2.3 Теореми розвинення

Теорема 1. (Перша теорема розвинення). Якщо функція $F(p)$ є аналітичною у околі нескінченно віддаленої точки $p=\infty$ і її розвинення у ряд Лорана має вигляд $F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{p^{n+1}}$, то функція $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{t^n}{n!}$ є оригіналом для зображення $F(p)$.

Приклад 1. Знайти оригінал $f(t)$ для функції $F(p)=\frac{1}{p}\sin\frac{1}{p}$.

Розв'язання. Знайдемо розвинення зображення $F(p)$ у ряд Лорана:

$$F(p)=\frac{1}{p}\sin\frac{1}{p}=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot p^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot p^{2n+2}}\div\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{\left((2n+1)!\right)^2}.$$

У випадку, коли $F(p)=\frac{Q(p)}{R(p)}$ – правильний раціональний дріб, то оригіналом для нього буде функція

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\left((p-p_k)^{n_k}\frac{Q(p)}{R(p)}e^{pt}\right)^{(n_k-1)}. \tag{1}$$

У формулі (1) p_k – нулі порядку n_k функції $R(p)$. Якщо всі ці нулі знаменника $R(p)$) є простими, то оригіналом для $F(p)$ є функція

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{Q(p_k)}{R'(p_k)}e^{p_k t}. \tag{2}$$

Формулу (2) можна записати також у вигляді:

$$\begin{gathered}f(t)=\frac{Q(p_1)\cdot e^{p_1 t}}{(p_1-p_2)(p_1-p_3)\ldots(p_1-p_n)}+\frac{Q(p_2)\cdot e^{p_2 t}}{(p_2-p_1)(p_2-p_3)\ldots(p_2-p_n)}+\\+\ldots+\frac{Q(p_n)\cdot e^{p_n t}}{(p_n-p_1)(p_n-p_2)\ldots(p_n-p_{n-1})}.\end{gathered} \tag{3}$$

Приклад 2. Знайти оригінал $f(t)$ для функції $F(p)=\frac{3p}{(p+1)^2(p-2)^2}$.

Розв'язання. Функція $F(p)$ має корені знаменника $p_1=-1$ та $p_2=2$ другого порядку, тому застосуємо формулу (1):

$$f(t)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to-1}\left(\frac{3pe^{pt}}{(p-2)^2}\right)'+\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to2}\left(\frac{3pe^{pt}}{(p+1)^2}\right)'=$$

$$=3\lim_{p\to-1}\frac{e^{pt}\left((1+pt)(p-2)-2p\right)}{(p-2)^3}+3\lim_{p\to2}\frac{e^{pt}\left((1+pt)(p+1)-2p\right)}{(p+1)^3}=$$

$$=\frac{1}{9}\left((6t-1)e^{2t}-(3t-1)e^{-t}\right).$$

Приклад 2. Знайти оригінал $f(t)$ для функції $F(p)=\dfrac{1}{p^4-1}$.

Розв'язання. Знаменник функції $F(p)$ має лише прості корені $p_1=-1$, $p_2=1$, $p_3=-i$, $p_4=i$. Тому за формулою (3) маємо:

$$f(t)\div\frac{e^{-t}}{(-1+i)(-1-i)(-1-1)}+\frac{e^{t}}{(1+1)(1+i)(1-i)}+\frac{e^{it}}{(i+1)(i-1)(i+i)}+$$

$$+\frac{e^{-it}}{(-i+1)(-i-1)(-i-i)}=-\frac{e^{-t}}{4}+\frac{e^{t}}{4}+\frac{ie^{it}}{4}-\frac{ie^{-it}}{4}=\frac{1}{2}(\operatorname{sh}t-\sin t).$$

Якщо серед особливих точок раціонального зображення $F(p)$ є прості нулі знаменника $p=\alpha\pm\beta i$, то

$$\left(F(p)\cdot e^{pt}\right)\Big|_{p=\alpha+\beta i}+\left(F(p)\cdot e^{pt}\right)\Big|_{p=\alpha-\beta i}=2\operatorname{Re}\left[\left(F(p)\cdot e^{pt}\right)\Big|_{p=\alpha+\beta i}\right]. \qquad (4)$$

Приклад 2.6. Знайти оригінал $f(t)$ для зображення $F(p)=\dfrac{2p+3}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

Розв'язання. Особливими точками зображення $F(p)$ є прості корені знаменника $p_{1,2}=\pm i$ та $p_{3,4}=\pm 3i$. За формулами (3) та (4) маємо:

$$f(t)=2\operatorname{Re}\left[\left(\frac{(2p+3)e^{pt}(p-i)}{(p^2+1)(p^2+9)}\right)\Bigg|_{p=i}\right]+2\operatorname{Re}\left[\left(\frac{(2p+3)(p-3i)e^{pt}}{(p^2+1)(p^2+9)}\right)\Bigg|_{p=3i}\right].$$

Знаходимо необхідні значення у точках $p=i$ та $p=3i$:

$$\left[\left(\frac{(2p+3)e^{pt}(p-i)}{(p^2+1)(p^2+9)}\right)\Bigg|_{p=i}\right]=\frac{(2i+3)e^{it}}{16i}=\frac{(2-3i)(\cos t+i\sin t)}{16},$$

$$\left[\left(\frac{(2p+3)e^{pt}(p-3i)}{(p^2+1)(p^2+9)}\right)\Bigg|_{p=3i}\right]=\frac{(6i+3)e^{3it}}{-48i}=\frac{(-2+i)(\cos 3t+i\sin 3t)}{16},$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{(2-3i)(\cos t+i\sin t)}{16}\right]=\frac{2\cos t+3\sin t}{16},$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{(-2+i)(\cos 3t+i\sin 3t)}{16}\right]=-\frac{2\cos 3t+\sin 3t}{16}.$$

За формулою (4) знаходимо оригінал для заданого зображення:

$$f(t)=\frac{2\cos t+3\sin t-2\cos 3t-\sin 3t}{8}.$$

Завдання для самоперевірки

1. Знайдіть оригінали, якщо:

1) $F(p)=\dfrac{2p+1}{p^2-5p+6}$; 2) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}$; 3) $F(p)=\dfrac{3p-2}{(p^2+1)(p^2-p+1)}$

4) $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$; 5) $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$; 6) $F(p)=\dfrac{2e^{-p}}{p^3-6p^2+5p}$.

2. Знайдіть оригінали для наступних зображень:

1) $F(p)=\dfrac{p^2+p-1}{(p-2)(p^2-p-20)}$; 2) $F(p)=\dfrac{p^2-p+2}{(p^2+4)(p^2+1)}$;

3) $F(p)=\dfrac{1}{p^3(p+1)^4}$; 4) $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^3(p^2+1)(p-2)}$.

3. Знайдіть оригінал для зображення $F(p)$, якщо:

а) $F\left(p\right)=\frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}$; б) $F\left(p\right)=\frac{e^{\frac{1}{p}}}{p^2}$.

4. Знайдіть оригінал $f\left(t\right)$ для зображення $F\left(p\right)=\frac{n!}{p\left(p+1\right)\left(p+2\right)...\left(p+n\right)}$.