатів стосується певних якісних або кількісних (але не пов'язаних з дійсним обчисленням рішень) властивостей диференціальних рівнянь.

Завдання стохастичної стійкості виникають у теорії керування при розгляді систем, на які впливають зовнішні неконтрольовані, випадкові впливи. Якщо при цьому відома бажана область роботи системи, то завдання оцінки ймовірності знаходження в цій області є досить практичними.

Розглянемо строго Марковский процес x_t, з невипадковою початковою умовою x_0 з непустого відкритої множиною R, що містить початок координат. Нехай P – деяка множина, що містить R Тоді виникає кілька завдань:

1) чи існує така множина R, що для деяких заданих p і P для будь-якого x∈R має місце нерівність:

$$P_x\{x_t \notin P \text{ при деякому } t < \infty\} \le p < 1 \tag{4.11}$$

2) У розвиток завдання (1): чи можна для кожних фіксованих P и p < 1 знайти відповідне R?

3) Знайти оцінку найбільшої множини R при фіксованих R і p із завдання (1).

4) Завдання рівномірної обмеженості: яке значення

$$\min_{x_0 \in R} P_{x_0}\{x_t \in P, \forall t < \infty\} \tag{4.12}$$

якщо P - задана обмежена множина?

5) Визначити найменшу множину, що містить всі межі з імовірністю 1 процесу x_t при $t \to\infty$.

6) Завдання на момент першого виходу: оцінити ймовірність

$P_x\{x_t \notin P$ при деякому $t < T\}$, $x \in R$. (4.13)

7) чи існує кінцевий Марковский момент часу τ, такий, що $x_t \to S$ при $t \to \infty$.

8) Нехай $\dot{x} = f(x) - p$, де p_t - деякий Марковский процес. Чи утворить пари (x_t, p_t) поворотний процес, тобто такий, у якого ймовірність виходу з довільної області дорівнює 1?

Розглянемо наступні визначення.

Визначення 1. Стан x = 0 називається *стійким з імовірністю 1*, тоді й тільки тоді, коли для будь-яких р > 0 і ε > про існує таке δ(р, ε) > 0, що

$$\|x_0\| < \delta(\rho, \varepsilon) \Rightarrow P_x\left\{\sup_{0 \le t < \infty} \|x_t\| \ge \varepsilon\right\} \le \rho \quad (4.14)$$

Визначення 2. Система називається стійкої стосовно трійки (Q, P, р), тоді й тільки тоді, коли

$$x \in Q \Rightarrow P_x\{x_t \in P, \forall t < \infty\} \ge \rho \quad (4.15)$$

Визначення 3. Стан x=0 у просторі станів називається *асимптотическі стійким з імовірністю 1* у тім і тільки тім випадку, коли воно стійке з імовірністю 1 і, крім того, $x_t \to 0$ для всіх x_0 з деякої околиці R цієї крапки. Якщо ж R є весь простір, то стан асимптотическі стійким у *великому*.

Визначення 4. При заданому стані x процес x_t називається *рівномірно обмеженим величиною ε с імовірністю p* у тому випадку, якщо

$$P_x\left\{\sup_{0 \le t < \infty} \|x_t\| \ge \varepsilon\right\} \le 1 - \rho \quad (4.16)$$

Визначення 5. Стан x=0 у просторі станів називається експоненціально стійким з імовірністю 1 у тім і тільки тім випадку, коли воно стійко з імовірністю 1 і при всіх T < ∞

$$P_x\left\{\sup_{T \le t < \infty} \|x_t\| \ge \varepsilon\right\} \le K e^{-\alpha T} \quad (4.17)$$

Де K < ∞, a > 0.

Визначення 6. Стан x=0 у просторі станів називається *нестійким з імовірністю p* у тім і тільки тім випадку коли

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{x\to 0} P_x\left\{\sup_{0\le t<\infty}\|x_t\|\ge\varepsilon\right\}=\rho \tag{4.18}$$

Визначення 7. Процес називається *фінально обмеженим з імовірністю 1 величиною m* у тому випадку, коли для кожного *x* з *E* існує таке кінцеве (з імовірністю 1) випадковий час τ(x), що

$$P_x\left\{\sup_{\tau(x)<t<\infty}\|x_t\|\le m\right\}=1 \tag{4.19}$$

або

$$\lim_{T\to\infty} P_x\left\{\sup_{T\le t<\infty}\|x_t\|> m\right\}=0 \tag{4.20}$$

Визначення 8. Позначимо через x_t і x'_t процеси, що відповідають початковим умовам x_0 x'_0. Процес називається *дорівнює обмеженим з імовірністю 1* у тому випадку, якщо при фіксованій нормі різниці $\|x-x'\|$

$$P_{x,x'}\left\{\sup_{0\le t<\infty}\|x_t-x'_t\|\ge\varepsilon\right\}\to 0,\varepsilon\to\infty \tag{4.20}$$

рівномірно по x, x'.

Визначення 9. Процес називається *рівномірно стійким з імовірністю 1* у тому випадку, якщо він задовольняє визначенню 8 і для будь-якого фіксованого $\varepsilon > 0$

$$P_{x,x'}\left\{\sup_{0\le t<\infty}\|x_t-x'_t\|\ge\varepsilon\right\}\to 0,\|x-x'\|\to 0 \tag{4.21}$$

рівномірно по x, x'.

Основним результатом теорії стохастичної стійкості є стохастичний аналог теореми Ляпунова про стійкість.

Теорема.

Припустимо, що для деякого $m > 0$ виконані умови:

1) функція *V(x)* ненегативна й безперервна на відкритій безлічі

$Q_m = \{x: V(x), m;\}$

2) x_t — безперервний праворуч строго Марковский процес, визначений, по крайньої мері, до якогось $\tau' > \tau_m = \inf\{t : x_t \notin Q_m\}$ із імовірністю 1;

3) нехай $\tilde{A}$ - оператор (аналог похідної), визначений у такий спосіб:

$$\tilde{A}f(x) = h(x) \Leftrightarrow \lim_{\delta \to 0} \frac{M_x[f(x_\delta)] - f(x)}{\delta} = h(x), \tag{4.22}$$

Причому межа задовольняє умові $\lim_{\delta \to 0} M_x[h(x_\delta)] = h(x)$. Позначимо $\tilde{A}_{Q_m}$ оператор процесу $x_{t \cap \tau_m}$;

4) функція $V(x)$ належить області визначення оператора $\tilde{A}_{Q_m}$;

5) для будь-якого ε > 0 виконано

$$P_x\left\{\sup_{t \ge s \ge 0} \|x_s - x\| > \varepsilon\right\} \to 0 \tag{4.23}$$

при t>0.

Нехай також $V(0) = 0$ і $x \in Q_m$.

Тоді система стійка стосовно $(Q_r, Q_m, 1\text{-}r/m)$ при будь-якому $r = V(x_0) = V(x) \le m$ у змісті визначення 2. Крім того, для майже всіх ω з $B_m = \{\omega : x_t \in Q_m, t < \infty\}$ маємо

$$V(x_{t \cap \tau_m}) \to \sigma(\omega) \le m \tag{4.24}$$

Якщо $V(x)>0$ при $x \ne 0, x \notin Q_m$, то початок координат простору станів системи стійко з імовірністю 1.

Дана теорема дозволяє вирішити питання, сформульовані спочатку цього підрозділу.

Контрольні запитання за четвертою темою

1. Що означають поняття рівноваги й стійкісті динамічних систем?
2. Формальне подання стійкості динамічних систем.
3. Принцип стійкості.
4. Сформулюйте критерій стійкості Гурвица.
5. За яким правилом складаються визначники Гурвица?
6. Виведіть критерій стійкості Гурвица для систем першого, другого, третього й більше високих порядків.
7. Розкрийте сутність стохастичної стійкості.
8. Що є основним результатом теорії стохастичної стійкості?

Тема 5. Нелінійні динамічні моделі економічних систем

5.1. Біфуркації в нелінійних динамічних системах

У рамках класичного підходу до моделювання економічних систем розглядаються лінійні системи, у яких малим сигналам на вході відповідає мала реакція на виході. Інтерес постнеокласичної науки, парадигматика якої багато в чому заставляється термодинамікою нерівноважних процесів, зміщається убік нелінійних систем, більше властивій природі.

«Нелінійність» - фундаментальний концептуальний вузол нової парадигми, яку можна назвати також парадигмою нелінійності. Більше того, у науковому середовищі з'явилося вираження «нелінійне мислення».

У математичному змісті нелінійність означає певний вид рівнянь, що містять шукані величини в ступенях більше одиниці або коефіцієнти, що залежать від властивостей середовища. Нелінійні рівняння можуть мати трохи (більше одного) якісно різних рішень.

Звідси виникає фізичний зміст нелінійності: безлічі рішень нелінійного рівняння відповідає безліч шляхів еволюції системи, які описані цими рівняннями (нелінійної системи).

Більше того, вивчаючи різні стадії розвитку процесів у відкритому нелінійному середовищі, можна чекати на якісні зміни картини процесів, у тому числі переструктурування - ускладнення й деградацію - організації середовища. Причому це відбувається не при зміні параметрів середовища, а як результат саморозвитку процесів у ній.

У світоглядному плані нове осмислення нелінійності відбилося в цілому ряді наукових ідей:

- ідеї багатоваріантності, альтернативності шляхів еволюції;
- ідеї вибору з даних альтернатив;
- ідеї темпу еволюції (швидкості розвитку процесів у середовищі);
- ідеї необоротності еволюції.

Феномен нелінійності можна охарактеризувати наступними особливостями.

1. Завдяки нелінійності має силу найважливіший принцип «розростання малого», або «посилення збурювань». За певних умов нелінійність може підсилювати збурювання, тобто робити малу відмінність більшим, макроскопічним по наслідках.

2. Певні класи нелінійних систем демонструють іншої важлива властивість - граничну чутливість. Нижче порога все зменшується, забувається, не залишає ніяких слідів у природі, науці, культурі, а вище порога, навпроти, багаторазово підсилюється.

3. Нелінійність породжує якась подоба квантового ефекту - дискретність шляхів еволюції нелінійних систем (середовищ). Тобто, на даному нелінійному середовищі можливий аж ніяк не будь-який шлях еволюції, а лише певний спектр цих шляхів.

4. Нелінійність означає можливість несподіваних, так званих емерджентних змін напрямку плину процесів. Нелінійність процесів робить принципово ненадійними й недостатніми прогнози.

З нелінійністю, крім того, зв'язані уявлення про можливості на певних стадіях сверхшвидкого розвитку процесів. В основі механізму такого розвитку лежить нелінійний позитивний зворотний зв'язок. Негативний зворотний зв'язок дає стабілізуючий афект, змушуючи систему повернутися до стану рівноваги. Позитивний зворотний зв'язок, підсилюючи відхід системи від рівноваги, повинна приводити лише до нестійкості й, здавалося б, до руйнування системи.

Як видно з попереднього викладу, використання нелінійних моделей динаміки складних систем починалося в природничих науках (фізику, хімії, біології), але потім захопило й науки, що вивчають життєдіяльність людського суспільства. У цей час спостерігається ріст інтересу економістів до нелінійних моделей, зокрема, адаптації фізичних (досить добре вивчених) моделей до економічних процесів. Свідченням цьому є виникнення такого напрямку, як еконофизика (econophysics), застосування теорії еволюції біологічних організмів до моделювання розвитку макро- і мікроекономічних об'єктів, використання теорії хаосу для керування й стабілізації економічної політики й ін. Далі розглянемо методи математичного моделювання, що реалізують принципи синергетики й нелінійності. Одним з основних результатів нелінійного підходу є визнання можливості різноманітного розвитку систем, наявності біфуркації.

5.2. Моделі економічних циклів Гудвина

Моделі Гудвина описують виникнення циклічних коливань в економічному розвитку.

Будемо вважати, що в будь-який момент часу t економіка має у своєму розпорядженні основний капітал K, що включає заводи, устаткування й т.д. Його обсяг змінюється зі швидкістю, рівної відношенню чистих капіталовкладень до загального зношування за даний період часу. Джерелом економічного доходу є обсяг виробництва Y і споживання C. Ці величини зв'язані між собою відносинами

$$C = \alpha Y + \beta$$
$$Y = C + \frac{dK}{dt} \qquad (5.1, 5.2)$$

де α і β - постійні параметри, такі, що α<0 и β < C.

β - частка постійного споживання, кіт не залежить від обсягу виробництва.

З рівняння (5.1) видно, що між обсягом виробництва й споживанням існує лінійна залежність. Рівняння (5.2) означає, що вся випущена продукція, яка або споживається, або йде на розширення виробництва. Припустимо далі, що основним капіталом K управляють так, щоб підтримувати на рівні, пропорційному обсягу виробництва. Якщо R - бажаний рівень основного капіталу в момент часу t, то

$$R = \gamma Y, \qquad (5.3)$$

де γ - деякий параметр.

Представимо перший варіант моделі. З рівнянь (1) і (2) треба, що

$$Y-\alpha Y=\beta+\frac{dK}{dt} \tag{5.4}$$

звідки

$$Y=\frac{\beta+K}{1-\alpha} \tag{5.5}$$

Зі співвідношень видно, що періодична поведінка величини Y може виникнути як наслідок коливань у капіталовкладенні К. У свою чергу, ці коливання виникають із прагнення зрівняти величини К и R (бажаний рівень основного капіталу). Нехай проводиться екстремальна політика капіталовкладень:

$$\frac{dK}{dt}=\begin{cases} K_1>0, еслиK<R \\ 0, еслиK=R \\ -K_2<0, еслиK>R \end{cases} \tag{5.6}$$

де K_1 і K_2 не залежать від часу t.

Розглянемо сутність формули (5.6). Якщо основний капітал менше бажаного рівня, то умова (5.6) відповідає максимальному рівню капіталовкладень (перша умова в (5.6)). Якщо ж бажаний рівень перевищений, то капіталовкладення нульові, а основний капітал амортизується зі швидкістю K_2 (третя умова (5.6)). $K_1>K_2$ означає, що при максимальному рівні капіталовкладень швидкість, з якої можуть будуватися нові підприємства більше швидкості амортизації й старіння.

З рівнянь (5.3) - (5.6) треба, що

$$R=\begin{cases} R_1=\gamma\dfrac{\beta+k_1}{1-\alpha}, еслиK<R \\ R_0=\gamma\dfrac{\beta}{1-\alpha}, еслиK=R \\ R_2=\gamma\dfrac{\beta-k_2}{1-\alpha}, еслиK>R \end{cases} \tag{5.7}$$

Нехай $R_2<K<R_1$, так що при t=0 виконується $R=R_1$. Тоді рівень капіталовкладень дорівнює $k_1>0$, величина k росте, а Y залишається постійної (рис. 5.1) доти, поки не досягається рівність $K=R_1$. Тоді R приймає значення R_0, тому що K=R. Тепер $K=R_1>R=R_0$, і величина R миттєво стає рівної R_2. Таким чином, до миттєво міняється від величини K_1 до K_2, а R — від R_1 до R_2. У той же самий момент, відповідно до формули (5.5), різко падає обсяг виробництва. Тепер До убуває до величини R_2. Аналогічне міркування показує, що R при цьому стає рівної R_1, так що $K=R_2<R=R_1$, і величина K знову стає рівної K_1. Основний капітал До знову зростає до R_1, і цикл замикається. Таким чином, обидві величини - K и Y - випробовують коливання. як показано на рисунку 5.1.

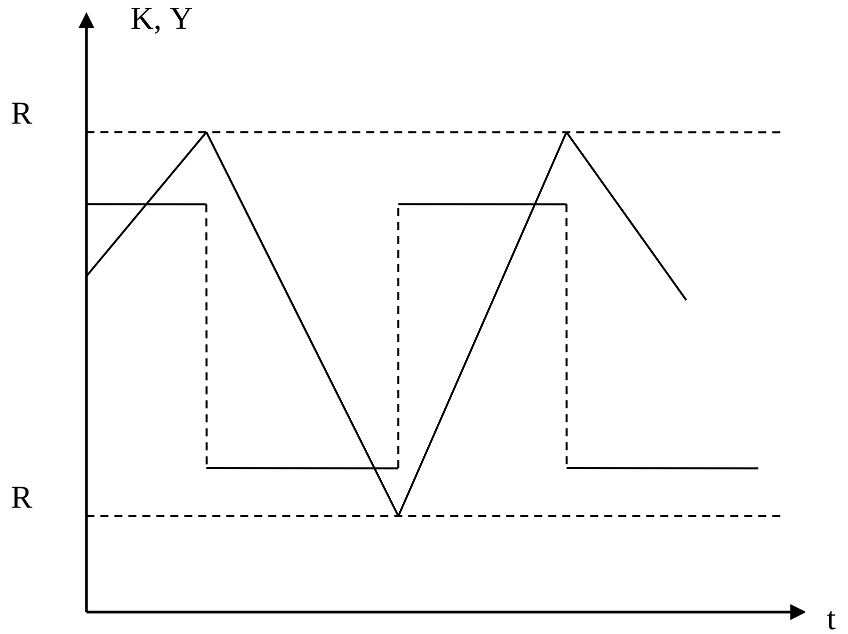


Рис. 5.1. Коливання величин K, Y у часі для політики капіталовкладень

Узагальнений варіант моделі добре відбиває економічний цикл. Під час періодів капіталовкладення обсяг виробництва високий, і економіка перебуває в періоді підйому. Коли ж капіталовкладення відсутні, обсяг виробництва падає, і економіка перебуває в стані депресії. Однак у розглянутої моделі є багато недоліків. Так, перегони в капіталовкладенні й миттєвій реакції на них з боку обсягу виробництва Y не відповідають дійсності. Крім того, з умови до $K_1=K_2$ треба, що періоди спаду значно перевищують періоди підйому, чого в реальності не спостерігається. Більше того, у моделі відсутній загальний ріст економіки, тому що обсяг виробництва, основний капітал та інші показники періодично приймають колишні значення.

5.3. Модифікована модель економічних циклів Гудвина

Приведемо другий варіант моделі. Модифікуємо модель, з огляду на такі фактори:

1) вплив капіталовкладень на ріст обсягу виробництва;

2) відсутність стрибкоподібних змін у капіталовкладенні.

Для обліку першого фактора змінимо рівняння (5.5) так, щоб у функції Y не було стрибків навіть у тому випадку, коли величина K їх має. Це можна зробити, замінивши рівняння (5.5) на

$$Y = \frac{1}{1-\alpha}(\beta + \frac{dK}{dt} - \varepsilon \frac{dY}{dt}) \tag{5.9}$$

де ε— деяка позитивна константа.

Зрозуміло, що новий доданок в (5.9) породжує затримку в реакції функції Y на зміну K. З рівняння (5.9) знаходимо:

$$\begin{aligned} &\varepsilon \frac{dY}{dt} + (1-\alpha)Y = \beta + k_1, еслиK > R \\ &\varepsilon \frac{dY}{dt} + (1-\alpha)Y = \beta - k_{21}, еслиK < R \end{aligned} \qquad (5.10,\ 5.11)$$

Припустимо, що в момент часу $t=t_1$ депресія закінчується й відбувається миттєвий перехід від (5.11) до рівняння (5.10), тоді залежність величини Y від часу t для фази підйому буде мати вигляд

$$Y(t) = \frac{\beta + k_1}{1-\alpha}(1 - e^{\frac{\alpha-1}{\varepsilon}(t-t_1)}) + Y(t_1)e^{\frac{\alpha-1}{\varepsilon}(t-t_1)} \tag{5.12}$$

З рішення (5.12) видно, що величина Y не зростає миттєво до значення $\frac{\beta + k_1}{1-\alpha}$, а прагне до нього при t→∞. Помітимо, що час, що потрібно для того, щоб функція Y(t) із заданою точністю став рівній цій величині, цілком залежить від параметра ε. Аналогічним образом, рівняння (5.11) згладжує стрибкоподібне падіння Y(t) (рис. 5.1) наприкінці періоду підйому.

Ліквідуємо тепер розриви в капіталовкладенні, тобто «зм'якшимо» раптовий перехід від К=κ_1 до К= -κ_2 (і навпаки), що виникає, коли К стає рівним R.

Розглянемо ту частину капіталовкладень, що виникає зі зміною обсягу виробництва. Зміни в капіталовкладенні відбувається тому, що ми хочемо підтримувати основний капітал на рівні бажаного капіталу. Зміна величини Y викликає зміна R, що, у свою чергу, тягне зміну К. Ясно, що якби нам удалося підтримувати К=γY, те виконувалося б і співвідношення К=R. Але такого бути не може, оскільки рівність не може виконуватися при всіх значеннях t, тому що величина К має верхню границю k_1 і нижню границю (-κ_2). Тому припустимо, що $K = \psi(Y)$. Вид функції ψ(Y) зображений на рисунку 5.2.

