

Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – нескінченно малі при $x \rightarrow x_0$.

1. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то кажуть, що $\alpha(x)$ є нескінченно малою

вищого порядку ніж $\beta(x)$ і записують $\alpha = o(\beta)$.

2. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A$, де A – відмінне від нуля число, то кажуть,

що $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – нескінченно малі *одного порядку*. Зокрема, якщо

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то нескінченно малі $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають

еквівалентними і записують $\alpha \sim \beta$.

3. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то кажуть, що $\alpha(x)$ є нескінченно малою

нижчого порядку ніж $\beta(x)$. Але це означає, що $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$, тобто

$\beta = o(\alpha)$.

3) Границя відношення двох нескінченно малих не зміниться, якщо одну з них або обидві замінити еквівалентними їм нескінченно малими.

Корисно **пам'ятати** наступні основні пари еквівалентних при $x \rightarrow 0$:

$\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\operatorname{arctg} x \sim x$; $\ln(1+x) \sim x$,
 $e^x - 1 \sim x$.

Зауважимо, що основні пари еквівалентних нескінченно малих (ст. 159) легко узагальнюються. Зокрема, при $x \rightarrow 0$:

$\sin kx \sim kx$;	$\sin^n x \sim x^n$;	$\sin^n kx \sim (kx)^n$;
$\operatorname{tg} kx \sim kx$;	$\operatorname{tg}^n x \sim x^n$;	$\operatorname{tg}^n kx \sim (kx)^n$;
$\arcsin kx \sim kx$;	$\arcsin^n x \sim x^n$;	$\arcsin^n kx \sim (kx)^n$;
$\operatorname{arctg} kx \sim kx$;	$\operatorname{arctg}^n x \sim x^n$;	$\operatorname{arctg}^n kx \sim (kx)^n$;
$\ln(1+kx) \sim kx$;	$\ln^n(1+x) \sim x^n$;	$\ln^n(1+kx) \sim (kx)^n$;

$$e^{kx} - 1 \sim kx; \quad (e^x - 1)^n \sim x^n; \quad (e^{kx} - 1)^n \sim (kx)^n.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}.$$

$$\mathbf{125.} \text{ Знайти } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+4x-5x^2+x^3)}.$$

┌ При $x \rightarrow 1$ функції $x-3x^2+2x^3$ та $4x-5x^2+x^3$ є нескінченно малими. Тому, використовуючи еквівалентність $\ln(1+t) \sim t$ ($t \rightarrow 0$), маємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+4x-5x^2+x^3)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3x^2+2x^3}{4x-5x^2+x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-3x+1}{x^2-5x+4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x-4} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}. \quad \rfloor \end{aligned}$$

Знайти границі, використовуючи властивість 3) нескінченно малих.

$$\mathbf{131.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x}-1}{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$\mathbf{132.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{\ln^2(1+3x)}.$$

$$\mathbf{133.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(1-x)}.$$

$$\mathbf{134.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-4x)}{e^{2x}-1}.$$

$$\mathbf{135.} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}.$$