<u>Означення 1.2.</u> *Перетворенням Лапласа* функції $f(t)$, $t \in R$, називають функцію $F(p)$ комплексної змінної p, що визначається рівністю:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt . \qquad (1.1)$$

Функцію $F(p)$ називають *зображенням* функції $f(t)$ при перетворенні Лапласа, а інтеграл у правій частині рівності (1.1) називають *інтегралом Лапласа*.

Розділ математики, що вивчає перетворення Лапласа, його властивості та застосування, називають *операційним численням*, а метод розв'язання рівнянь різноманітних типів за допомогою перетворення Лапласа – *операційним методом*.

1.2 Властивості перетворення Лапласа

Теорема 1. (Теорема лінійності). Якщо $f(t) \div F(p)$, $g(t) \div G(p)$, то $A \cdot f(t) + B \cdot g(t) \div A \cdot F(p) + B \cdot G(p)$, де A та B – дійсні або комплексні сталі.

Теорема 2. (Теорема подібності). Якщо $f(t) \div F(p)$, то для довільної дійсної сталої $\alpha > 0$ $f(\alpha t) \div \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

Теорема 3. (Теорема зміщення). Якщо $f(t) \div F(p)$, то $e^{at} f(t) \div F(p-a)$, де a – довільна стала.

Теорема 4. (Теорема запізнення). Якщо $f(t) \div F(p)$, то $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} \cdot F(p)$, де $\tau > 0$ – довільна стала.

: $f(t) = \eta(t) - \eta(t-\tau)$. Тоді $f(t) \div \frac{1}{p} - \frac{e^{-p\tau}}{p}$.

Теорема 5. (Теорема випередження). Якщо $f(t) \div F(p)$, то для довільної сталої величини $\tau > 0$

$$f(t+\tau) \div e^{p\tau} \left(F(p) - \int_0^{\tau} f(t) e^{-pt} dt \right).$$

Теорема 6. (Теорема диференціювання по параметру). Якщо $f(t,x) \div F(p,x)$ і функція $f(t,x)$ при кожному фіксованому значенні x є оригіналом, а функція $F(p,x)$ має частинну похідну по x, то $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x} \div \dfrac{\partial F(p,x)}{\partial x}$.

Теорема 7. (Теорема про диференціювання оригінала). Якщо $f(t) \div F(p)$ і функції $f'(t),\ f''(t),\ldots,\ f^{(n)}(t)$ є оригіналами, то

$$f'(t) \div pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \div p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f^{(n)}(t) \div p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

З теореми про диференціювання оригінала випливають наступні наслідки.

Наслідок 1. Якщо $f'(t)$ є оригіналом, а функція $F(p)$ аналітична при $p \to \infty$, то $\lim\limits_{p\to\infty} pF(p) = f(0)$.

Наслідок 2. Якщо $f'(t)$ є оригіналом і існує границя функції $f(t)$ при $t \to \infty$, то $\lim\limits_{p\to 0} pF(p) = \lim\limits_{t\to\infty} f(t)$.

Теорема 8. (Теорема про диференціювання зображення). Якщо $f(t) \div F(p)$, то $F'(p) \div -tf(t)$, $F''(p) \div t^2 f(t)$, …, $F^{(n)}(p) \div (-1)^n t^n f(t)$.

Теорема 9. (Теорема про інтегрування оригінала). Якщо $f(t) \div F(p)$, то $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \div \dfrac{F(p)}{p}$.

Теорема 10. (Теорема про інтегрування зображення). Якщо $f(t) \div F(p)$ і інтеграл $\int\limits_p^\infty F(q)dq$ збіжний, то $\int\limits_p^\infty F(q)dq \div \dfrac{f(t)}{t}$.

<u>**Означення.**</u> *Згорткою* неперервних функцій $f(t)$ та $g(t)$, $t \geq 0$, називають інтеграл $f * g = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$.

Теорема 11. (Теорема про множення зображень). Якщо $f(t) \div F(p)$, а $g(t) \div G(p)$, то $F(p)\cdot G(p) \div f(t) * g(t)$, де $f(t) * g(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau$ – згортка функцій $f(t)$ і $g(t)$.

ТАБЛИЦЯ ОРИГІНАЛІВ ТА ЗОБРАЖЕНЬ ДЛЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	14	$e^{at}\text{ch }\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2-\omega^2}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	15	$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$	16	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$
4	$t^n,\ n\in\mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	17	$t\text{sh }\omega t$	$\frac{2\omega p}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
5	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	18	$t\text{ch }\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{\left(p^2-\omega^2\right)^2}$
6	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	19	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
7	$\text{sh }\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	20	$J_0(t)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
8	$\text{ch }\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	21	$J_n(t),\ n\in N$	$\frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
9	$t^k,\ k>-1$	$\frac{\Gamma(k+1)}{(k+1)!}$	22	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-a\sqrt{p}}$
10	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	23	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$e^{-a\sqrt{p}}$
11	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$	24	e^{-t^2}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{p^2}{4}}\cdot\text{Erf}\left(\frac{p}{2}\right)$
12	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{p}{(p-a)^2+\omega^2}$	25	$\text{erf } t$	$\frac{1}{p}\cdot e^{\frac{p^2}{4}}\cdot\text{Erf}\left(\frac{p}{2}\right)$
13	$e^{at}\text{sh }\omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2-\omega^2}$	26	$\text{Erf}\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-2a\sqrt{p}}}{p}$