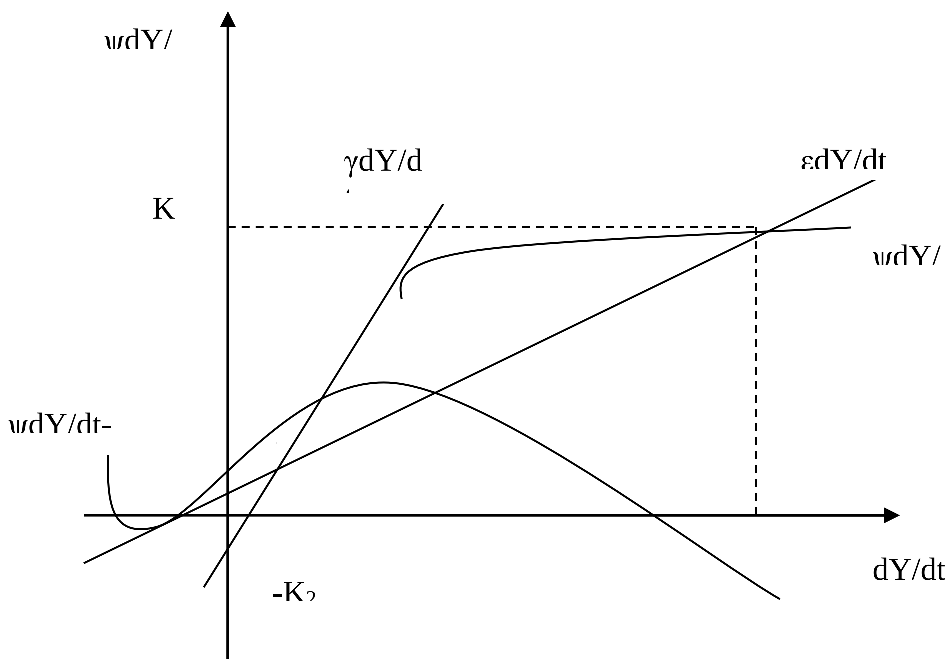


Рис. 5.2. Змушені капіталовкладення ψ(Y)

Як видно з рисунка, змушені капіталовкладення ψ(Y) близькі до ідеального рівня γY для малих величин Y, а при більших |Y| вони обмежені величинами κ_1 до (-κ_2). Помітимо, що функція ψ(Y)—εY немонотонна (тобто має «горби») і схожа на кубічну параболу. Коли капіталовкладення досягають свого максимального значення, основний капітал перестає задовольняти вимозі К=γY.

Це означає, що К треба вибрати у вигляді

$$\frac{dK}{dt} = L + \psi(\frac{dY}{dt}) \tag{5.13}$$

де ψ(Y) - індуковані капіталовкладення, викликані зміною обсягу виробництва, L — вплив інших капіталовкладень.

Тоді рівняння (5.9) треба замінити на

$$Y = \frac{1}{1-\alpha}\left[\beta + L + \psi(\frac{dY}{dt}) - \varepsilon\frac{dY}{dt}\right] \tag{5.14}$$

Щоб одержати графік функції Y залежно від Y, потрібно зрушити функцію ψ(Y)—εY, зображену на рис. 5.2, на величину β+L і розділити на (1-a). Якщо величина β+L досить велика, то вийде графік, подібний наведеному на рис. 5.3

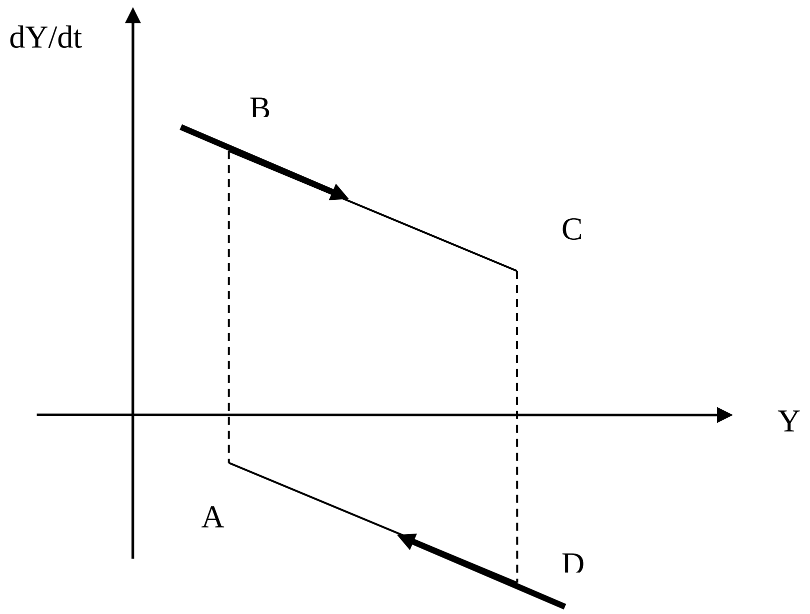


Рис. 5.3. Поведінка другої моделі на фазовій площині, рух відбувається тільки по немонотонній характеристиці

Ця крива, разом з допущенням про стрибки, повністю описує поведінки другої моделі. Крапки, що відповідають всім можливим станам моделі, лежать на цій кривій, і знак показує, зростає або убуває величина Y. Таким чином, рух крапки, що визначає стан системи, повинне відбуватися в напрямках, зазначених стрілками. Крапка (β+ L; 0) є нестійкою нерухомою крапкою системи. Із крапок C и A повинні відбуватися перегони. Припустивши, що перегони походять з A в B й з C у D, одержимо релаксаційні коливання для Y.

Тепер розглянемо третій варіант моделі. Враховуючи тепер запізнювання реальних капіталовкладень щодо ухвалення рішення про їхню необхідність. Це означає, що індуковані вкладення в момент часу *t* насправді залежать не від Y(t), а від *Y(t —υ)*, де *υ* — запізнювання.

Тоді замість рівняння (5.14) треба писати:

$$\varepsilon\frac{dY}{dt}+(1-\alpha)Y(t)-\psi\left(\frac{dY(1-\vartheta)}{dt}\right)=\beta+L \tag{5.15}$$

Якщо ввести *τ=t - υ*, з (5.15) одержимо

$$\varepsilon\frac{dY(\tau+\vartheta)}{d\tau}+(1-\alpha)Y(\tau+\vartheta)-\psi\left(\frac{dY(\tau)}{d\tau}\right)=\beta+L \tag{5.16}$$

Розкладемо ліву частину рівняння (5.16) по ступенях u і збережемо лише члени першого порядку по υ. Тоді знаходимо:

$$\varepsilon\frac{dY(\tau)}{d\tau}+\varepsilon\vartheta\frac{d^2Y(\tau)}{d\tau^2}+(1-\alpha)\left[Y(\tau)+\vartheta\frac{dY(\tau)}{d\tau}\right]-\psi\left(\frac{dY(\tau)}{d\tau}\right)=\beta+L \tag{5.17}$$

Або

$$\varepsilon\vartheta\frac{d^2Y(\tau)}{d\tau^2}+[\varepsilon+(1-\alpha)\vartheta]\frac{dY(\tau)}{d\tau}+(1-\alpha)Y(\tau)-\psi\left(\frac{dY(\tau)}{d\tau}\right)=\beta+L \tag{5.18}$$

Якщо вважати, що $\beta+L=const$ й ввести

$$y=\frac{Y-(\beta+L)}{1-L}, \tag{5.19}$$

то (5.18) можна представити у вигляді:

$$\varepsilon\vartheta\frac{d^2Y(\tau)}{d\tau^2}+[\varepsilon+(1-\alpha)\vartheta]\frac{dY(\tau)}{d\tau}-\psi\left(\frac{dY(\tau)}{d\tau}\right)+(1-\alpha)y(\tau)=0\,. \tag{5.20}$$

Введемо нові залежні й незалежні змінні співвідношеннями:

$$x = y\sqrt{\frac{1-\alpha}{\varepsilon\vartheta}}\,, \tag{5.21}$$

$$t = \tau\sqrt{\frac{1-\alpha}{\varepsilon\vartheta}}\,. \tag{5.22}$$

Тоді замість (5.20) маємо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + X\left(\frac{dx}{dt}\right) + x = 0\,, \tag{5.23}$$

де

$$X\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha)\varepsilon\vartheta}}\left\{[\varepsilon + (1-\alpha)\vartheta]\frac{dx}{dt} - \psi\left(\frac{dy(\tau)}{dt}\right)\right\}. \tag{5.24}$$

Якщо $[\varepsilon + (1-\alpha)\vartheta] < \gamma$, то функція X(x) схожа на кубічну параболу,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\left[1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]\left(\frac{dx}{dt}\right) + x = 0 \tag{5.25}$$

і в неї є стійкі граничні цикли, тобто мають місце автоколивання.

Контрольні запитання за п'ятою темою

1. Дайте визначення поняттю «нелінійність».
2. Назвіть основні наукові ідеї нелінійності.
3. Розкрийте основні особливості феномена нелінійності.
4. Які припущення використаються в моделях економічних циклів Гудвина?
5. Опишіть зміни капіталовкладень і інших показників у різних варіантах моделі Гудвина.
6. У чому суть модифікацій моделей економічних циклів Гудвина?
7. Проведіть аналіз рішень моделей економічних циклів.

Завдання до лабораторних робіт за темами Модуля 2

На тему "Нелінійні динамічні моделі. Моделі економічних циклів Гудвина"

Завдання:

Шляхом підбору параметрів, що залежать від обсягу виробництва, споживання та основного капіталу, визначити бажаний рівень капіталовкладень, проаналізувати коливання величин К – основного капіталу та У – обсягу виробництва у часі для політики капіталовкладення.

Промоделювати циклічні коливання К и У, враховуючи такі параметри:

1) вплив капіталовкладення на ріст обсягу виробництва;

2) відсутність стрибкоподібних змін у капіталовкладеннях.

Побудувати алгоритм моделювання.

Хід роботи:

Моделі Гудвина описують виникнення циклічних коливань в економічному розвитку.

Будемо вважати, що в будь-який момент часу t економіка має у своєму розпорядженні основний капітал К, що включає заводи, устаткування й т.д. Його обсяг змінюється зі швидкістю, рівної відношенню чистих капіталовкладень до загального зношування за даний період часу. Джерелом економічного доходу є обсяг виробництва Y і споживання C. Ці величини зв'язані між собою відносинами

$$C = \alpha Y + \beta$$
$$Y = C + \frac{dK}{dt} \qquad (1, 2)$$

де αі β - постійні параметри, такі, що α<0 и β < C.

β - частка постійного споживання, кіт не залежить від обсягу виробництва.

З рівняння (1) видно, що між обсягом виробництва й споживанням існує лінійна залежність. Рівняння (2) означає, що вся випущена продукція, яка або споживається, або йде на розширення виробництва. Припустимо далі, що основним капіталом К управляють так, щоб підтримувати на рівні, пропорційному обсягу виробництва. Якщо R - бажаний рівень основного капіталу в момент часу t, то

$$R = \gamma Y, \tag{3}$$

де γ - деякий параметр.

Представимо перший варіант моделі. З рівнянь (1) і (2) треба, що

$$Y - \alpha Y = \beta + \frac{dK}{dt} \tag{4}$$

звідки

$$Y = \frac{\beta + K}{1 - \alpha} \tag{5}$$

Зі співвідношень видно, що періодична поведінка величини Y може виникнути як наслідок коливань у капіталовкладенні К. У свою чергу, ці коливання виникають із прагнення зрівняти величини К и R (бажаний рівень основного капіталу). Нехай проводиться екстремальна політика капіталовкладень:

$$\frac{dK}{dt} = \begin{cases} K_1 > 0, если K < R \\ 0, если K = R \\ -K_2 < 0, если K > R \end{cases} \tag{6}$$

де K_1 і K_2 не залежать від часу t.

Розглянемо сутність формули (6). Якщо основний капітал менше бажаного рівня, то умова (6) відповідає максимальному рівню капіталовкладень (перша умова в (5.6)). Якщо ж бажаний рівень перевищений, то капіталовкладення нульові, а основний капітал амортизується зі швидкістю K_2 (третя умова (6)). $K_1 > K_2$ означає, що при максимальному рівні капіталовкладень швидкість, з якої можуть будуватися нові підприємства більше швидкості амортизації й старіння.

З рівнянь (3) - (6) треба, що

$$R = \begin{cases} R_1 = \gamma \dfrac{\beta + k_1}{1-\alpha}, если K < R \\ R_0 = \gamma \dfrac{\beta}{1-\alpha}, если K = R \\ R_2 = \gamma \dfrac{\beta - k_2}{1-\alpha}, если K > R \end{cases} \qquad (7)$$

Нехай R_2<К<R_1, так що при t=0 виконується R=R_1. Тоді рівень капіталовкладень дорівнює k_1>0, величина k росте, а Y залишається постійної (рис. 1) доти, поки не досягається рівність K=R_1. Тоді R приймає значення R_0, тому що K=R. Тепер K=R_1>R=R_0,і величина R миттєво стає рівної R_2. Таким чином, К миттєво міняється від величини κ_1 до κ_2, а R — від R_1 до R_2. У той же самий момент, відповідно до формули (5), різко падає обсяг виробництва. Тепер К убуває до величини R_2. Аналогічне міркування показує, що R при цьому стає рівної R_1, так що K=R_2<R=R_1, і величина K знову стає рівної κ_1. Основний капітал К знову зростає до R_1, і цикл замикається.

Вихідні данні:

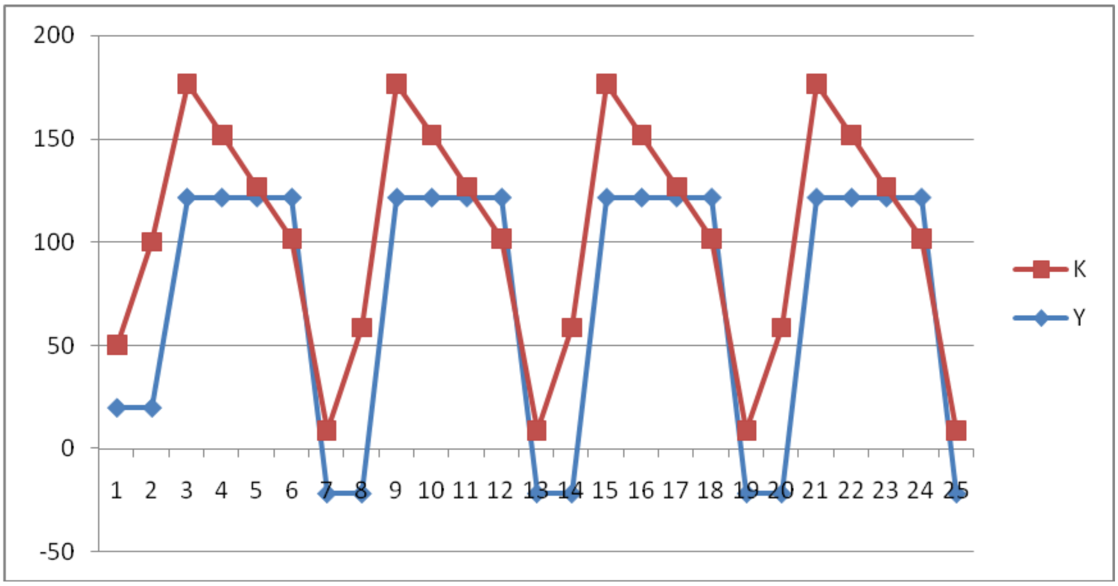
α	0,3
β	15
γ	0,7
K1	50
K2	25

Розрахунок показників:

t	Y	K	R1	R2
0	25	20	0	0
1	25	70	65	-10
2	121,4286	45	65	-10
3	121,4286	20	65	-10
4	121,4286	-5	65	-10
5	121,4286	-30	65	-10
6	-21,4286	20	65	-10
7	-21,4286	70	65	-10
8	121,4286	45	65	-10
9	121,4286	20	65	-10
10	121,4286	-5	65	-10
11	121,4286	-30	65	-10

t	Y	K	R1	R2
12	-21,4286	20	65	-10
13	-21,4286	70	65	-10
14	121,4286	45	65	-10
15	121,4286	20	65	-10
16	121,4286	-5	65	-10
17	121,4286	-30	65	-10
18	-21,4286	20	65	-10
19	-21,4286	70	65	-10
20	121,4286	45	65	-10
21	121,4286	20	65	-10
22	121,4286	-5	65	-10
23	121,4286	-30	65	-10
24	-21,4286	20	65	-10

Графік коливань величин основного капіталу та обсягу виробництва виглядає наступним чином:



Приведемо другий варіант моделі.

Модифікуємо модель, з огляду на такі фактори:

1) вплив капіталовкладень на ріст обсягу виробництва;

2) відсутність стрибкоподібних змін у капіталовкладенні.

Для обліку першого фактора змінимо рівняння (5) так, щоб у функції Y не було стрибків навіть у тому випадку, коли величина K їх має. Це можна зробити, замінивши рівняння (5) на

$$Y = \frac{1}{1-\alpha}(\beta + \frac{dK}{dt} - \varepsilon\frac{dY}{dt}) \tag{9}$$

де ε— деяка позитивна константа.

Зрозуміло, що новий доданок в (9) породжує затримку в реакції функції Y на зміну K. З рівняння (9) знаходимо:

$$\begin{aligned} &\varepsilon\frac{dY}{dt} + (1-\alpha)Y = \beta + k_1, если K > R \\ &\varepsilon\frac{dY}{dt} + (1-\alpha)Y = \beta - k_{21}, если K < R \end{aligned} \tag{10, 11}$$

Припустимо, що в момент часу $t=t_1$депресія закінчується й відбувається миттєвий перехід від (11) до рівняння (10), тоді залежність величини Y від часу t для фази підйому буде мати вигляд

$$Y(t) = \frac{\beta + k_1}{1-\alpha}(1 - e^{\frac{\alpha-1}{\varepsilon}(t-t_1)}) + Y(t_1)e^{\frac{\alpha-1}{\varepsilon}(t-t_1)} \tag{12}$$

З рішення (12) видно, що величина Y не зростає миттєво до значення $\frac{\beta + k_1}{1-\alpha}$, а прагне до нього при t→∞. Помітимо, що час, що потрібно для того, щоб функція Y(t) із заданою точністю став рівній цій величині, цілком залежить від параметра ε. Аналогічним образом, рівняння (11) згладжує стрибкоподібне падіння Y(t) (рис.1) наприкінці періоду підйому.

Ліквідуємо тепер розриви в капіталовкладенні, тобто «зм'якшимо» раптовий перехід від $K=\kappa_1$ до $K= -\kappa_2$ (і навпаки), що виникає, коли K стає рівним R.

Розглянемо ту частину капіталовкладень, що виникає зі зміною обсягу виробництва. Зміни в капіталовкладенні відбувається тому, що ми хочемо підтримувати основний капітал на рівні бажаного капіталу. Зміна величини Y викликає зміна R,що, у свою чергу, тягне зміну K. Ясно, що якби нам удалося підтримувати K=γY, те виконувалося б і співвідношення K=R. Але такого бути не може, оскільки рівність не може виконуватися при всіх значеннях t, тому що величина K має верхню границю k_1і нижню границю ($-\kappa_2$). Тому припустимо, що $K = \psi(Y)$. Вид функції ψ(Y) зображений на рис. 2.

Як видно з рисунка, змушені капіталовкладення ψ(Y) близькі до ідеального рівня γY для малих величин Y, а при більших |Y| вони обмежені величинами κ_1 до ($-\kappa_2$). Помітимо, що функція ψ(Y)—εY немонотонна (тобто має «горби») і схожа на кубічну параболу. Коли капіталовкладення досягають свого максимального значення, основний капітал перестає задовольняти вимозі K=γY.

Це означає, що K треба вибрати у вигляді

$$\frac{dK}{dt} = L + \psi(\frac{dY}{dt}) \qquad (13)$$

де ψ(Y) - індуковані капіталовкладення, викликані зміною обсягу виробництва, L — вплив інших капіталовкладень.

Вихідні данні:

α	9
β	11
γ	12
ε	2
K1	11
K2	5
L	0,8

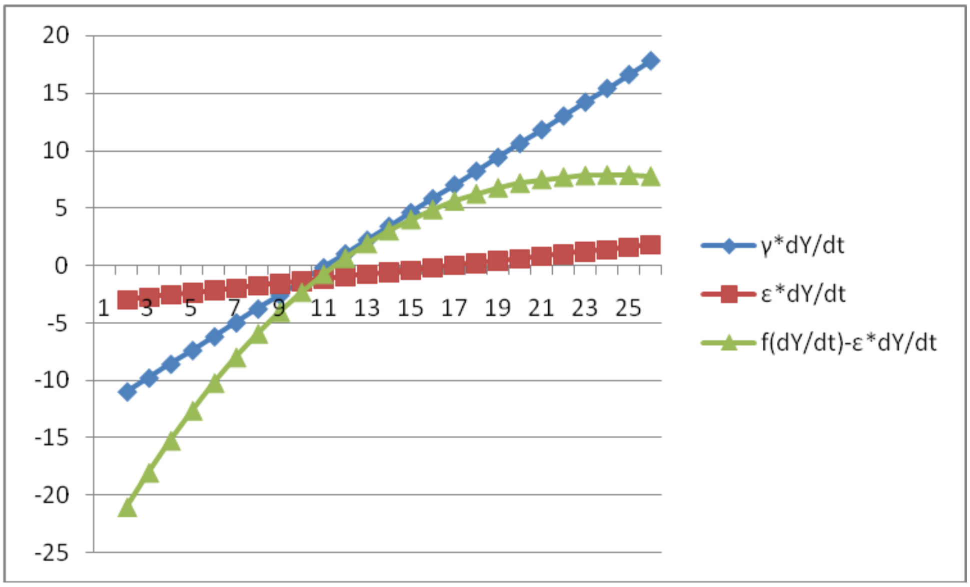
Підібрані параметри кубічної параболи індукованих капіталовкладень:

a	3
b	-12
c	20
d	-10

Отримуємо наступний алгоритм моделювання:

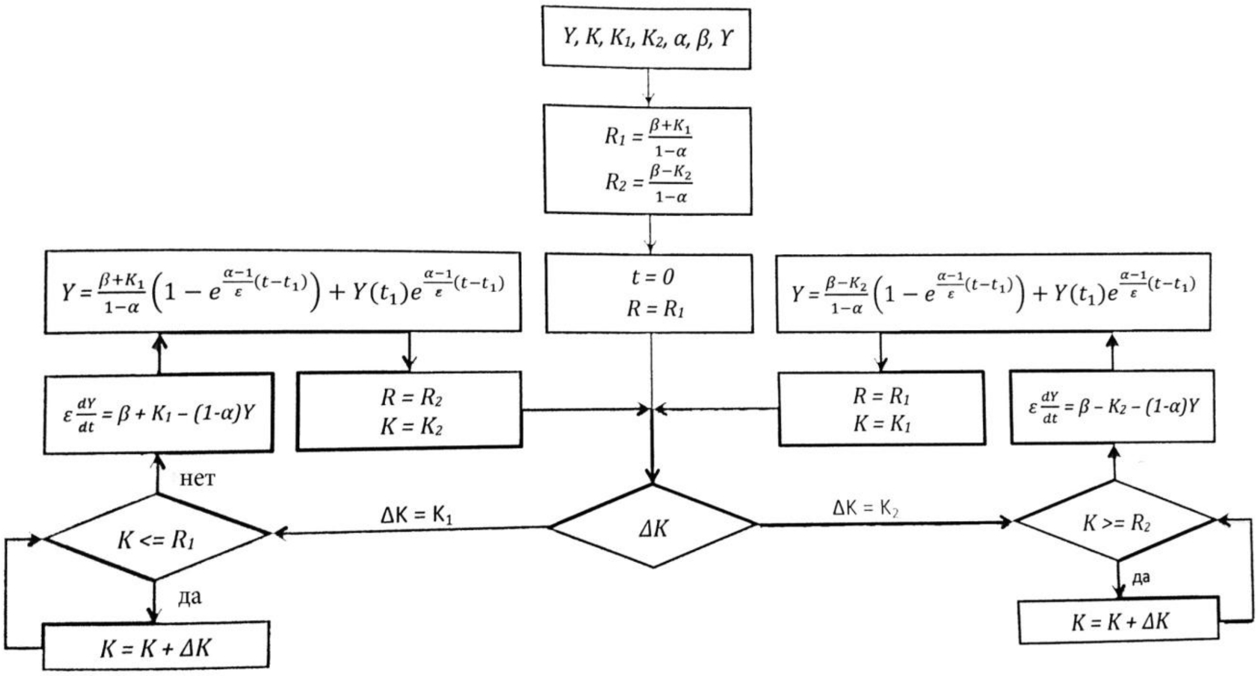
t	Y	K	dK/dt	dY/dt	γ*dY/dt	ε*dY/dt	f(dY/dt)	f(dY/dt)-ε*dY/dt
0	10							
1	32,83333	0	0,8	-0,5	-11	-3	-24,025	-21,025
2	46,26667	0,8	-23,225	-0,4	-9,8	-2,8	-20,832	-18,032
3	-47,2167	-22,425	-20,032	-0,3	-8,6	-2,6	-17,839	-15,239
4	-36,5467	-42,457	-17,039	-0,2	-7,4	-2,4	-15,04	-12,64
5	-26,5567	-59,496	-14,24	-0,1	-6,2	-2,2	-12,429	-10,229
6	-17,2267	-73,736	-11,629	0	-5	-2	-10	-8
7	-8,53667	-85,365	-9,2	0,1	-3,8	-1,8	-7,747	-5,947
8	-0,46667	-94,565	-6,947	0,2	-2,6	-1,6	-5,664	-4,064
9	7,003333	-101,512	-4,864	0,3	-1,4	-1,4	-3,745	-2,345
10	13,89333	-106,376	-2,945	0,4	-0,2	-1,2	-1,984	-0,784
11	20,22333	-109,321	-1,184	0,5	1	-1	-0,375	0,625
12	26,01333	-110,505	0,425	0,6	2,2	-0,8	1,088	1,888
13	31,28333	-110,08	1,888	0,7	3,4	-0,6	2,411	3,011
14	36,05333	-108,192	3,211	0,8	4,6	-0,4	3,6	4
15	40,34333	-104,981	4,4	0,9	5,8	-0,2	4,661	4,861
16	44,17333	-100,581	5,461	1	7	0	5,6	5,6
17	47,56333	-95,12	6,4	1,1	8,2	0,2	6,423	6,223
18	50,53333	-88,72	7,223	1,2	9,4	0,4	7,136	6,736
19	53,10333	-81,497	7,936	1,3	10,6	0,6	7,745	7,145
20	55,29333	-73,561	8,545	1,4	11,8	0,8	8,256	7,456
21	57,12333	-65,016	9,056	1,5	13	1	8,675	7,675
22	58,61333	-55,96	9,475	1,6	14,2	1,2	9,008	7,808
23	59,78333	-46,485	9,808	1,7	15,4	1,4	9,261	7,861
24	60,65333	-36,677	10,061	1,8	16,6	1,6	9,44	7,84
25	61,24333	-26,616	10,24	1,9	17,8	1,8	9,551	7,751

В цьому разі виникає згладжування стрибків капіталовкладень, що і бачимо на графіку:



Таким чином, друга модель більш адекватно відображає реальне положення в економіці, так як враховуються такі фактори, як запізнення змін обсягів виробництва та самих капіталовкладень.

Блок-схема нелінійної моделі економічних циклів Гудвина



Тестові завдання до Модуля 2

1. Рівноважний стан системи -

 це такий її стан, з якого система не вийде під дією тільки внутрішніх причин

 це такий її стан, з якого система не вийде під дією тільки зовнішніх причин

 такий її стан, з якого система не вийде під дією внутрішніх і зовнішніх причин

2. При якому впливі система перейде в інший стан

 зовнішнє

 внутрішнє

 1 і 2 вірно

3. Стійкість системи

 поведінка системи, при якому триває подальше видалення від вихідного стану

 здатність системи повертатися в рівноважний стан

 поведінка системи, при якому система перебуває в рівноважному стані

 при виникненні збурювання, що злегка виводить систему зі стану рівноваги, система буде прагнути до відновлення колишнього стану

4. Нестійкість системи

 поведінка системи, при якому триває подальше видалення від вихідного стану

 здатність системи повертатися в рівноважний стан

 поведінка системи, при якому система перебуває в рівноважному стані

 при виникненні збурювання, що злегка виводить систему зі стану рівноваги, система буде прагнути до відновлення колишнього стану

5. Критерій стійкості Гурвіца

 при $a_0>0$ повинні бути більше нуля всі n визначників Гурвіца, які отримані з квадратної матриці коефіцієнтів

 при $a_0 <0$ повинні бути більше нуля всі n визначників Гурвіца, які отримані з квадратної матриці коефіцієнтів

 при $a_0>0$ повинні бути менше нуля всі n визначників Гурвіца, які отримані з квадратної матриці коефіцієнтів

 при $a_0<0$ повинні бути менше нуля всі n визначників Гурвіца, які отримані з квадратної матриці коефіцієнтів

6. Що характеризує ваговий коефіцієнт адитивної функції корисності

 приватну корисність споживаного j-го блага

 граничну соціальну значимість j-тієї групи споживчих благ

 шкалу відносної значимості показників, що розглядаються

7. Якщо в динамічній моделі корисності споживчих благ r=C/U -темп приросту корисності й він постійний у часі, то

 a <R

 a =r

 a >r

8. a =D/C у динамічній моделі корисності споживчих благ характеризує

 напрямок зміни агрегатної функції корисності з урахуванням ефекту масштабу споживання

 темп прискорення агрегатної корисності в часі

 динаміку переваг споживача в часі

9. Які коливання в економічному розвитку описує модель Гудвина

 стійкі

 замкнуті

 циклічні

10. Які показники не враховуються в моделі Гудвина

□ споживання

□ нагромадження

□ попит

11. У моделі Гудвина між обсягом виробництва й споживання існує лінійна залежність

□ так

□ немає

12. Коливання в моделі Гудвина виникають із прагнення вирівняти величини

□ основний капітал з обсягом виробництва

□ обсяг виробництва з бажаним рівнем обсягу виробництва

□ основний капітал з бажаним рівнем основного капіталу

13. Якій умові відповідає максимальний рівень капіталовкладень у моделі Гудвина

□ K<R< b>

□ K=R

□ K>R

14. Що треба з умови $k_1=k_2$ в узагальненій моделі Гудвина

□ періоди спаду дорівнюють періодам підйому

□ періоди спаду менше періодів підйому

□ періоди спаду перевищують періоди підйому

15. Що є одним з недоліків узагальненої моделі Гудвина

□ стрибкоподібні зміни в капіталовкладеннях

□ коливання рівня обсягу виробництва

□ відсутність загального росту економіки

16. При модифікації моделі Гудвина враховуються такі фактори

 відсутність стрибкоподібних змін у капіталовкладенні

 вплив обсягу виробництва на політику капіталовкладень

 вплив капіталовкладень на ріст обсягу виробництва

17. Джерелом економічного доходу є

 обсяг виробництва

 споживання

 основний капітал

18. Третій варіант моделі Гудвина враховує запізнювання реальних капіталовкладень щодо ухвалення рішення про їхню необхідність

 так

 немає

19. Чим більше абсолютна антипатія до споживання й соціальна значимість l-го блага, тим...

 вище амплітуда економічних коливань

 повільніше відбувається зниження обсягу споживання

 більше частота коливань обсягу споживання

20.Чим нижче темп приросту агрегатної функції корисності, тим...

 вище амплітуда економічних коливань

 повільніше відбувається зниження обсягу споживання

 більше частота коливань обсягу споживання

МОДУЛЬ 3

ЗАСТОСУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ В ЕКОНОМІЦІ ТА СОЦІАЛЬНОМУ РОЗВИТКУ

Тема 6. Стохастичні моделі економічної динаміки

6.1. Модель валютної паніки

Ринкова економіка характеризується «швидкими» процесами - це фінансові кризи, біржові й валютні паніки, гіперінфляція, створення й розвиток фінансових пірамід, поширення реклами.

«Валютна паніка» - різкий, лавиноподібний ріст курсу валюти стосовно національної грошової одиниці.

Її причини характеризуються дисбалансом макроекономічних факторів: дисбаланс виробництва й споживання, неконтрольована емісія, дефіцит зовнішньоторговельного балансу (т.б. приводом для валютної паніки є стрибки деяких показників).

Постановка завдання. Початкові умови й умовні позначки.

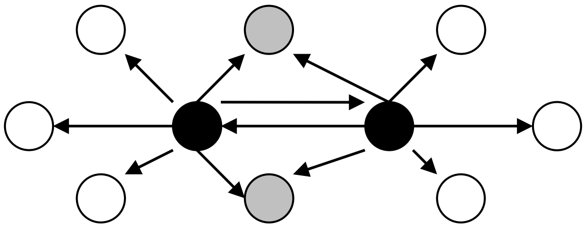
K(t,5) - певна частка наявного запасу валюти (банки або продавці товару).

K(t,i) - швидкість переходу цієї частки в і-му часі.

0<=K(t,5)<=1 (У момент валютної паніки частка підскакує до 1)

Будемо вважати, що кількість (N) тримачів грошей велика, сума вільних грошей у кожного тримача однакова. Кількість бажаючих поміняти ці гроші на валюту в початковий момент часу t_0 дорівнює n_0. Цих бажаючих можна назвати «зараженими» вірусом паніки, якщо своє бажання обміняти гроші на валюту вони повідомляють (тобто заражають їх) за деяку одиницю часу ще r тримачам, серед яких є як уже «заражені», так і «незаражені». Приріст «заражених» можливий тільки за рахунок останніх. Отже, кількість зв'язків-«зараз» у момент часу t дорівнює r*n(t), де n(t) - число заражених на момент часу t. Спрацює з них тільки частина. Як правило, величину цієї частини приймають рівній частці «незаражених», тобто N-n(t)/N

Однак аналіз прикладів з конкретними значеннями N і r показує, що вираження r*n(t)* N-n(t)/N дає завищене значення приросту заражених за одиницю часу. Причиною завищення є багаторазовий облік того самого «зараженого» (його «заражають» трохи індивідуумів відразу). Дана ситуація ілюструється



Позбутися від багаторазового обліку дозволить наступна модель.

Будемо вважати, що перший «заражений» впливає на $p_1 = r * \frac{N - n(t)}{N}$ незаражених , для другого частка «незаражених» зменшилася й становить $\frac{N - n(t) - p_1}{N}$, отже, він «заразить» $p_2 = r * \frac{N - n(t) - p_1}{N} = p_1 * (1 - \frac{r}{N})$ і т.д.

$$p_{i+1} = r * \frac{N - n(t) - \sum_{k=1}^{i} p_k}{N} = p_{i1} * (1 - \frac{r}{N}) \tag{6.1}$$

Величина $\sum_{i=1}^{n(t)} p_i$ становить приріст «заражених» за одиницю часу і являє собою суму геометричної прогресії. Ця сума дорівнює

$$(N - n(t)) * (1 - (1 - \frac{r}{N})^{n(t)}) \tag{6.2}$$

Оскільки N велико, будемо вважати $(1 - \frac{r}{N})^{n(t)} = e^{-r*\frac{n(t)}{N}}$.

Отже, приріст «заражених» за період Δt складе $(N - n(t)) * (1 - e^{-r*\frac{n(t)}{N}}) * \Delta t$. Звідси одержуємо рівняння для частки «заражених».

$$\frac{dK(t)}{dt} = (1 - K(t)) * (1 - e^{-r*K(t)}), \tag{6.3}$$

де $K(t) = \frac{n(t)}{N}$.

Взявши лінійне наближення експоненти, одержимо звичайно вживану модель для опису подібного процесу, тобто

$$\frac{dK(t)}{dt} = r * K(t) * (1 - K(t)) \tag{6.4}$$

На перший погляд $K(t)$ це і є $K(t,5)$, однак насправді $K(t,5)$ - це частка бажаючих обміняти гроші серед гроші, що має. Якщо припустити, що раніше «заражені» від грошей уже позбулися, то найбільше природно вважати цю частку рівної відношенню знову «заражених» (але ще не «перехворілих», тобто від грошей поки не збавлених) до не «хворівших»:

$K(t,5) = \frac{K'(t) * N}{N - n(t)}$ або $K(t,5) = \frac{K'(t)}{1 - K(t)}$.

Звідси

$$K(t,5) = 1 - e^{-r*K(t)} \tag{6.5}$$

Немає ніяких підстав для того, щоб вважати, що всі, хто бажають купити валюту, куплять їїі. Тому вид (6.5) для функції $K(t,5)$ характеризує один із крайніх випадків. Другий крайній випадок, коли валюти на ринку немає, а паніка наростає, відповідає виду:

$$K(t,5) = K(t). \tag{6.6}$$

Цей варіант у певному змісті є інтегральною характеристикою варіанта (6.5). Він характеризує собою інтегрально, що накопичується попит, що не має задоволення. Помітимо, що валютним панікам властиво ажіотаж покупців і стриманість продавців валюти, отже формула (6.5) більшою мірою буде відповідати характеру наростання попиту.

Рівняння (6.3) - зі змінними, що розділяються, але питання про його інтегрування в кінцевому виді, на жаль, залишається відкритим.

Рівняння (6.4) істотно простіше. Його рішенням буде функція:

$$K(t) = \frac{1}{\frac{1-K_0}{K_0} * e^{-r*(t-t_0)} + 1} \quad \text{або} \quad K(t) = \frac{e^{r*(t-t_0)}}{\frac{1-K_0}{K_0} * e^{r*(t-t_0)}}, \qquad (6.7)$$

де $K_0 = K(t_0)$.

Для цього випадку будемо вважати $K(t,5) = K(t)$. Варіант $K(t,5) = \frac{K'(t)}{1-K(t)}$ у цьому випадку не підходить по фізичним міркуванням, тому що приводить до вираження $K(t,5) = r * K(t)$, де $r > 1$.

Порівняємо чисельні рішення (6.3) і (6.4) для різних значень r. (рис.1-3). При r=1 значення k_0 скрізь =0.1.

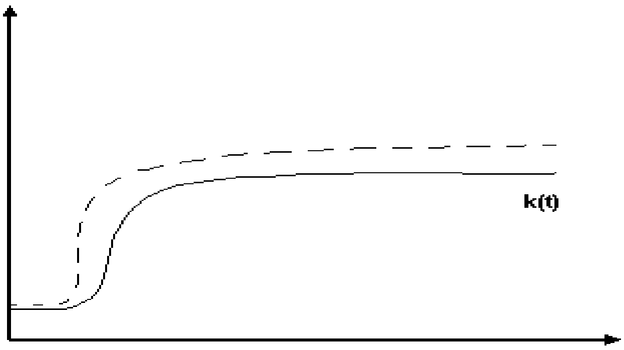


Рис. 6.1. Вид функції K(t) при r=1.

При малих r розходження в поводженні функцій невеликі, при більших r рішення (6.1) більше відповідає реальному розвитку паніки.

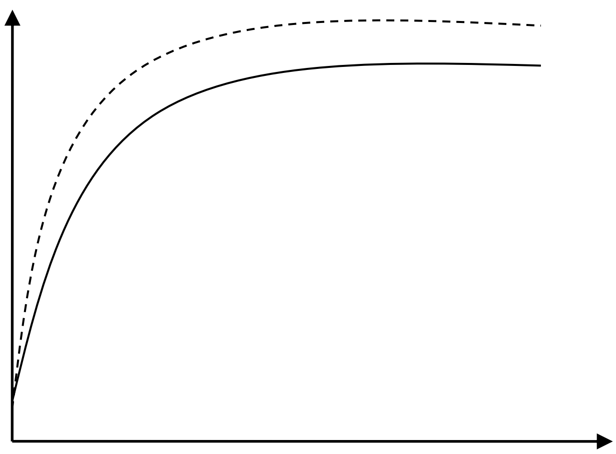


Рис. 6.2. Вид функції K(t) при r=3.

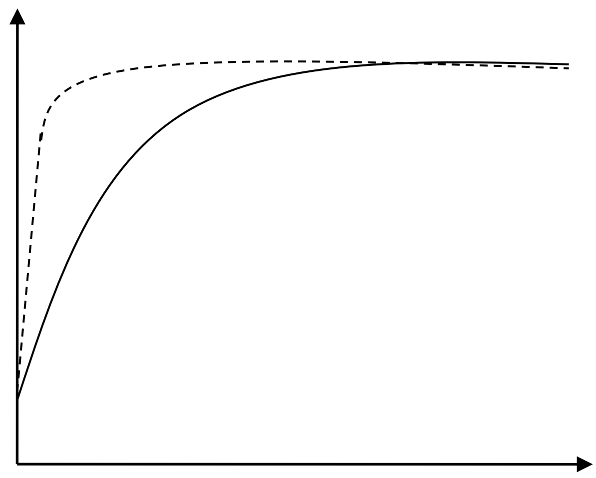


Рис. 6.3. Вид функції K(t) при r=10.

6.2. Модель Самуэльсона-Хикса з періодичними коефіцієнтами

Часто в економічних додатках вважають, що коефіцієнти моделі не змінюються в часі. Однак таке припущення істотно обмежує область застосування моделі й може не відповідати реально спостережуваній ситуації. На прикладі досить простої моделі Самуэльсона-Хикса наочно представлено, як істотно міняється характер поведінки моделі при застосуванні простої періодичної залежності коефіцієнтів моделі від часу. Періодичність коефіцієнтів досить часто зустрічається в економічних моделях, вона зв'язана як із сезонними коливаннями величин (наприклад, попиту на окремі товари), так і з наявністю циклів у розвитку окремих галузей і економіки в цілому.

Розглянемо рівняння моделі Самуэльсона-Хикса:

$$C(t)=\gamma Y(t-1)+C; \tag{6.8}$$

$$I(t)=\alpha(Y(t-1)-Y(t-2))+I; \tag{6.9}$$

$$Y(t)=C(t)+I(t)+G_t, \tag{6.10}$$

де Y(t) - національний доход у момент часу t;

C(t) - споживання;

I(t) - інвестування;

G(t) - державні витрати;

$0 < \gamma < 1$- гранична схильність до споживання;

α - акселератор;

С - автономне споживання;

t - автономне інвестування. Після підстановки модель (6.8) - (6.10) приймає вид:

$$Y(t+2)-(\gamma+\alpha)Y(t+1)+\alpha Y(t)=\underline{G}+\underline{I}+\underline{G}_{t+2}, t\geq 0 \qquad (6.11)$$

Припустимо, що параметри в рівняннях (6.8), (6.9) насправді залежать від часу, тобто

$$\begin{aligned}&\gamma=\gamma_{t-1};\\&\underline{C}=\underline{C}_t;\\&\underline{G}=\underline{G}_t;\\&\underline{I}=\underline{I}_t\end{aligned} \qquad (6.12)$$

і є g-періодичними.

У такому випадку модель приймає вид:

$$Y(t+2)=(\gamma_{t+1}+\alpha_{t+1})Y(t+1)+\alpha_{t+1}Y(t)=\underline{G}_{t+2}+\underline{I}_{t+2}+\underline{G}_{t+2}, t\geq 0 \qquad (6.13)$$

Розглянемо результати застосування теорії Флоке до моделі (6.13). Головну роль в аналізі цієї моделі грають мультиплікатори Флоке для однорідного рівняння, що відповідає (6.13);

$$Y(t+2)-(\gamma_{t+1}+\alpha_{t+1})Y(t+1)+\alpha_{t+1}Y(t)=0 \qquad (6.14)$$

Ці мультиплікатори є власними числами матриці монодромії:

$$\prod_{m=0}^{g-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\alpha_{g-m} & \gamma_{g-m}+\alpha_{g-m}\end{pmatrix}, \qquad (6.15)$$

тобто коріннями квадратного рівняння:

$$Z^2+(T_r\prod_{m=0}^{g-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\alpha_{g-m} & \gamma_{g-m}+\alpha_{g-m}\end{pmatrix})Z+\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\alpha_g=0 \qquad (6.16)$$

Позначимо $T=\{Z\in C:|Z|=1\}$- одиничне коло на комплексній площині.

Мультиплікатори Флоке для моделі (6.13) істотно складніше, ніж для моделі з постійними коефіцієнтами (6.11).

Нехай $D=\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\alpha_g$,

$$\Delta g = T_r \prod_{m=0}^{g-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_{g-m} & \gamma_{g-m} + \alpha_{g-m} \end{pmatrix} \qquad (6.17)$$

Можливі три наступні три випадки:

а) 1 + D< |Δg| <=> - один мультиплікатор Флоке лежить усередині Т, а другий — зовні;

б) |Δg| -1 < D< I <=> обидва значення лежать у середині Т;

в) max(|Δg|-1,1)<D <=>обидва значення лежать поза Т.

Зокрема, при малих значеннях акселераторів обоє значення лежать усередині Т.

Розглянемо тепер асимптотичне поведінку рішень.

I. Будь-яке рішення моделі (6.14) для HD є обмеженим, якщо всі мультиплікатори Флоке для неї лежать на або усередині одиничного кола;

II. Будь-яке ненульове рішення моделі (6.14) є необмеженим, якщо всі мультиплікатори лежать поза одиничним колом.

III. Будь-яке рішення моделі (6.14) прагне до нуля, якщо всі мультиплікатори лежать усередині Т.

IV. Будь-яке рішення моделі (6.13) є обмеженим (прагне до H), тоді й тільки тоді, коли існує обмежене рішення (6.13) і будь-яке рішення моделі (6.14) обмежено прагне до нуля).

Існування обмеженого (збіжного) рішення залежить від автономного споживання, інвестування й державних витрат. Необхідною умовою є обмеженість державних витрат.

V. У моделі (6.13) існує постійне рішення виду

$$B = \frac{\overline{C}_{t+2} + \overline{I}_{t+2} + \overline{G}_{t+2}}{(1-\gamma_{t+2})} \qquad (6.18)$$

Таким чином, вибираючи потрібну g-періодичну функцію державних витрат можна домогтися будь-якого постійного рішення для HD.

VI. Для того щоб модель (6.13) мала r-періодичне рішення, необхідно й достатньо, щоб функція державних витрат мала період, рівний найменшому загальному кратному r и g.

Контрольні запитання за шостою темою

1. У чому сутність стохастичних моделей економічної динаміки? Приведіть приклади швидких процесів в економіці.

2. Охарактеризуйте модель оцінки валютних потоків.

3. Якою формальною моделлю можна представити грошові й товарні потоки?

4. У чому сутність моделі валютної паніки?

5. Приведіть приклади, що описують розвиток валютної паніки?

6. Проведіть аналіз моделі Самуэльсона-Хикса.

7. Опишіть вплив часу на параметри моделі Самуэльсона-Хикса.

Тема 7. Моделі економічних змін та їх аналіз

7.1. Модель сценаріїв розвитку перехідної економіки В.С. Міхалевіча

Розглянемо одну з моделей макроекономічної системи, у якій представлені основні взаємозв'язки між виробництвом, споживанням, нагромадженням і грошовою масою. Дана модель була запропонована В.С. Міхалевічем як одна з моделей сценаріїв розвитку перехідної економіки.

Для побудови моделей були обрані наступні змінні:

$X(t)$ - величина внутрішнього валового продукту в t-й період;

$Y(t)$ — національний доход в t-й період;

A — матеріалоємність валового продукту;

$R(t)$ — частина НД, що затрачається на споживання (фонд споживання) в t-й період;

W — норма нагромадження;

$S(t)$ - величина платоспроможного попиту в t-й період;

c - норма споживання;

$D(t)$ — грошова маса, що забезпечує платоспроможний попит в t-й період;

$D_Q(t)$ — запаси коштів у населення в t-й період;

$\Delta D_0(t)$ — приріст запасів коштів за одиничний період в t-й період;

$P(t)$ — індекс споживчих цін щодо базового періоду часу в t-й період;

m - коефіцієнт еластичності цін;

E — коефіцієнт ефективності інвестицій;

q - частка доходів населення в НД;

r — коефіцієнт, що враховує зниження валового продукту за рахунок втрат внаслідок неплатежів, розриву економічних зв'язків і т.д.

Розглянемо основні рівняння моделі.

1. Рівняння динаміки ВВП

$$X(t)=AX(t)+Y(t) \tag{7.1}$$

2. Рівняння динаміки ВВП (динамічна функція Кобба-Дугласа з обліком нейтрального НТП)

$$X(t) = \gamma(t) L_t^{a_1} K_t^{a_2} . \quad (7.2)$$

3. Рівняння впливу інвестицій на зміну ВВП

а) - $\frac{dX(t)}{dt} = E \cdot W \cdot Y(t)$ ситуація росту обсягів виробництва; (7.3)

б) $\frac{dX(t)}{dt} = (E \cdot W - r) \cdot Y(t)$ ситуація падіння обсягів виробництва

4. Балансове рівняння невиробничого споживання

$$R(t) = c \cdot Y(t) \quad (7.4)$$

5. Рівняння динаміки платоспроможного попиту

$$S(t) = \left[\frac{D(t)}{P(t)} \right] \quad (7.5)$$

6.Рівняння динаміки цін

$$P[t] = m -(S(t)-R(t)) \bullet \quad (7.6)$$

7. Баланс коштів

$$\Delta D_0(t) = P(t) \cdot [q \cdot Y(t) - \min(S(t), R(t))] \quad (7.7)$$

У даному комплексі моделей варто звернути увагу на формування величини *S(t).* Величина *S(t)* у ринковій економіці залежить від безлічі факторів, які можна підрозділити на два класи: екзогенні (зовнішні) фактори й ендогенні (внутрішні) фактори. *Екзогенні фактори* — це фактори, що відбивають стан макроекономічної системи, такі, як рецесія (спад), стагнація або зростання виробництва, інфляція, податковий тягар і т.д. *Ендогенні фактори* — це внутрішні фактори, що формуються на основі розглянутих у даній системі показників. Величина платоспроможного попиту S*(t)* залежить від рівня доходів населення (не тільки поточних, як представлено в цій моделі, але й за минулі періоди часу), від рівня пропозиції товарів і послуг, від їхньої вартості, від рівня утворення й культури споживання, від інших різних факторів (прямих або непрямих), що впливають на формування поведінки споживачів. У силу того, що величина *S(t)* становить особливий інтерес при моделюванні механізму споживчого попиту, її варто представити набором структурних моделей, що відбивають попит на продукти харчування, одяг, предмети тривалого користування (квартири, машини, меблі), медичні послуги, освіта, туризм і т.д. У структурних моделях з'являється можливість відбити вплив різних факторів на той або інший вид споживчого попиту.

Розглянемо методи рішення систем диференціальних рівнянь і проведемо дослідження моделей механізму споживчого попиту.

Дану систему диференціальних рівнянь, частина з яких є нелінійними, можна вирішити за допомогою підстановок і перетворень.

З рівнянь (7.4), (7.1), (7.3а) треба, що

$$R(t)' = c \cdot Y(t)'$$

$$R(t)' = c \cdot (1-A) \cdot X(t)' = c \cdot (1-A) \cdot E \cdot W \cdot Y(t) = (1-A) \cdot E \cdot W \cdot R(t)\,. \tag{7.8}$$

Провівши інтегрування, знайдемо рішення цього рівняння:

$$R(t) = R(0)e^{(1-A)\cdot E\cdot W\cdot t} = R(0)\cdot e^{\lambda\cdot y}\,, \tag{7.9}$$

де $\lambda = (1-A)\cdot E\cdot W$.

Таким чином, можна виразити траєкторію динаміки фонду споживання *R(t)* за умови зростання виробництва.

Якщо спостерігається спад виробництва, тобто X(t)'<0 , то варто скористатися рівнянням (7.3б), де коефіцієнт *(E • W — r)* може приймати негативні значення.

Проводячи аналогічне рішення системи диференційованих рівнянь з врахуванням (7.3б), отримаємо

$$R(t) = R(0)e^{(1-A)\cdot(E\cdot W - r)\cdot t}\,, \tag{7.10}$$

де $\lambda = (1-A)\cdot(E\cdot W - r)$.

Відповідно до (7.4), (7.1) одержимо вираження національного доходу Y(t) і внутрішнього валового продукту X(t) через фонд споживання R(t):

$$Y(t) = \frac{R(t)}{c} = \frac{R(0)}{c} \cdot e^{\lambda \cdot t}, \tag{7.11}$$

$$X(t) = \frac{R(t)}{(1-A)\cdot c} = \frac{R(0)}{(1-A)\cdot c} \cdot e^{\lambda \cdot t}. \tag{7.12}$$

Далі розглянемо рівняння (7.5) — $S(t)' = \left[\frac{D(t)}{P(t)}\right]'$.

Провівши інтегрування цього рівняння,отримаємо:

$$S(t) - S(0) = \frac{D(t)}{P(t)} - \frac{D(0)}{P(0)}. \tag{7.13}$$

Відповідно до цього рівняння можна виразити функціональну залежність необхідної кількості грошової маси D (t) від величини платоспроможного попиту S(t):

$$D(t) = P(t)\cdot(S(t) - S(0)) + D(0)\cdot\frac{P(t)}{P(0)}. \tag{7.14}$$

У цій формулі другий доданок відбиває обсяг грошової маси базового періоду з урахуванням темпів росту індексу цін, а перше - необхідна зміна грошової маси з урахуванням індексу цін і зміни величини платоспроможного попиту.

7.2. Деякі аспекти розвитку економіки України та відповідні до них моделі

Розглянемо наступні випадки.

1. Передбачається, що в економічній системі попит точно відповідає пропозиції, *S(t) = R(t).*

Частина національного доходу, що затрачається на споживання, точно відповідає обсягу запропонованих товарів і послуг, Відповідно до цього припущення *P(t)* = 0, тобто *P(t)* = *P(0)* = P, де *P = const.* Як видно, індекс споживчих цін у цьому випадку не змінюється, він дорівнює значенню в базовий момент часу *(t = 0).*

Так як *R (t)* =S *(t)* , то *min(S(t),R(t))= S(t) - R(t).*

З формули балансу коштів треба, що приріст (зміна) запасів коштів представлений у вигляді:

$$\Delta D_0(t) = P(t)\cdot\left[q\cdot Y(t) - \min(S(t),R(t))\right] = P(t)\cdot[q\cdot Y(t) - R(t)]. \qquad (7.15)$$

Заміняючи *Y(t)* через *R (t)* , одержимо наступне вираження для величини грошових запасів:

$$\Delta D_0(t) = P(t)\cdot R(0)\cdot e^{\lambda\cdot t}\cdot[\frac{q}{c} - 1]. \qquad (7.16)$$

З формули $D(t) = P(t)\cdot(S(t) - S(0)) + D(0)\cdot\frac{P(t)}{P(0)}$ треба, що при D(0) =P S(0) =P R(0) виконується наступна тотожність

$$\frac{D(t)}{D(0)} = \frac{\Delta D_0(t)}{\Delta D_0(0)} = \frac{R(t)}{R(0)} = \frac{Y(t)}{Y(0)} = \frac{X(t)}{X(0)} = e^{\lambda\cdot t}, \qquad (7.17)$$

тобто якщо початкова грошова маса точно дорівнює обсягу початкових пропозицій товарів і послуг, який виражається у вартісній формі, то спостерігається стан адекватного росту всіх макроекономічних показників з темпом $e^{\lambda\cdot t}$.

2. Припустимо, що в економічній системі платоспроможний попит перевищує пропозиції товарів і послуг, тобто $S(t) = \alpha\cdot R(t)$, де $\alpha > 1$. Відповідно до рівняння (7.6), з огляду на те, що min(S(t),R(t))-R(t), одержимо

$$P(t) = m\cdot(\alpha\cdot R(t) - R(t)) = m\cdot R(0)\cdot e^{\lambda\cdot t}\cdot(\alpha - 1). \qquad (7.18)$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо

$$P(t) = P(0) + \frac{m\cdot(\alpha - 1)}{\lambda}\cdot R(0)\cdot(e^{\lambda\cdot t} - 1). \qquad (7.19)$$

Відповідно до рівняння динаміки коштів необхідних для забезпечення платоспроможного споживчого попиту, одержимо:

$$D(t) = P(t) \cdot [\frac{D(0)}{P(0)} + \alpha \cdot R(0) \cdot (e^{\lambda \cdot t} - 1)] \quad (7.20)$$

Величина зміни грошових запасів $\Delta D_0(t) = P(t) \cdot R(0) \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot [\frac{q}{c} - 1]$ може бути:

$$\Delta D_0(t) > D(t) - P(t) \cdot R(t), если \frac{q}{c} > \frac{D(0)}{P(0) \cdot R(0)} \quad (7.21)$$

або

$$\Delta D_0(t) < D(t) - P(t) \cdot R(t), если \frac{q}{c} < \frac{D(0)}{P(0) \cdot R(0)} \quad (7.22)$$

Величину відхилення необхідної грошової маси для забезпечення платоспроможного від індексованого споживчого попиту з урахуванням цін фонду споживання, тобто $\mathrm{D(t)} - \mathrm{P(t)} \cdot \mathrm{R(t)} = \delta \cdot \mathrm{D(t)}$, можна інтерпретувати як величину відкладеного попиту. Таким чином, якщо платоспроможний попит перевищує обсяг запропонованих товарів і послуг і якщо частка доходів населення у фонді споживання в момент t більше частки обсягу платоспроможного попиту у фонді споживання для базового періоду, то приріст грошових запасів буде величиною позитивної й більше величини відкладеного попиту. Якщо остання умова не виконується, то приріст грошових запасів буде менший, чим величина відкладеного попиту.

3. Припустимо, що в економічній системі платоспроможний попит менше обсягу передбачуваних для споживання товарів і послуг, тоді $S(t) = \alpha \cdot R(t), где \alpha < 1$.

Відповідно до рівняння (7.7) одержимо:

$$\Delta D_0(t) = P(t) \cdot R(0) \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot [\frac{q}{c} - \frac{1}{\alpha}] \quad (7.23)$$

Якщо частка доходів, тобто величина $\frac{q \cdot Y(t)}{c \cdot Y(t)}$ буде перевищувати величину $\frac{1}{\alpha}$, то буде спостерігатися приріст грошових запасів населення. Якщо ж ця умова виконуватися не буде, то грошові запаси будуть скорочуватися, тобто $\Delta \mathrm{D}_0(\mathrm{t}) < 0$.

4. Припустимо, що в економічній системі платоспроможний попит залежний не тільки від фонду споживання, але й від рівня цін. Можна допустити, що існує наступна залежність $\mathrm{S(t)} = (\alpha - \beta \cdot \mathrm{P(t)}) \cdot \mathrm{R(t)}$, де α й β - деякі параметри, причому, $P(t) \leq \frac{\alpha}{\beta}$.

Виходячи із цієї формули, можна записати наступне:

$$\frac{S(t)}{R(t)} = \alpha - \beta \cdot P(t) \quad (7.24)$$

Розглянемо випадок, коли $\frac{S(t)}{R(t)} > 1$, тобто платоспроможний попит перевищує рівень пропонованих для споживання товарів і послуг.

Тоді, вирішуючи рівняння (7.6), знаходимо вираження для динаміки рівня цін, отримаємо:

$$P(t) = \frac{1}{m \cdot \beta \cdot R(0)} \left(e^{(m \cdot \beta \cdot R(0)/\lambda - 1) \cdot e^{\lambda \cdot t}} - 1 \right) \quad (7.25)$$

Динаміка необхідної для забезпечення грошової маси буде виглядати так:

$$D(t) = P(t) \cdot \left\{ \frac{D(0)}{P(0)} + R(0) \cdot \left[(\alpha - \beta \cdot P(t)) \cdot e^{\lambda \cdot t} - (\alpha - \beta \cdot P(0)) \right] \right\} \quad (7.26)$$

Зміна величини грошових запасів у цьому випадку буде виглядати так:

$$\Delta D_0(t) = P(t) \cdot R(0) \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot [\frac{q}{c} - 1] \quad (7.27)$$

Необхідно розглянути й випадок, коли $\frac{S(t)}{R(t)} < 1$, тоді вираження для зміни величини грошових запасів буде виглядати в такий спосіб:

$$\Delta D_0(t) = P(t) \cdot R(0) \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot [\frac{q}{c} - (\alpha - \beta \cdot P(t))] \qquad (7.28)$$

При дослідженні величини $\Delta D_0(t)$ в зазначеному випадку варто визначити величину $\frac{q}{c} - (\alpha - \beta \cdot P(t))$. Якщо частка доходів у фонді споживання більше величини $(\alpha - \beta \cdot P(t))$, то відзначається приріст грошових запасів населення, у противному випадку грошові запаси населення будуть скорочуватися.

Контрольні запитання за сьомою темою

1. У чому суть моделі, запропонованої В.С. Міхалевічем?
2. Опишіть основні рівняння моделі розвитку економіки В.С. Міхалевіча.
3. Назвіть основні змінні, що використаються в моделі сценаріїв розвитку перехідної економіки.
4. Як у даній моделі відбивається платоспроможний споживчий попит?
5. Якими методами в моделі розвитку економіки В.С. Міхалевіча вирішується система диференціальних рівнянь?
6. Розкрийте випадок моделі, коли передбачається, що в економічній системі попит точно відповідає пропозиції.
7. Опишіть зміни моделі, які відбуваються, коли в економічній системі платоспроможний попит перевищує пропозиції товарів і послуг. І зворотний йому випадок, коли в економічній системі платоспроможний попит менше обсягу передбачуваних для споживання товарів і послуг
8. Охарактеризуйте випадок, коли в економічній системі платоспроможний попит залежний не тільки від фонду споживання, але й від рівня цін.

Завдання до лабораторних робіт за темами Модуля 3

На основі квартальних даних про валовий внутрішній продукт України за 2002-2010 роки (табл. 1) розрахувати характеристики швидкості та інтенсивності динаміки та провести інтерпретацію отриманих результатів.

Таблиця 1

Валовий внутрішній продукт України за 2002-2010 роки

Період		**Номер часового періоду, t**	**Валовий внутрішній продукт, млрд. грн.**
2002 рік	I квартал	1	44,132
	II квартал	2	50,117
	III квартал	3	65,067
	IV квартал	4	66,494
2003 рік	I квартал	5	52,583
	II квартал	6	60,798
	III квартал	7	75,812
	IV квартал	8	78,151
2004 рік	I квартал	9	66,981
	II квартал	10	78,607
	III квартал	11	99,405
	IV квартал	12	100,120
2005 рік	I квартал	13	88,104
	II квартал	14	101,707
	III квартал	15	122,861
	IV квартал	16	128,780
2006 рік	I квартал	17	106,348
	II квартал	18	126,319
	Ш квартал	19	152,406
	IV квартал	20	159,080
2007 рік	I квартал	21	139,444
	II квартал	22	166,869
	III квартал	23	199,535
	IV квартал	24	214,883

Продовження табл. 1

Період		Номер часового періоду, t	Валовий внутрішній продукт, млрд. грн.
2008 рік	І квартал	25	191,459
	II квартал	26	236,033''
	III квартал	-У27	276,451
	IV квартал	28	244,113
2009 рік	І квартал	29	189,028
	II квартал	зо	214,103
	III квартал	31	250,306
	IV квартал	32	259,908
2010 рік	І квартал	33	219,428
	II квартал	34	260,150
	III квартал	35	304,709
	IV квартал	36	310,320

За базу порівняння при розрахунку базових характеристик динаміки показника беремо початковий рівень ряду - величину валового внутрішнього продукту за І квартал 2002 року. Результати розрахунку характеристик швидкості та інтенсивності динаміки наведено у таблиці 2.

Таблиця 2

Характеристики швидкості та інтенсивності динаміки ВВП України за 2002-2010 роки

Час	Валовий внутрішній продукт, млрд. грн.	Абсолютний приріст		Темп зростання		Темп приросту		Абсолютне прискорення	Відносне прискорення
		баз.	ланц.	баз.	ланц.	баз.	ланц.		
0	44,132	-	-	-	-	-	-	-	-
1	50,117	5,985	5,985	1,1356	1,1356	0,1356	0,1356	8,965	1,4979
2	65,067	20,935	14,950	1,4744	1,2983	0,4744	0,2983	-13,523	-0.9045
3	66,494	22,362	1,427	1.5067	11,0219	0,5067	0,0219	-15,338	-10,7484
4	52,583	8 451	-13,911	1,1915	0,7908	0,1915	-0,2092	22,126	-1,5905
5	60,798	16,666	8,215	1,3776	1,1562	0,3776	0,1562	6,799	0,8276
6	75,812	31,680	15,014	1,7178	1,2469	0,7178	0,2469	-12,675	-0,8442
7	78,151	34,019	2,339	1,7708	1,0309	0,7708	0,0309	-13,509	-5,7755
8	66,981	22,849	-11,170	1,5177	0,8571	0,5177	-0,1429	22,796	-2,0408
9	78,607	3А475	11,626	1,7812	1,1736	0,7812	0,1736	9,172	0.7889

Продовження табл. 2

Час	Валовий внутрішній продукт, млрд. грн.	Абсолютний приріст		Темп зростання		Темп приросту		Абсолютне прискорення	Відносне прискорення
		баз.	ланц.	баз.	ланц.	баз.	ланц.		
10	99,405	55,273	20,798	2,2524	1,2646	1,2524	0,2646	-20,083	-0,9656
11	100,120	55,988	0,715	2,2686	1,0072	1,2686	0,0072	-12,731	-17,8056
12	88,104	42,972	-12.016	1,9964	0,8800	0,9964	-0,1200	25,619	-2,1321
13	101,707	57,575	13,603	2,3046	1,1544	1,3046	0,1544	7,551	0,5551
14	122,861	70,729	21,154	2,7839	1,2080	1,7839	0,2080	-15,235	-0,7202
15	128.780	84,648	5,919	2,9181	1,0482	1,9181	0,0482	-28,351	-4,7898
16	106.348	62,216	-22,432	2,4098	0,8258	1,4098	-0,1742	42,403	-1,8903
17	126,319	82,187	19.971	2,8623	11,1878	1,8623	0,1878	6,116	0,3062
18	152,406	105,274	26,087	3,4534	11,2065	2,4534	0,2065	-19.413	-0,7442
19	159.080	114,948	6,674	3,6046	1,0438	2,6046	0,0438	-26,310	-3,9422
20	139,444	95,312	-19,636	3,1597	0,8766	2,1597	-0,1234	47,061	-2,3967
21	166,869	122,737	27,425	3,7811	1,1967	2,7811	0,1967	5,241	0.1911
22	199,535	155,403	32,666	4,5213	11,1958	3,5213	0,1958	-17,318	-0,5302
23	214,883	170,751	15,348	4,8691	1,0769	3,8691	0.0769	-38,772	-2,5262
24	191,459	147,327	-23,424	4,3383	0,8910	3,3383	-0,1090	67,998	-2,9029
25	236,033	191,901	44,574	5,3483	1,2328	4,3483	0,2328	-4,156	-0,0932
26	276,451	232,319	40,418	6,2642	1,1712	5,2642	0,1712	-72,756	-1,8001
27	244,113	199,981	-32,338	5,5314	0,8830	4,5314	-0,1170	-22,747	0,7034
28	189,028	144,896	-55,085	4,2832	0,7743	3,2832	-0,2257	80,160	-1,4552
29	214,103	169,971	25,075	4,8514	1,1327	3,8514	0.1327	11,128	0,4438
зо	250,306	206,174	36,203	5,6718	1,1691	4,6718	0,1691	-26,601	-0,7348
31	259,908	215,776	9,602	5,8893	1,0384	4,8893	0,0384	-50,082	-5,2158
32	219,428	175,296	-40,480	4,9721	0,8443	3,9721	-0,1557	81,202	-2,0060
33	260,150	216,018	40,722	5,8948	1,1856	4,8948	0,1856	3,837	0.0942
34	304,709	260,577	44,559	6,9045	1,1713	5,9045	0,1713	-38,948	-0,8741
35	310,320	266,188	5,611	7,0316	1,0184	6,0316	0,0184	-	

Проведемо інтерпретацію отриманих результатів

Базовий абсолютний приріст, який відповідає, наприклад, III кварталу 2009 року, $d_{30/0}$ = 250,306 — 44,132 = 206,174 показує, що в цьому кварталі величина валового внутрішнього продукту зросла на 206,174 млрд. грн. порівняно з I кварталом 2002 року. Ланцюговий абсолютний приріст в цьому часовому періоді дорівнює $d_{30/29}$ = 250,306 — 214,103 = 36,203, тобто в III кварталі 2009 року величина валового внутрішнього продукту зросла на 36,203 млрд. грн. порівняно з попереднім кварталом. Варто зауважити, що знаки базового і ланцюгового абсолютних приростів не обов’язково співпадають, наприклад, для I кварталу 2010 року базовий абсолютний приріст становив 175,296 млрд. грн. ($d_{32/0}$ = 175,296), в той час як ланцюговий показував зменшення рівня динамічного ряду на 40,480 млрд. грн. ($d_{32/31}$ = -40,480).

Базовий темп зростання в III кварталі 2009 року дорівнює $\eta_{30/29} = \frac{250,306}{44,132} = 5,6718$, тобто величина валового внутрішнього продукту в цьому кварталі зросла в 5,6718 разів порівняно з I кварталом 2002 року. Ланцюговий темп зростання в цьому часовому періоді дорівнює $\eta_{30/29} = \frac{250,306}{214,103} = 1,1691$, тобто величина валового внутрішнього продукту в цьому кварталі зросла в 1,1691 рази порівняно з попереднім кварталом цього ж року.

Базовий темп приросту в III кварталі 2009 року дорівнює $\rho_{30/0} = \frac{250,306-44,132}{44,132} = 4,6718$, тобто величина валового внутрішнього в цьому кварталі зросла на 467,18 % порівняно з I кварталом 2002 року. Ланцюговий темп приросту в цьому часовому періоді дорівнює $\rho_{30/29} = \frac{250,306-214,103}{214,103} = 0,1691$, тобто величина валового внутрішнього продукту в цьому кварталі зросла на 16,91 % порівняно з попереднім кварталом цього ж року.

Абсолютне прискорення в III кварталі 2009 року дорівнює ϕ_{30} = 9,602 — 36,203 = -26,601, а це значить, що відбувалося уповільнення динаміки, тобто ланцюговий абсолютний приріст в сьомому часовому періоді (IV квартал 2009 року) зменшився на 26,601 млрд. грн. порівняно з попереднім періодом (про це свідчить від’ємний знак абсолютного прискорення).

Відносне прискорення в III кварталі 2009 року дорівнює $x_{30} = \frac{-26,601}{36,203} = -0,7348$, тобто ланцюговий абсолютний приріст в 31 часовому періоді зменшився на 73,48% порівняно з попереднім періодом.

Провівши графічний аналіз досліджуваного показника, можна констатувати, що на динаміку валового внутрішнього продукту України значний вплив мають сезонні чинники (рис. 1). Загалом можна відмітити, що протягом досліджуваного періоду часу зміна величини валового внутрішнього продукту носила циклічний характер. Зокрема, кожного року в IV кварталі величина ВВП зростала повільніше, ніж в II та III кварталах. А в I кварталі кожного року величина валового внутрішнього продукту була меншою, ніж в попередній період, про що свідчать ланцюгові абсолютні прирости.

Валовий внутрішній продукт України

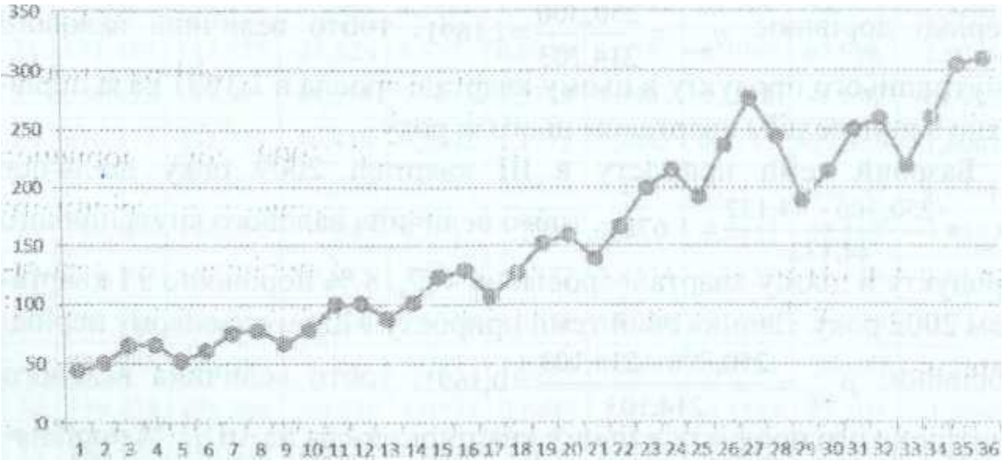


Рис. 1. Динаміка ВВП України за 2002-2010 роки

Для базових та ланцюгових абсолютних показників справедливі такі правила взаємного переходу:

1. Сума послідовних ланцюгових приростів дорівнює базовому абсолютному приросту:

$$\sum_{t=1}^{l} \delta_{t/t-1} = \sum_{t=1}^{l}(Q_t - Q_{t-1}) = Q_l - Q_0 = \delta_{l/0} \qquad l=2,\text{T}$$

2. Різниця між наступним і попереднім базовими абсолютними приростами дорівнює відповідному ланцюговому абсолютному приросту:

$$\delta_{t/0} - \delta_{t-\frac{1}{0}} = (Q_t - Q_0) - (Q_{t-1} - Q_0) = (Q_t - Q_{t-1}) = \delta_{t/t-1}$$

3. Добуток послідовних ланцюгових темпів зростання дорівнює базовому темпу зростання:

$$\prod_{t=1}^{l} \eta_{t/t-1} = \prod_{t=1}^{l} \frac{Q_t}{Q_{t-1}} = \frac{Q_l}{Q_0} = \eta_{l/0}$$

Наслідок. Будь-який член динамічного ряду можна виразити через Q0 та ланцюгові темпи зростання:

$$Q_l = Q_0 \prod_{t=1}^{l} \eta_{t/t-1}$$

4. Частка від ділення наступного базового темпу зростання на попередній дорівнює відповідному ланцюговому темпу зростання:

$$\frac{\eta_{t/0}}{\eta_{t-1/0}} = \frac{\frac{Q_t}{Q_0}}{\frac{Q_{t-1}}{Q_0}} = \frac{Q_t}{Q_{t-1}} = \eta_{t/t-1}$$

Правила взаємного переходу між базовими та ланцюговими показниками справджуються завдяки адитивності абсолютних приростів та мультиплікативності ланцюгових темпів зростання.

Ланцюгові темпи приросту не володіють властивістю мультиплікативності.

Тестові завдання до Модуля III

1. Якою умовою поєднуються всі однофакторні моделі

  Yt=maxFi(Xit)

 Yt=minFi(Xit)

 Xt=maxFi(Yit)

 Xt=minFi(Yit)

2. Чи вірно твердження: Не всякий ріст ефективності означає, що здійснюється інтенсифікація виробництва в динаміці

 так

 немає

3. Чим відрізняється багатофакторна модель економічного росту від однофакторної

 Багатофакторна модель є динамічним варіантом виробничої функції

 Багатофакторна модель відбиває взаємодію виробничих факторів з урахуванням зміни їхньої якості

 Багатофакторна модель відбиває взаємодію виробничих факторів з урахуванням зміни їхньої ефективності використання

4. Що характеризує вектор At багатофакторної моделі економічного росту $Y_t=f(X_t,A_t,t)$

 вектор фізичних обсягів виробничих ресурсів

 вектор параметрів якості використання ресурсів

 вектор параметрів ефективності використання ресурсів

5. Якщо середня ефективність і-го ресурсу підвищується, то

 темп приросту відповідного ресурсу буде вище темпу приросту виробництва темп приросту відповідного ресурсу буде нижче темпу приросту виробництва

 немає правильної відповіді

6. Чи вірно визначення: Багатофакторна модель економічного росту є динамічним варіантом виробничої функції, заснованої на припущенні взаємодоповнюваності виробничих факторів

 так

 немає

7. Валютна паніка може характеризуватися:

 дисбалансом виробництва й споживання

 неконтрольованою емісією

 дефіцитом зовнішньоторговельного балансу

8. «Валютна паніка»-

 це створення й розвиток фінансових пірамід

 це фінансові кризи

 це різкий ріст курсу валюти стосовно національної грошової одиниці

 це гіперінфляція

9. Рівняння динаміки ВВП

 X(t)=AX(t)+Y(t)

 Y(t)=AX(t)+X(t)

 X(t+1)=AX(t)+Y(t)

 Y(t+1)=AX(t)+X(t)

10. Рівняння моделі розвитку економіки України d(t)/dt=(E*W-r)*Y(t)

 балансове рівняння невиробничого споживання

 ситуація росту обсягів виробництва

 ситуація падіння обсягів виробництва

 рівняння динаміки цін

11. Рівняння моделі розвитку економіки України P[t] =m -(S(t)-R(t))

 балансове рівняння невиробничого споживання

 ситуація росту обсягів виробництва

 ситуація падіння обсягів виробництва

 рівняння динаміки цін

12. Що характеризує змінна W при побудові моделей розвитку економіки України

 норму споживання

 матеріалоємність валового продукту

 норму нагромадження

 коефіцієнт еластичності цін

 частка доходів населення в НД

13. Чи є модель S(t) = D(t)/P(t) рівнянням динаміки платоспроможного попиту

 немає

 так

14. Якщо частка доходів у рівнянні моделі розвитку економіки України не буде перевищувати величину 1/a , то

 грошові запаси будуть скорочуватися

 буде спостерігатися приріст грошових запасів населення

 немає правильної відповіді

ЗАВДАННЯ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Студент-випускник повинен володіти знаннями, вміннями і навичками, які необхідні як для написання ним випускної кваліфікаційної роботи, так й для майбутньої професійної діяльності високого рівня. Він має бути підготовленим, насамперед, для самостійного проведення фундаментальних і прикладних досліджень в економіці, бізнесовій і фінансовій сферах. Тому поряд з аудиторними заняттями підвищена увага приділяється саме організації й проведенню самостійної роботи студентів.

Кожна тема дисципліни «Моделювання економічної динаміки» потребує додаткового опрацювання студентами під час самостійної роботи. Метою самостійної роботи є активізація засвоєння студентами теоретичних знань, набуття вмінь та навичок самостійного проведення розрахунків та аналізу результатів для успішного застосування їх у подальшій роботі. Самостійна робота студентів повинна мати творчий характер, розвивати навички до аналітичної діяльності.

Під час самостійної роботи студенти мають:

- поглиблено опрацьовувати теоретичний матеріал з використанням рекомендованих літературних джерел та конспекту лекцій;
- підготовлювати вихідну інформацію для завдань з лабораторного практикуму;
- засвоювати методику використання комп’ютерної техніки та програмних засобів для розв’язування економічних задач математичними методами.

Результатом контролю самостійної роботи студентів є виконання ними лабораторних робіт, поточне опитування, яке кожний студент отримує у викладача.

Теми для самостійної роботи

1. Якісне дослідження динамічних систем.
2. Методи математичного аналізу в економічній динаміці.
3. Коливання в нелінійних динамічних системах.
4. Моделі росту національного доходу, ефект мультиплікатора.
5. Динамічна модель зовнішньої торгівлі.
6. Динамічна модель оподатковування.
7. Динаміка поведінки відкритої економіки.
8. Динамічні моделі формування (планування) держбюджету.
9. Моделі безперервних динамічних систем в економіці.
10. Нелінійні динамічні системи.
11. Типи економічного розвитку і їх трендові моделі.
12. Факторні моделі економічного росту.
13. Моделі динаміки суспільного продукту й національного доходу.
14. Динамічний підхід до рішення завдань оптимального управління.
15. Павутиноподібна модель ринкової рівноваги.
16. Динамічні міжгалузеві моделі.
17. Аналіз динаміки виробництва через взаємозв'язки капіталовкладень із основними фондами й виробничими потужностями.
18. Типи, структура прикладних динамічних моделей і характер їхнього використання.
19. Принципи динамічного моделювання економічних процесів.
20. Синергетичний підхід до моделювання й аналізу динамічних процесів в економіці.
21. Динаміка корисності споживчих благ.
22. Граничні цикли й фазові переходи в соціально-економічних системах.
23. Модель оцінки валютних потоків в умовах кризи.
24. Стохастична модель валютної паніки.
25. Хаос і управління динамічними економічними системами.

ПРИКЛАДИ РОЗКРИТТЯ ТЕМ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Тема 1. Якісне дослідження динамічних систем

Для динамічних систем визначають поняття інтегральних та фазових кривих (траєкторій поводження).

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – множина змінних системи. Криву в $(n+1)$ – вимірному просторі $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, який описує зміну координат цієї системи в залежності від часу t називають інтегральної кривою (рис. 1).

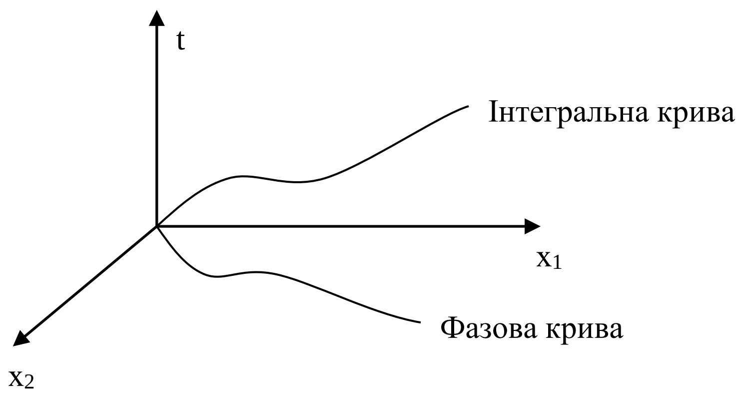


Рис. 1. Інтегральні та фазові криві

Фазова крива – це проекція інтегральної кривої на фазовий простір (простір координат).

При вивченні поведінки економічних систем з випадковими факторами, найбільший інтерес представляє не детальне вивчення поводження кожної траєкторії окремо, а якісне дослідження системи – визначення характеру поведінки траєкторій усієї системи в цілому, в залежності від загальних властивостей системи. При цьому виділяють 2 напрямки аналізу:

– Вивчення поведінки траєкторій системи при фіксованих значеннях параметрів; визначення характерів режимів, що встановлюються в системі. Для вирішення цієї задачі, увага приділяється вивченню особливих траєкторій системи (особливих точок – станів рівноваги системи; граничних циклів, атракторів тощо);

– Вивчення подій, що відбуваються при зміні параметрів системи. Увага приділяється значенням тих параметрів, при зміні яких відбувається якісна перебудова фазового портрету системи.

Під точкою рівноваги розуміється такий стан, потрапивши в який, траєкторія розвитку динамічної системи вже не зможе залишити її без додаткового зовнішнього втручання. Відповідно, якщо траєкторія системи починається з точки рівноваги, то стан системи з часом не змінюється.

Розрізняють декілька типів поведінки одновимірних систем з наступними інтегральними кривими (рис. 2).

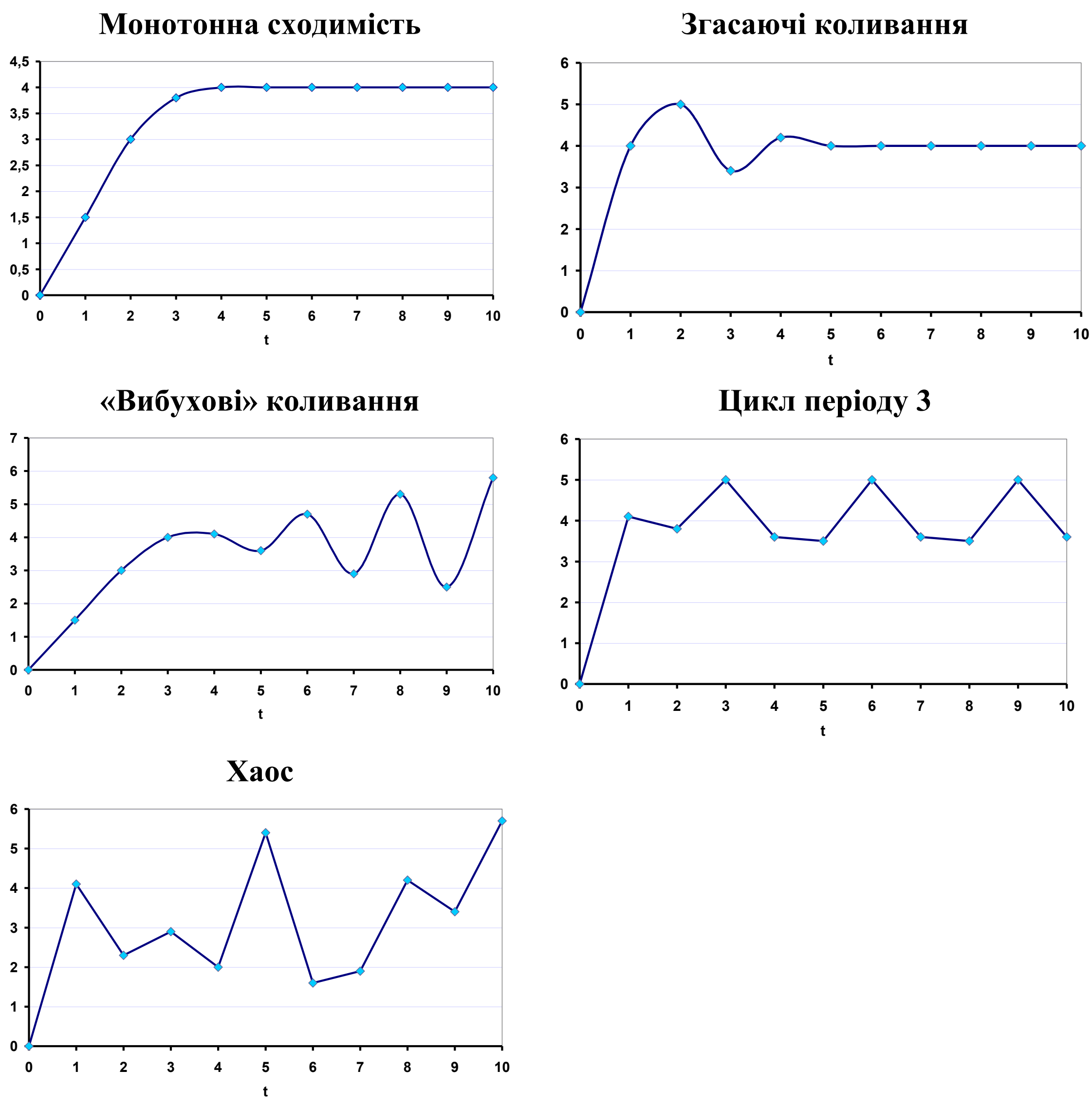


Рис. 2. Типи поведінки одновимірних систем

Дослідження стверджують, що спочатку в динамічних системах спостерігається монотонна сходимість чи згасаючі коливання до динамічної рівноваги (особливої точки системи).

Моделювання такої ситуації не викликає труднощів, навіть при використанні статистичних методів. Подальший розвиток системи, як правило, приводить до виникнення біфуркації та переходу до кінцевих циклів великих періодів.

Застосування статистичних методів, в цьому випадку, досить ускладнено, не говорячи вже про можливість виникнення хаосу. Якщо система є хаотичною, то ніякі спроби використання статистичних методів не дають задовільних результатів, у той час як економічна динаміка, дозволяє побудувати такий механізм керування, що спростить поведінку, зменшить амплітуду коливань та уможливить застосування методів прогнозування динаміки розвитку системи.

При вивченні не одновимірних (двох- та n-вимірних) економічних систем, найбільший інтерес представляє аналіз фазових кривих (фазовий портрет системи), а не інтегральних кривих.

Для двовимірних динамічних систем структура фазового портрету визначається кількістю, типами та взаємним розташуванням особливих точок і граничних циклів. Особлива точка може мати наступний тип (рис. 3).

Для побудови фазового портрету системи виконують наступну послідовність дій:

- Визначення координат особливих точок системи;
- Визначення типу особливих точок;
- Визначення граничних циклів та множин, що притягують (атракторів);
- Побудова фазового портрету системи та його аналіз.

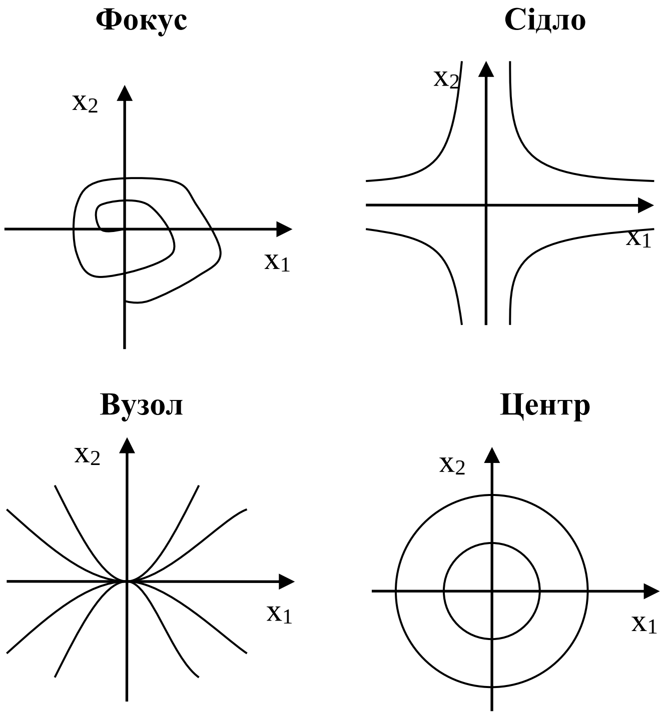


Рис. 3. Типи поведінки двовимірних систем

Розглянемо поведінку траєкторій лінійної двовимірної динамічної системи, в місцевості особливої точки, заданої у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \tag{1}$$

Припускаємо, что лінійна частина системи не вироджена, отже: ($a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21} <> 0$).

Знайдемо координати особливих точок даної системи. З визначення особливої точки, система повинна знаходитися в стані рівноваги, тобто її стан не повинний змінюватися з часом. Отже, виконується наступна система рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Рішенням даної системи рівнянь будуть наступні корені: $x_1=0;\ x_2=0$, тобто точка А(0; 0) – особлива точка системи.

Тип поведінки системи в місцевості особливої точки визначається коренями характеристичного рівняння (метод Ейлера):

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}=0 \quad \longrightarrow \quad \lambda^2-\lambda(a_{11}+a_{22})+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0$$

Позначивши суму діагональних елементів матриці як *tr(A)*, а визначник – як *det(A)*, одержимо наступне квадратне рівняння:

$$\lambda^2-\lambda tr(A)+\det(A)=0 \tag{4}$$

Вирішуючи дане рівняння відносно λ, можна визначити тип особливої точки системи за наступною схемою:

– Якщо корені характеристичного рівняння λ_1 і λ_2 дійсні та мають різні знаки, то особлива точка – сідло;

– Якщо корені характеристичного рівняння λ_1 і λ_2 дійсні й одного знаку, то особлива точка – вузол;

– Якщо корені характеристичного рівняння λ_1 і λ_2 комплексні та їх дійсні частини дорівнюють нулю, то особлива точка – центр;

– Якщо корені характеристичного рівняння λ_1 і λ_2 комплексні та їх дійсні частини більші за нуль, то особлива точка або нестійкий фокус, або нестійкий вузол;

– Якщо корені характеристичного рівняння λ_1 і λ_2 комплексні та їх дійсні частини менші за нуль, то особлива точка або стійкий фокус, або стійкий вузол.

Тема 2. Методи математичного аналізу в економічній динаміці

Методами математичного аналізу в економічній динаміці є диференційні рівняння та їх системи, а також різничні рівняння.

Диференційні рівняння. Рівняння, що зв'язує незалежну змінну *x*, функцію, що визначається $y=f(x)$ та ряд її послідовних похідних y', y'' і т.п. називають диференційним рівнянням:

$$F = \left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{5}$$

Найвищу з похідних, що входить у склад диференційного рівняння, називають порядком цього диференційного рівняння.

Рішенням диференційного рівняння n-ого порядку називається функція $y=f(x)$, що обертає рівняння $F = \left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right) = 0$ в тотожність. Графік рішення називається інтегральною кривою.

В економічній динаміці найчастіше використовуються лінійні диференційні рівняння.

Лінійним диференційним рівнянням n-ого порядку називається рівняння, яке має вигляд:

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + ... + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_n y^{(n)} = g(x) \tag{6}$$

При $g(x)=0$ лінійне диференційне рівняння називається однорідним, якщо $g(x)\neq 0$ – неоднорідним.

Якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$ … $y_m(x)$ – лінійно незалежні рішення однорідного диференційного рівняння, то і їхня лінійна комбінація $Y_o=A_1y_1(x)+A_2y_2(x)+…+A_my_m(x)$ також є рішенням для будь-яких A_1, A_2, … A_m...

Загальне рішення лінійного неоднорідного диференціального рівняння $Y_н$ має вигляд:

$$Y_н = Y_о + Y_ч \tag{7}$$

де Y_o – загальне рішення відповідного однорідного рівняння;

$Y_ч$ – деяке частне рішення неоднорідного рівняння.

Таким чином, рішення лінійного неоднорідного диференційного рівняння дорівнює сумі частного рішення неоднорідного та загального рішення однорідного диференційного рівняння.

Для пошуку загального рішення Y_o лінійного однорідного диференційного рівняння знаходять корені характеристичного рівняння λ:

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + ... + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n = 0 \quad (8)$$

Можливі наступні варіанти рішень характеристичного рівняння:

1. Усі корені λ дійсні і різні, тоді загальне рішення має вигляд: $Y_0 = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} + ... + A_n e^{\lambda_n x}$

2. Серед коренів є кратні, тоді загальне рішення має вигляд: $Y_0 = e^{\lambda x}\left(A_1 + A_2 x + ... + A_n x^{n-1}\right)$

3. Серед коренів є кратні комплексні корені λ = α ± βі, тоді загальне рішення має вигляд: $Y_0 = e^{\lambda x}\left(A_1 \cos\beta x + A_2 \sin\beta x\right)$.

Частне рішення неоднорідного рівняння $Y_ч$ одержують підстановкою загального рішення однорідного рівняння у початкове (метод невизначених коефіцієнтів чи варіації постійних).

Динамічні системи в економічній динаміці у більшості випадків записуються наступною системою звичайних диференційних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \quad ... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \quad (9)$$

У випадку, коли система диференційних рівнянь лінійна, вона буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \qquad\qquad \ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \end{cases} \tag{10}$$

Загальне рішення лінійної динамічної системи, знаходиться за допомогою методу Эйлера.

Різничні рівняння. Різниця першого порядку записується у вигляді:

$$\Delta y_t = f(t+1) - f(t) = y_{t+1} - y_t \tag{11}$$

Різниця другого порядку:

$$\Delta^2 y_t = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t = (y_{t+2} - y_{t+1}) - (y_{t+1} - y_t) = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t \tag{12}$$

Різниця n-ого порядку:

$$\Delta^n y_t = \Delta^{n-1} y_{t+1} - \Delta^{n-1} y_t \tag{13}$$

Отже, загальний вид різничного рівняння буде мати наступний вигляд:

$$c_n y_{t+n} + c_{n-1} y_{t+n-1} + \ldots + c_1 y_{t+1} + c_0 y_t = g(t) \tag{14}$$

При $g(t)=0$ рівняння називають однорідним, в інших випадках – неоднорідним.

У більшості випадків рішення різничних рівнянь знаходять за допомогою чисельних методів.

Тема 3. Коливання в нелінійних динамічних системах

Коливання в двовимірних лінійних динамічних системах описуються наступною системою рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = R_1 \cos(\omega t + \beta) \\ x_2 = R_2 \sin(\omega t + \beta) \end{cases}, \qquad \text{причому} \qquad \left(\frac{x_1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{R_2}\right)^2 = 1$$

Графічно цей процес показано на рисунку 4:

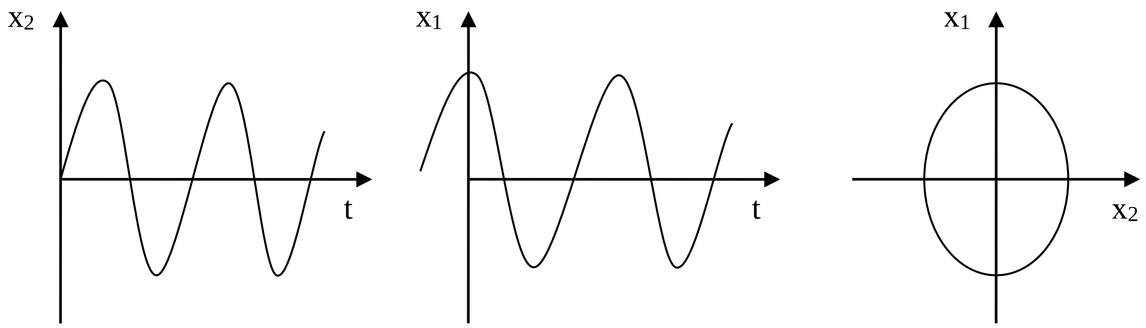


Рис. 4. Гармонійні коливання

Коливання, що відбуваються під дією зазначених законів, називаються гармонійними.

Велика кількість нелінійних моделей економічних систем характеризується тим, що динаміка розвитку фазових змінних носить коливальний характер, відмінний від гармонійного. Одним з найбільш відомих прикладів таких систем є модель «човен Вольтера», що описує співіснування двох видів – хижаків та жертв.

Нехай x_1 – кількість осіб першого виду (жертви), x_2 – кількість осіб другого виду (хижаки).

dx_1/dt – швидкість зміни кількості жертв,

dx_2/dt – швидкість зміни кількості хижаків.

Тоді:

$\frac{dx_1/dt}{x_1}$ – швидкість росту кількості жертв у розрахунку на 1 особу,

$\frac{dx_2/dt}{x_2}$ – швидкість росту кількості хижаків у розрахунку на 1 особу.

Нелінійна динамічна система буде мати наступний вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1/dt}{x_1} = a - bx_2 \\ \frac{dx_2/dt}{x_2} = -c + dx_1 \end{cases} \tag{15}$$

де *a, b, c, d > 0.*

a – коефіцієнт, що визначає питому швидкість розмноження жертв;

b – втрати від хижаків;

з – швидкість вимирання хижаків за відсутністю жертв;

d – вдалість полювання хижаків.

Перетворимо систему до наступного вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(a - bx_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(-c + dx_1) \end{cases} \tag{16}$$

Для побудови фазового портрету системи знайдемо координати її особливих точок:

$$\begin{cases} x_1(a - bx_2) = 0 \\ x_2(-c + dx_1) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Одержимо наступні рішення даної системи:

1) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ тобто, особлива точка A(0; 0);

2) $\begin{cases} a - bx_2 = 0 \\ -c + dx_1 = 0 \end{cases}$ тобто, особлива точка B($^c/_d$; $^a/_b$);

Проаналізуємо поведінку системи в місцевостях особливих точок, для цього виконаємо лінеаризацію системи в місцевостях цих точок.

$$\begin{cases} f_1(x_1; x_2) = x_1(a - bx_2) \\ f_2(x_1; x_2) = x_2(-c + dx_1) \end{cases}$$

$$\frac{df_1}{dx_1} = a - bx_2$$

$$\frac{df_1}{dx_2} = -bx_1$$

$$\frac{df_2}{dx_1} = dx_2$$

$$\frac{df_2}{dx_2} = -c + dx_1$$

1) Для особливої точки *A(0; 0)*, одержуємо:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Характеристичне рівняння має вигляд: $(a - \lambda)(-c - \lambda) = 0$. Вирішуючи дане рівняння, маємо: $\lambda_1 = a > 0$; $\lambda_2 = -з < 0$. Отже, корені дійсні та мають різні знаки, тому особлива точка А – сідло.

2) *B*($^c/_d$; $^a/_b$):

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\dfrac{bc}{d} \\ \dfrac{ad}{b} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Характеристичне рівняння має вигляд: $(-\lambda)(-\lambda) - \left(-\dfrac{bc}{d}\right)\left(\dfrac{ad}{b}\right) = 0$, спростивши яке, отримуємо $-\ \lambda^2 + ac = 0$. Вирішуючи дане рівняння, знаходимо наступні корені: $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ac}$. Отже, отримані корені комплексні, а їхні дійсні частини дорівнюють нулю, тому особлива крапка В – центр.

З аналізу лінійних динамічних систем відомо, що тип поведінки системи – «центр» не є структурно стійким. Це означає, що незначна зміна правих частин вихідної системи диференціальних рівнянь може призвести до того, що точка B($^c/_d$; $^a/_b$) змінить свій тип, тобто перестане бути центром. Тому, для особливої точки B($^c/_d$; $^a/_b$) необхідні додаткові дослідження. Для дослідження поведінки траєкторій системи в місцевості точки B($^c/_d$; $^a/_b$), розглянемо перший інтеграл даної системи. Перший інтеграл – це функція $u(x_1, x_2)$, для якої:

$$f_1(x_1; x_2)\frac{du}{dx_1} + f_2(x_1; x_2)\frac{du}{dx_2} = 0 \tag{18}$$

Важливою властивістю функції $u(x_1, x_2)$ є те, що вона постійна уздовж кривих рішень системи (фазових кривих) і залежить від обраного частного рішення. Можна показати, що перший інтеграл первісної системи буде мати вигляд:

$$u(x_1; x_2) = x_1^c e^{-dx_1} x_2^a e^{-bx_2} = g(x_1)h(x_2) \tag{19}$$

Для того, щоб визначити характер поведінки системи в місцевості особливої точки B($^c/_d$; $^a/_b$), проаналізуємо поводження функцій $g(x_1)$ та $h(x_2)$, рисунку 5:

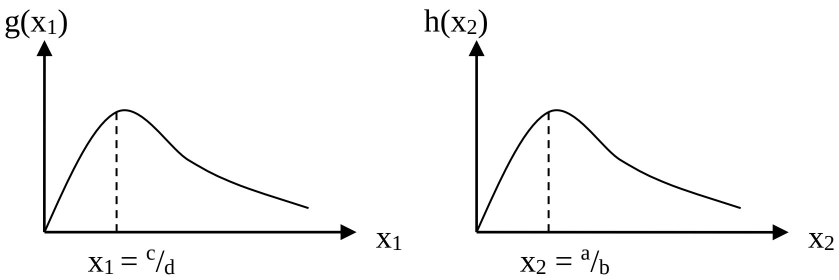


Рис. 5. Динаміка поводження функцій $g(x_1)$ та $h(x_2)$

З урахуванням графіків функцій $g(x_1)$ і $h(x_2)$ зобразимо поверхню функції $u(x_1, x_2)$ (рис. 6).

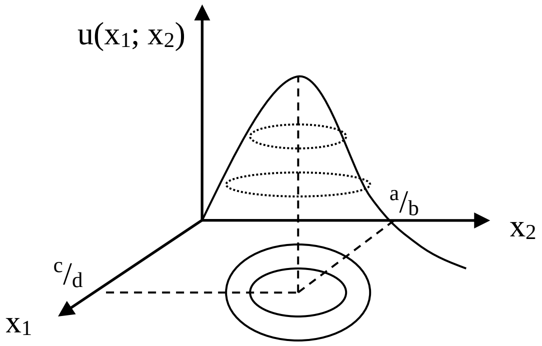


Рис. 6. Поверхня функції $u(x_1, x_2)$

Фазові траєкторії системи є лініями рівня даної поверхні, тобто замкнутими траєкторіями.

Таким чином, можна зробити висновок, що зміна правих частин первісної системи диференційних рівнянь не призведе до біфуркації в особливій точці $B(^c/_d; ^a/_b)$, а лише змінить її координати x_1 і x_2. Тому, фазовий портрет буде мати вигляд, як на рисунку 7:

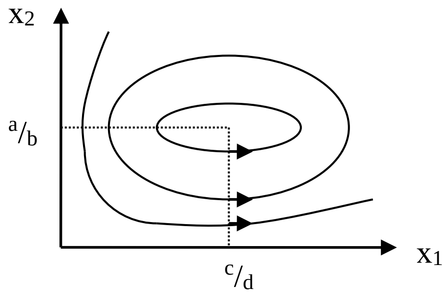


Рис. 7. Коливання у нелінійній динамічній системі

Усі траєкторії первісної системи за винятком сідла в особливій точці A(0; 0) є замкнутими, тобто, мають місце коливання, відмінні від гармонійних.

Тема 4. Моделі росту національного доходу, ефект мультиплікатора

Національний доход Y у момент часу t розподіляється на споживання C та на інвестиції I:

$$Y_t = C_t + I_t \tag{20}$$

Дослідження вказують, що обсяг споживання прямо пропорційний обсягу національного доходу, з лагом запізнювання у 1 період:

$$C_t = a + bY_{t-1} \quad a \geq 0 \quad 0 < b < 1 \tag{21}$$

де b – гранична схильність населення до споживання.

Припустимо, що обсяг інвестицій в економіку не залежить від національного доходу і змінюється з I_0 у початковий момент часу, до $I_0+\Delta I$ для всіх наступних періодів:

$$I_t = I_0 + \Delta I \tag{22}$$

Підставляючи рівняння (21) і (22) у (20), одержуємо рівняння:

$$Y_t - bY_{t-1} = a + I_0 + \Delta I \tag{23}$$

Рішенням різничного рівняння (23) є:

$$Y_t = A(b)^t + \frac{a + I_0 + \Delta I}{1-b} \tag{24}$$

Оскільки $0 < b < 1$, то $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} A(b)^t = 0$, отже, рівноважний національний доход дорівнює $Y = \dfrac{a + I_0 + \Delta I}{1-b}$. У даному випадку умова $0 < b < 1$ – це умова стабільності функціонування системи.

Як відомо з Кейнсіанської макроекономіки, у замкнутій системі збільшення інвестицій на величину ΔI призводить, відповідно до ефекту мультиплікатора, до збільшення національного доходу на величину:

$$\Delta Y = \frac{1}{1-b}\Delta I \tag{25}$$

В цьому випадку, якщо первісне значення величини рівноважного національного доходу було Y_0, те нове значення точки рівноваги складе:

$$Y_p = Y_0 + \frac{1}{1-b}\Delta I \tag{26}$$

Ця концепція відповідає отриманому рішенню (24). Нове рівноважне значення національного доходу $Y_t = \frac{a + I_0 + \Delta I}{1-b}$ та початкове $Y_0 = \frac{a + I_0}{1-b}$ розрізняються на величину $\Delta Y = \frac{1}{1-b}\Delta I$.

Розглянутий випадок припускає, що інвестиції цілком автономні (не залежать від обсягу національного доходу), рівняння (23).

Нехай обсяг інвестицій частково залежить від національного доходу (з лагом запізнювання в 1 період), відповідно до граничної схильності до інвестування h:

$$I_t = hY_{t-1} + I_0 + \Delta I \quad 0 < h < 1 \tag{27}$$

Тоді, рівняння (24) буде мати вигляд:

$$Y_t - (b+h)Y_{t-1} = a + I_0 + \Delta I \tag{28}$$

Рішенням різничного рівняння (28) є:

$$Y_t = A(b+h)^t + \frac{a + I_0 + \Delta I}{1-b-h} \tag{29}$$

Система буде прагнути до стану рівноваги $Y_t = \frac{a + I_0 + \Delta I}{1 - b - h}$, якщо виконується умова:

$$b + h < 1 \tag{30}$$

Умова стабільності (11) говорить про те, що гранична схильність до інвестування повинна бути меншою за граничну схильність до нагромадження (1-b), тобто: $h < 1 - b$.

Тема 5. Динамічна модель зовнішньої торгівлі

Як приклад подальшого удосконалювання мультиплікативної моделі, розглянемо модель збалансованого росту національного доходу з урахуванням операцій експорту та імпорту.

У відкритій економіці сукупна пропозиція визначається як сума національного доходу Y та імпорту M; сукупний попит визначається як національне споживання C, плюс національне інвестування I, плюс експорт X. Балансове співвідношення (20) тепер має вид: $Y + M = C + I + X$.

У цьому випадку модель має вид:

$$Y_t = C_t + I_t + X_t - M_t \tag{31}$$

$$C_t = a + bY_{t-1} \quad a \geq 0 \quad 0 < b < 1 \tag{32}$$

$$I_t = hY_{t-1} + I_0 + \Delta I \quad 0 < h < 1 \tag{33}$$

$$X_t = X_0 + \Delta X \tag{34}$$

$$M_t = mY_{t-1} + M_0 \quad 0 < m < 1 \tag{35}$$

Підставляючи рівняння (32-35) у (31), одержуємо різничне рівняння наступного вигляду:

$$Y_t - (b + h - m)Y_{t-1} = a + I_0 + X_0 - M_0 + \Delta I + \Delta X \qquad (36)$$

Вирішуючи дане рівняння відносно Y_t, одержуємо:

$$Y_t = A(b + h - m)^t + \frac{a + I_0 + X_0 - M + \Delta I + \Delta X}{1 - b - h + m} \qquad (37)$$

Умова стабільності для даного випадку буде мати вигляд: $b + h - m < 1$, звідки $h < 1 - b + m$. Тобто, гранична схильність до інвестування повинна бути меншою за суму граничної схильності до нагромадження та граничної схильності до імпорту.

Мультиплікатор системи в даному випадку дорівнює: $Mult = \dfrac{1}{1 - b - h + m}$.

Тема 10. Нелінійні динамічні системи

Більшість моделей реальних економічних систем нелінійні. Вони мають, як правило, декілька особливих траєкторій, кожна з яких повинна бути досліджена для одержання глобального фазового портрету.

Розглянемо модель співіснування двох конкуруючих видів. Нехай x_1 – кількість осіб першого виду, x_2 – кількість осіб другого виду.

Припущення про наявність конкуренції означає, що популяції співіснують на обмеженій території з обмеженими ресурсами.

dx_1/dt – швидкість зміни кількості осіб першого виду,

dx_2/dt – швидкість зміни кількості осіб другого виду.

Тоді:

$\dfrac{dx_1/dt}{x_1}$ – швидкість росту першої популяції в розрахунку на 1 особу,

$\dfrac{dx_2/dt}{x_2}$ – швидкість росту другої популяції в розрахунку на 1 особу.

Нелінійна динамічна система буде мати наступний вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1 / dt}{x_1} = a - bx_1 - \sigma x_2 \\ \dfrac{dx_2 / dt}{x_2} = c - dx_2 - \mu x_1 \end{cases} \tag{38}$$

де $a, b, c, d, \sigma, \mu > 0$.

b, d – коефіцієнти, що визначають внутрішньовидову конкуренцію;

σ, μ - коефіцієнти, що визначають міжвидову конкуренцію.

Перетворимо систему до наступного виду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1(a - bx_1 - \sigma x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2(c - dx_2 - \mu x_1) \end{cases} \tag{39}$$

Для побудови фазового портрету системи, знайдемо координати її особливих точок:

$$\begin{cases} x_1(a - bx_1 - \sigma x_2) = 0 \\ x_2(c - dx_2 - \mu x_1) = 0 \end{cases} \tag{40}$$

Одержимо наступні рішення даної системи:

1) $x_1 = 0; x_2 = 0$, тобто особлива точка A(0; 0);

2) $x_1 = 0; x_2 = {}^c/_d$, тобто особлива точка B(0; $^c/_d$);

3) $x_1 = {}^a/_b; x_2 = 0$, тобто особлива точка C($^a/_b$; 0);

4) $\begin{cases} a - bx_1 - \sigma x_2 = 0 \\ c - dx_2 - \mu x_1 = 0 \end{cases}$

Вирішуючи цю систему, знаходимо координати четвертої особливої точки:

$x_1 = \dfrac{ad - \sigma c}{bd - \sigma\mu}$; $x_2 = \dfrac{bc - \mu a}{bd - \sigma\mu}$ тобто особлива точка $D\left(\dfrac{ad - \sigma c}{bd - \sigma\mu}; \quad \dfrac{cb - \mu a}{bd - \sigma\mu}\right)$

Оскільки $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$ (за умовою задачі), то рішення системи має сенс у наступних випадках:

$$\begin{cases} ad < \sigma c \\ bd < \sigma\mu \\ bc < \mu a \end{cases} \quad \textit{або} \quad \begin{cases} ad > \sigma c \\ bd > \sigma\mu \\ bc > \mu a \end{cases}$$

Надалі, при визначенні типу особливої точки D, будемо розглядати перший випадок.

Проаналізуємо поведінку системи в місцевостях особливих точок, для цього виконаємо лінеаризацію системи для кожної визначеної точки.

$$\begin{cases} f_1(x_1; x_2) = x_1(a - bx_1 - \sigma x_2) \\ f_2(x_1; x_2) = x_2(c - dx_2 - \mu x_1) \end{cases}$$

$$\frac{df_1}{dx_1} = a - 2bx_1 - \sigma x_2$$

$$\frac{df_1}{dx_2} = -\sigma x_1$$

$$\frac{df_2}{dx_1} = -\mu x_2$$

$$\frac{df_2}{dx_2} = c - 2dx_2 - \mu x_1$$

Тип поведінки в місцевості особливої точки визначається коренями наступного характеристичного рівняння:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{df_1}{dx_1} - \lambda & \dfrac{df_1}{dx_2} \\ \dfrac{df_2}{dx_1} & \dfrac{df_2}{dx_2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{41}$$

1) Для особливої точки *A(0; 0)*, одержуємо:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 \\ 0 & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Характеристичне рівняння має вигляд: $(a-\lambda)(c-\lambda)=0$. Вирішуючи дане рівняння, отримуємо наступне рішення: $\lambda_1 = a > 0$; $\lambda_2 = з > 0$. Отже, корені дійсні та більші за нуль, тому особлива точка А – нестійкий вузол.

2) $B(0;\ ^c/_d)$:

$$\begin{vmatrix} a-\sigma\dfrac{c}{d}-\lambda & 0 \\ -\mu\dfrac{c}{d} & -c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Характеристичне рівняння має вигляд: $\left[\left(a-\sigma\dfrac{c}{d}\right)-\lambda\right](-c-\lambda)=0$.

Вирішуючи дане рівняння, отримуємо рішення: $\lambda_1 = a - \sigma\ ^c/_d < 0$; $\lambda_2 = -з < 0$. Отже, корені дійсні та менші за нуль, тому особлива крапка В – стійкий вузол.

3) $C(^a/_b; 0)$:

$$\begin{vmatrix} -a-\lambda & -\sigma\dfrac{a}{b} \\ 0 & c-\mu\dfrac{a}{b}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Характеристичне рівняння має вигляд: $(-a-\lambda)\left[\left(c-\mu\dfrac{a}{b}\right)-\lambda\right]=0$.

Вирішуючи дане рівняння, отримуємо рішення: $\lambda_1 = -a < 0$; $\lambda_2 = c - \mu\ ^a/_b < 0$. Отже, корені дійсні та менші за нуль, тому особлива крапка С – стійкий вузол.

4) $D\left(\dfrac{ad-\sigma c}{bd-\sigma\mu};\ \ \dfrac{cb-\mu a}{bd-\sigma\mu}\right)$:

$$\begin{vmatrix} a-2b\dfrac{ad-\sigma c}{bd-\sigma\mu}-\sigma\dfrac{bc-\mu a}{bd-\sigma\mu}-\lambda & -\sigma\dfrac{ad-\sigma c}{bd-\sigma\mu} \\ -\mu\dfrac{bc-\mu a}{bd-\sigma\mu} & c-2d\dfrac{bc-\mu a}{bd-\sigma\mu}-\mu\dfrac{ad-\sigma c}{bd-\sigma\mu}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Вирішуючи дане характеристичне рівняння, отримуємо наступну інформацію про його корені: λ_1 і λ_2 дійсні та мають різні знаки, отже особлива крапка D – сідло.

Знаючи координати особливих точок системи, та визначивши їх тип, виконуємо побудову фазового портрету системи (рис. 8)

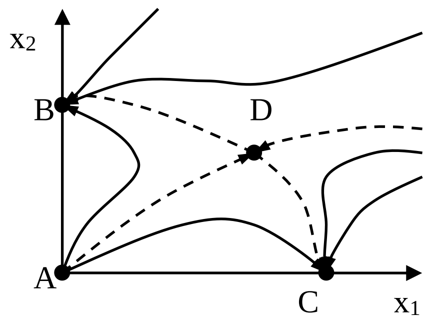


Рис. 8. Фазовий портрет нелінійної динамічної системи

Майже завжди система приходить або до стану рівноваги B, або C – принцип конкурентного виснаження, і лише початковим умовам, що відповідають сепаратрисам (показані на малюнку пунктирними лініями), що входить у стан рівноваги D, буде відповідати співіснування двох видів.

Тема 15. Павутиноподібна модель ринкової рівноваги

Закони зміни системи цін, як і закони зміни індивідуального попиту, виводяться з умов стабільності.

Що мається на увазі під стабільністю обміну споживчих благ? Для стабільності стану рівноваги необхідно, щоб найменше відхилення системи від рівноважного стану викликало до дії сили, що прагнуть відновити стан рівноваги. Це означає, що перевищення ціною рівноважного значення неминуче породжує дію сил, що прагнуть знизити ціну; для умов цілковитої конкуренції це означає, що зростання ціни веде до розширення пропозиції в порівнянні з попитом, та навпаки. Найбільш простою ілюстрацією вищевикладеного служить павутиноподібна модель ринкової рівноваги, яка є однією з класичних економіко-математичних моделей.

Припустимо, що пропозиція товару S на ринку реагує на зміну ціни p з лагом запізнювання в 1 період, у той час, як попит D визначається поточною ціною, і обидві ці залежності лінійні:

$$D_t = a + bp_t \quad ; \quad S_t = a_1 + b_1 p_{t-1} \tag{42}$$

де D_t – попит на товар в момент часу t;

S_t – пропозиція товару в момент часу t;

p_t – ціна на товар в момент часу t;

a, b – коефіцієнти.

Пропозиція поводиться таким чином, тому що наведена модель відноситься до продукції, яка не виробляється миттєво – потрібно визначений проміжок часу. Вирішальним фактором є те, що виробники вважають, що ціна, встановлена на початку періоду, не змінюється протягом його і є основою для вибору обсягів виробництва в майбутньому.

В кожнім періоді ринок встановлює таку ціну, при якій попит поглинає весь обсяг пропозиції, у такий спосіб:

$$D_t = S_t \tag{43}$$

Підставивши рівняння (42) у (43), будемо мати:

$$bp_t - b_1 p_{t-1} = a_1 - a \tag{44}$$

З рівняння (44) можна визначити ціну p у наступний момент часу на підставі її значення в попередній момент:

$$p_t = \frac{a_1 - a + b_1 p_{t-1}}{b} \tag{45}$$

Це ж значення ціни можна одержати, знайшовши рішення різничного рівняння (44):

$$p_t = (p_0 - p_e)\left(\frac{b_1}{b}\right)^t + p_e \qquad (46)$$

де p_e – рівноважна ціна, встановлювана в системі, та яка дорівнює:

$$p_e = \frac{a_1 - a}{b - b_1} \qquad (47)$$

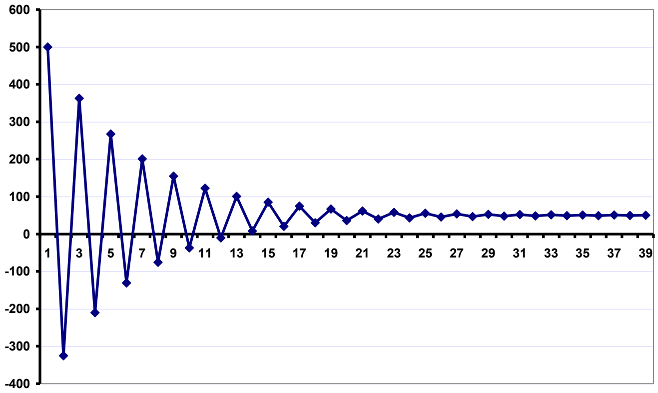
Звичайно графік попиту має від'ємний кут нахилу ($b<0$), а пропозиція – додатний ($b_1>0$). Таким чином, $b_1/b<0$, і ціна буде робити коливальні рухи навколо свого рівноважного значення p_e. Ці періодичні коливання можуть здійснюватися зі збільшуючимся, постійним чи зменшуючимся періодом, у залежності від співвідношення $|b_1| \Leftrightarrow |b|$, тобто, у залежності від того, чи перевершує кут нахилу кривої попиту кут нахилу кривої пропозиції.

Як видно з (46), умова стабільності, тобто умова, за якої ціна сходиться до стану рівноваги p_e, буде мати вигляд:

$$\left|\frac{b_1}{b}\right| < 1 \qquad \text{тобто} \qquad |b_1| < |b|$$

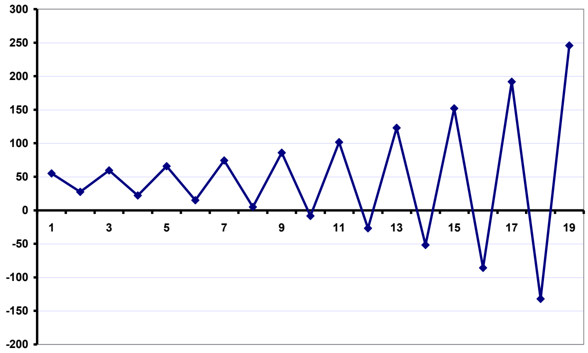
Графічно, описаний процес зображено на рисунку 9.

Згасаючі коливання



$a = 600$; $a_1 = 50$; $b = -6$; $b_1 = 5$

«Вибухові» коливання



$a = 600; a_1 = 50; b = -6; b_1 = 7$

Рис. 9. Ринкова рівновага у павутиноподібній моделі

На рисунку 9 показана ситуація стійкого (ліворуч) та нестійкого (праворуч) стану рівноваги ринкової ціни.

Тема 25. Хаос і управління динамічними економічними системами

Хаотичні процеси в детермінованих нелінійних системах – одна з фундаментальних проблем досліджень економічних явищ. Можливість хаотичних процесів передбачав А. Пуанкаре: «У нестійких системах, незначна причина, що непомітна для спостереження за своєю малістю, викликає значну дію, яку неможливо передбачити». Розвиток ідей Пуанкаре призвів до створення фундаменту хаотичної динаміки детермінованих систем. Було встановлено, що необхідною умовою виникнення хаосу в динамічних системах є розмірність фазового простору $n>2$, тобто коли стан системи характеризується мінімум трьома змінними.

Що являє собою явище детермінованого хаосу? Дамо визначення поняттям «детермінованість» та «хаос», а потім визначимо зміст терміна «детермінований хаос».

Детермінованість – це однозначний взаємозв'язок причини та наслідків: якщо задано деякий початковий стан системи в момент часу t_0, то він однозначно визначає стан системи в будь-який наступний момент часу $t>t_0$.

У загальному випадку, залежність майбутнього стану економічної системи x(t), від початкового $x(t_0)$, можна записати у вигляді:

$$x(t) = F[x(t_0)] \tag{48}$$

де F – детермінований закон, що здійснює строго однозначне перетворення початкового стану економічної системи $x(t_0)$, у майбутній стан x(t), для любого $t>t_0$.

Розглянемо поняття хаосу на прикладі експерименту з броунівською часткою. Помістимо частку в момент часу $t = t_0$ у розчин рідини і за допомогою мікроскопу почнемо фіксувати зміну її положення в часі, визначаючи координати частки через рівні інтервали Δt. Під дією випадкових поштовхів з боку навколишніх молекул, частка буде робити нерегулярні блукання, що характеризуються заплутаною траєкторією. Повторивши експеримент кілька разів, можна зробити наступні висновки:

– щоразу траєкторія поводження системи складна та неперіодична;

– будь-яка спроба однозначного повторення експерименту приводить до негативного результату.

Класичне явище руху броунівської частки, дає чіткі фізичні уявлення про хаос як непередбачуваний, випадковий процес.

Поняття хаосу означає, що зміна стану системи протягом часу є випадковою (її не можна однозначно визначити) та не відтворюваною (процес не можна повторити).

Таким чином, детермінізм асоціюється з повною передбачуваністю та відтворюваністю поводження системи, хаос – з повною непередбачуваністю та не відтворюваністю.

Для того, щоб визначити зміст поняття «детермінований хаос», дамо визначення стійкого та нестійкого стану рівноваги.

Якщо під незначним зовнішнім впливом динамічна система відхиляється від свого стану рівноваги і ці відхилення з часом згасають, а система прагне до свого стану рівноваги, то така рівновага є стійкою. Якщо ж початкові малі зрушення протягом часу збільшуються, то такий стан рівноваги називається нестійким.

Важливою властивістю систем з нестійким режимом поведінки є не лінійність. Порушивши стан рівноваги такої системи малим впливом, будемо спочатку фіксувати збільшення відхилень доти, поки в дію не вступить механізм нелінійного обмеження. Після цього, процес збільшення відхилень припиняється. Внаслідок обмеженості ресурсів системи, це нарощування повинно припинитися та змінитися на зменшення амплітуди відхилення.

Припустимо, що аналізується двовимірна диференційна динамічна система. Простір її станів – фазова площина з координатами x_1 і x_2. Якщо первісне незначне відхилення системи від стану рівноваги спочатку буде збільшуватися, а в результаті нелінійного обмеження далі зменшуватися, то можливі два варіанти сценаріїв розвитку:

– поява нових стійких станів рівноваги поблизу нестійкого;
– перехід у новий режим, що відповідає періодичним коливанням.

Другий варіант показаний на рисунку 10. При незначному початковому відхиленні положення системи від точки рівноваги О, подальший її розвиток відбувається по спіралі, поступово віддаляючись від стану рівноваги. Якщо початкові відхилення системи від стану рівноваги значні, то траєкторія її розвитку протягом часу наближається до точки рівноваги.

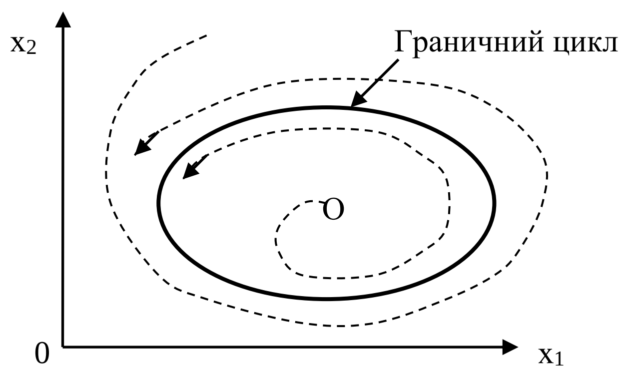


Рис. 10. Нелінійні обмеження для двовимірної динамічної системи

Замість нестійкого стану рівноваги з'являється новий режим – періодичні автоколивання, яким відповідає граничний цикл на фазовій площині.

Розглянемо динамічну систему, стан якої характеризується трьома незалежними змінними (фазовими координатами) у тривимірному фазовому просторі. Траєкторія розкручується, віддаляючись від особливої точки системи по спіралі. Досягши деяких значень, згідно дії механізму нелінійного обмеження, траєкторія знову наблизиться до свого вихідного положення. Через нестійкість, описаний процес буде повторюватися (рис. 11).

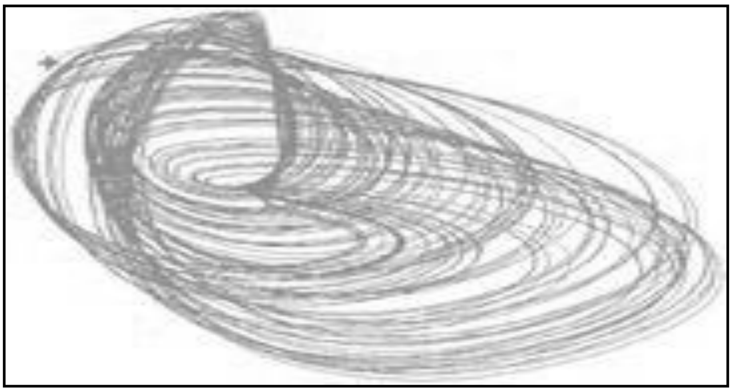


Рис. 11. Нелінійні обмеження для тривимірної динамічної системи

Можливі два варіанти поводження системи:

– протягом деякого часу траєкторія системи буде замикатися, демонструючи наявність складного, але періодичного процесу;

– траєкторія буде відтворювати деякий аперіодичний процес, якщо при любому t, замикання не відбудеться.

Другий варіант відповідає режиму детермінованого хаосу:

– майбутній стан системи однозначно визначається її початковим станом;

– процес розвитку системи складний, неперіодичний, зовні нічим не відрізняється від випадкового.

Важливо відзначити, що на відміну від випадкового, описаний процес цілком відтворюваний. Якщо систему повернути до її початкового стану, то, зважаючи на наявність детермінованості, ми знову відтворимо ту ж саму траєкторію незалежно від ступеня її складності.

У випадках нестійкого стану рівноваги детермінованих нелінійних систем, однозначно прогнозувати її майбутній стан можна тільки у випадку абсолютно точного завдання початкових умов. Однак, якщо враховувати можливість якої завгодно малої помилки, то детерміноване прогнозування стає неможливим – головною властивістю динамічних систем, що демонструють режим детермінованого хаосу, є чуттєва залежність режиму функціонування до яких завгодно малих змін початкових умов. Саме ця обставина веде до втрати детермінованої передбачуваності та необхідності вводити імовірнісні характеристики для опису динаміки таких систем.

Оскільки будь-яке вимірювання початкових умов положення системи визначається з кінцевою (якою завгодно малою) помилкою, то аналізувати еволюцію розвитку системи потрібно виходячи не тільки з початкового стану системи, але й також з початкової області навколо цієї точки.

Математичним образом режиму функціонування динамічної системи є атрактор – гранична траєкторія, яка представляє собою точки у фазовому просторі, до якого прагнуть усі вихідні режими. Якщо такий режим є стійким станом рівноваги, то атрактор системи буде представлений особливою точкою; якщо це стійкий періодичний рух – атрактором буде замкнута крива, яка називається граничним циклом.

Раніше вважалося, що атрактор – це образ винятково стійкого режиму функціонування системи. Сучасні погляди говорять про те, що режим детермінованого хаосу також є атрактором, в контексті визначення граничної траєкторії в обмеженій області фазового простору. Однак такий атрактор має дві суттєві відмінності: траєкторія такого атрактору неперіодична (вона не замикається) і режим функціонування нестійкий (малі відхилення від початкового стану рівноваги наростають). Ці атрактори отримали назву дивних. Швидка розбіжність двох близьких у початковий момент часу траєкторій означає дуже велику чутливість рішень до малої зміни початкових умов. Цим зумовлені великі труднощі, чи, навіть, неможливість довгострокового прогнозу поводження нелінійних динамічних систем.

Те, що чутливість динамічної системи до початкових даних веде до хаосу, у 1963 р. зрозумів американський метеоролог Э. Лоренц. Він запропонував найпростішу модель конвекції повітря (яка відіграє важливу роль в динаміці атмосферних умов).

Модель описується наступною системою диференційних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma(x+y) \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \tag{49}$$

Комп'ютерний аналіз системи Лоренца привів до принципового результату: детермінований хаос, тобто, неперіодичний рух у детермінованих системах, де майбутній стан однозначно визначається минулим, має кінцевий горизонт прогнозування.

У загальному випадку наявність дивного атрактору означає, що:

– система чутлива щодо малих змін у початкових умовах;

– загальні характеристики системи стійкі і не залежать від початкових умов.

КРИТЕРІЇ МОДУЛЬНОГО ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ

Оцінювання навчальних успіхів студентів реалізується шляхом проведення поточного та підсумкового контролю успішності. Поточний контроль здійснюється за тестовою методикою з отриманням оцінок, які характеризують рівень засвоєння студентами теоретичного матеріалу та бальною оцінкою якості виконання лабораторних робіт.

Передбачено, що для кожного модуля значення максимальної рейтингової оцінки складає 20 балів. Навчальним планом підготовки з дисципліни «Моделювання економічної динаміки» передбачена така форма проведення підсумкового контролю як іспит, максимальне значення якого складає 40 балів.

Сумарний рейтинговий бал за період вивчення дисципліни «Моделювання економічної динаміки» складає 100 балів.

Розподіл балів, які отримують студенти

<table>
<tr><td rowspan="7">Поточне тестування та самостійна робота</td><td rowspan="3">Модуль 1</td><td>Т1</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Т2</td><td>7</td></tr>
<tr><td>Т3</td><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Модуль 2</td><td>Т4</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Т5</td><td>10</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Модуль 3</td><td>Т6</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Т7</td><td>10</td></tr>
<tr><td colspan="3">Іспит</td><td>40</td></tr>
<tr><td colspan="3">Сума</td><td>100</td></tr>
</table>

Т1, Т2 ... Т7 – теми модулів 1-3.

Шкала оцінювання: національна та ЄКТС

<table>
<tr><td rowspan="2">Сума балів за всі види навчальної діяльності</td><td rowspan="2">Оцінка ECTS</td><td colspan="2">Оцінка за національною шкалою</td></tr>
<tr><td>для екзамену, курсового проекту (роботи), практики</td><td>для заліку</td></tr>
<tr><td>90 – 100</td><td>A</td><td>відмінно</td><td rowspan="5">зараховано</td></tr>
<tr><td>82 - 89</td><td>B</td><td rowspan="2">добре</td></tr>
<tr><td>74 - 81</td><td>C</td></tr>
<tr><td>64 - 73</td><td>D</td><td rowspan="2">задовільно</td></tr>
<tr><td>60 - 63</td><td>E</td></tr>
<tr><td>35 - 59</td><td>FX</td><td>незадовільно з можливістю повторного складання</td><td>не зараховано з можливістю повторного складання</td></tr>
<tr><td>0 - 34</td><td>F</td><td>незадовільно з обов’язковим повторним вивченням дисципліни</td><td>не зараховано з обов’язковим повторним вивченням дисципліни</td></tr>
</table>

ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ, ЯКІ ВИНОСЯТЬСЯ НА ЕКЗАМЕН

1. Теоретичні основи економічної динаміки. Методи дослідження при динамічному підході.

2. Визначення економічної динаміки як напрями економічній теорії. Основні поняття і показники економічної динаміки. Властивості динамічних систем.

3. У чому полягає динамічний підхід до дослідження економічних систем? Етапи побудови динамічних моделей.

4. Основні припущення динамічної моделі В. Леонтьева.

5. Загальний вигляд рівняння динамічної моделі В. Леонтьева.

6. Поняття про допустимість станів і траєкторії динамічної моделі В. Леонтьева.

7. Вирішення динамічної моделі В. Леонтьева в разі відсутності екзогенного споживання та з його врахуванням.

8. Аналіз економічного зростання при різних траєкторіях споживання на основі динамічної моделі В. Леонтьева.

9. Що означає стійкість динамічних систем? Формальне представлення стійкості динамічних систем. Принцип стійкості.

10. Критерій стійкості Гурвіця.

11. Опишіть залежність між об'єктом виробництва та споживання в моделі економічних циклів Гудвіна.

12. Опишіть залежність між бажаним рівнем капіталовкладень R і рівнем основного капіталу K.

13. Охарактеризуйте узагальнений варіант моделі економічних циклів Гудвіна.

14. Які припущення використовуються в моделях економічних циклів Гудвіна?

15. У чому суть модифікації моделей економічних циклів Гудвіна?

16. Охарактеризуйте варіант моделі економічних циклів Гудвіна з врахуванням запізнювання реальних капіталовкладень.

17. Які процеси в економіці називаються «Валютною панікою»?

18. У чому суть моделі валютної паніки?

19. Проведіть порівняльний аналіз вигляду $k(t)$ при різних значеннях r для моделі валютної паніки.

20. Розкрійте суть моделі сценаріїв розвитку перехідної економіки.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Азаренкова Г. М. Аналіз моделювання і управління ризиком (в схемах та прикладах) : навч. посіб. для студ. екон. спец. вищ. навч. закл. усіх форм навч. Львів : Новий світ-2000, 2015. 240 с. (Вища освіта в Україні).

2. Косарєв В. М., Кочура Є. В. Моделювання макроекономічної динаміки : Навч. посібник для внз / Є. В. Кочура, В. М. Косарєв ; Дніпропетр. ун-т економіки та права. Київ : Центр навч. літ., 2003. 235 с.

3. Кочура Є. В., Косарєв В. М. Моделювання макроекономічної динаміки : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. реком. МОНУ. Київ : Центр навчальної літератури, 2003. 236 с.

4. Солодухін С. В., Хорошун В. В. Моделювання економіки: навч.-метод. посібник для студентів ЗДІА галузі знань 05 Соціальні та поведінкові науки, спеціальності 051 Економіка, освітньо-кваліфікаційного рівня першого (бакалаврського). Запоріжжя: ЗДІА, 2018. 200 с. URL: http://www.library.zgia.zp.ua/ukr/index.php?text=Polnotext&bookid=6181

5. . Солодухін С. В., Хорошун В. В. Моделювання економіки. Методичні рекомендації до виконання курсових робіт з дисципліни «Моделювання економіки» для студентів ЗДІА галузі знань 05 Соціальні та поведінкові науки, спеціальності 051 Економіка освітньо-кваліфікаційного рівня першого (бакалаврського). Запоріжжя: ЗДІА, 2017. 50 с. URL: http://www.library.zgia.zp.ua/ukr/index.php?text=Polnotext&bookid=6055

6. Хорошун В. В., Науменко І. А. Моделювання економіки: метод. вказівки до виконання лабор. робіт для студентів ЗДІА спец. 051 "Економіка" ден. і заоч. форм навчання. Запоріжжя: ЗДІА, 2018. 83 с. URL: http://www.library.zgia.zp.ua/ukr/index.php?text=Polnotext&bookid=6306

7. Рибінцев В. О., Солодухін С. В., Хорошун В. В., Комазов П. В. Моделювання економічної динаміки: навч.-метод. посібник для студ. ЗДІА галузі знань 05 "Соціальні та поведінкові науки" спец. 051 "Економіка" другого (магістер.) освітньо-кваліфікац. рівня за освітньою програмою "Економічна

кібернетика". Запоріжжя: ЗДІА, 2017. 151 с. URL: http://www.library.zgia.zp.ua/ukr/index.php?text=Polnotext&bookid=6037

8. Олійник В. М. Моделювання емерджентної економіки: конспект лекцій. Суми: СумДУ, 2019. 207 с. URL: http://ebooks.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi59/0044048.pdf

9. Максишко Н. К. Моделювання системних характеристик в економіці : навч.-метод. посіб. для здобув. ступ. вищ. освіти магіст. спец. "Економіка" освіт.-проф. прогр. "Економічна кібернетика". Запоріжжя : ЗНУ, 2018. 128 с. URL: http://ebooks.znu.edu.ua/files/metodychky/2018/05/0042061.docx

10. Козак Ю. Г., Мацкул В. М., Мацкул М. В., Окара Д. В., Чернишев В. Г., Чепурна О. Є., Шинкаренко В. М., Захарченко О. В. Математичне моделювання для економістів: бакалавр – магістр – доктор філософії (PhD) : навч. посіб. / за ред. Ю.Г. Козак, В.М. Мацкул. Київ: Центр учбової літератури, 2017. 252 с. URL: http://ebooks.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi56/0041379.pdf

11. Притула М. М. Моделювання та прогнозування економіко-екологічних процесів: навчально-методичний посібник. Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2013. 252 с.

12. Максишко Н.К., Чеверда С.С., Очеретін Д.В. Моделювання економіки: метод. вказівки до виконання лабор. робіт для студ. напряму підготовки "Економічна кібернетика" ден. та заоч. форм навчання. Запоріжжя: ЗНУ, 2012. 94с.

13. Останкова Л. А., Шевченко Н. Ю. Аналіз, моделювання й управління економічними ризиками: навчальний посібник рекомендовано МОН України для студ. вищих навч. закладів. Київ : Центр учбової літератури, 2011. 256 с. URL: http://ebooks.znu.edu.ua/files/TSUL/0010483.pdf

14. Лугінін О. Є., Фомішина В. М. Економіко-математичне моделювання : навч. посіб. [для студ. екон. спец. вищ. навч. закл.] реком. МОНУ. Київ : Знання, 2011. 344 с.

15. Мамонов К. А., Скоков Б. Г., Політучий С. Я. Економіко-математичне моделювання (модульний варіант) : навч. пос. для студ. галузі

знань 0305 "Економіка та підприємництво", напряму підготовки 6.030509 "Облік і аудит". Харьків : ХНАМГ, 2010. 226 с. URL: http://ebooks.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Zinovev/0008642.pdf

Додаткова:

1. Мехоношин С. О. Гімнастика. Індивідуальна та самостійна робота студентів (на прикладі технологій графічного конструювання, ситуаційного моделювання, ступеневого навчання) : монографія. Тернопіль : Навчальна книга - Богдан, 2013. 216 с.

2. Пріоритети інвестиційної політики в контексті модернізації економіки України : аналітична доповідь / авт. кол.: А.П. Павлюк, Д.С. Покришка, О.О. Молдован та ін.; за ред. Я.А. Жаліла. Київ : НІСД, 2013. 78 с. (Економіка ; Вип. 2).

3. Максишко Н. К., Заховалко Т. В. Моделі та методи розв`язання прикладних задач покриття на графах та гіперграфах : монографія. Запоріжжя : Поліграф, 2009. 244 с.

4. Грисенко М. В. Математика для економістів. Методи й моделі, приклади й задачі : навч. посіб. для студ. екон. спец. вищ. навч. закл. реком. МОНУ. Київ : Либідь, 2007. 720 с.

5. Ксеневич М. Я. Просторова організація і сталий розвиток міст-центрів (моделювання, нормування та методика на прикладі Донецька-Макіївки). Київ ; Вінниця : НДІП містобудування, "Тезис", 2001. 160с. Українська академія архітектури, НДІП містобудування.

6. Макроекономічне моделювання та короткострокове прогнозування / За ред. Крючкової І.В. Харків : Форт, 2000. 336с.

7. Математичні методи, моделі в економіці : матеріали II туру Всеукраїнського конкурсу студентських наукових робіт 2016/17 н.р. : збірник / за ред. Н.К. Максишко. Запоріжжя : ЗНУ, 2017. 172 с.

8. Бабкін С. В., Безковайний В. В., Бугас Д. М., Булаєнко М. В., Воліков Т. А., Гусєва Ю. Ю., Гуца О. М., Давідіч Н. В., Довгопол Н. В. Моделювання процесів в економіці та управлінні проектами з використанням

нових інформаційних технологій: монографія / за заг. ред.: В.О. Тімофєєва, І.В. Чумаченко. Харків : ХНУРЭ, 2015. 245 с. URL: http://ebooks.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi51/0039370.pdf

9. Оліскевич М. О. Економетричне моделювання динамічних процесів розвитку ринку праці України : монографія. Львів : ЛНУ ім. І.Франка, 2015. 400с.

10. Соскін О. І. Народний капіталізм: економічна модель для України = Soskin Oleh. National Capitalism. The Economic Model for Ukraine: monograph: монографія. Київ : ІСТ, 2014. 396 с.

11. Формування моделі економічного розвитку України у післякризовому світі : аналітична доповідь / авт. кол.: Я.А. Жаліло, Д.С. Покришка та ін. Київ : НІСД, 2014. 116 с. (Економіка ; Вип.14).

12. Рогоза М. Є., Сененко І. А. Управління соціально-економічним розвитком підприємств: механізми, моделі формування та організація процесів : монографія. Полтава : ПУЕТ, 2013. 99 с. URL: http://ebooks.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi51/0039910.pdf

13. Власюк О. С. Економіко-математичне моделювання процесів соціально-економічного розвитку України. Київ : Акад. фін. управління, 2011. 520 с.

14. Моделювання та інформаційні системи в економіці. Вип. 84 / В. К. Галіцин. Київ: КНЕУ, 2011. 270 с. URL: http://ebooks.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi29/0025055/

15. Бакурова А. В. Самоорганізація соціально-економічних систем: моделі і методи: монографія. Запоріжжя: КПУ, 2010. 328 с.

Інформаційні ресурси:

1. Національна бібліотека України ім. Вернадського. URL: http://www.nbuv.gov.ua/

2. Офіційний сайт Національного банку України. URL: https://bank.gov.ua/

3. Офіційний сайт Державної служби статистики України. URL: http://www.ukrstat.gov.ua/

4. Офіційний сайт Запорізької обласної державної адміністрації. URL: https://www.zoda.gov.ua/

5. Офіційний сайт Головного управління статистики у Запорізькій області. URL: http://zp.ukrstat.gov.ua/

6. Моделювання та прогнозування економічних процесів. Матеріали XII Науково-практичної конференції. 25-27 квітня 2018 рік м. Київ. URL: https://mses.kpi.ua/za/zbir_2018.pdf

7. Economic Models. URL: https://courses.lumenlearning.com/wm-microeconomics/chapter/economic-models/

8. How to build an economic model in your spare time. URL: http://people.ischool.berkeley.edu/~hal/Papers/how.pdf

9. Economic Modelling. URL: https://ideas.repec.org/s/eee/ecmode.html