Лекція 4. Критерій подібності матриць

4.1 Унімодулярні λ-матриці.

Многочленну, або λ-матрицю, $U(\lambda)$ називають унімодулярною, якщо її визначник відмінний від нуля і не залежить від λ:

$$|U(\lambda)| = const \neq 0.$$

З означення унімодулярної матриці випливає, що всі її інваріантні многочлени дорівнюють одиниці: матриця має ранг n, її визначник – многочлен нульового степеня, тобто $D_n(\lambda) = 1$ і, як наслідок,

$$D_{n-1}(\lambda) = ...D_1(\lambda) = 1,\ e_1(\lambda) = ... = e_n(\lambda) = 1.$$

Таким чином, якщо $U(\lambda)$ - унімодулярна, то $U(\lambda) \sim E$.

Добуток унімодулярних матриць є унімодулярною матрицею.

Обернена до унімодулярної матриці є унімодулярною матрицею.

Твердження. Для того, щоб матриці $A(\lambda)$ та $B(\lambda)$ були еквівалентними, необхідно і достатньо, щоб для них існували унімодулярні матриці $U(\lambda)$ та $V(\lambda)$ такі, що

$$B(\lambda) = U(\lambda)A(\lambda)V(\lambda).$$

4.2 Матричні многочлени

Розглянемо квадратну многочленну матрицю $A(\lambda)$, елементами якої є многочлени з коефіцієнтами із заданого числового поля K:

$$A(\lambda) = \{a_{ij}(\lambda)\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}} = \{a_{ij}^0 \lambda^m + a_{ij}^1 \lambda^{m-1} + ... + a_{ij}^m\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$$

Матрицю $A(\lambda)$ можна подати у вигляді многочлена з матричними коефіцієнтами

$$A(\lambda) = A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + ...A_m,$$

де

$$A_k = \{a_{ij}^k\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}, k = 0,1,...,m.$$

Число m називають *степенем* многочлена, якщо $A_0 \neq 0$. Число n називають *порядком* многочлена. Якщо $|A_0| \neq 0$, то многочлен називають *регулярним*. Многочлен із матричними коефіцієнтами називають *матричним многочленом*.

Операції над матричними многочленами.

Розглянемо два многочлени $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ одного порядку:

$$A(\lambda) = A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \ldots + A_m,$$

$$B(\lambda) = B_0\lambda^m + B_1\lambda^{m-1} + \ldots + B_m.$$

1. *Додавання (віднімання)* матричних многочленів визначається за правилом:

$$A(\lambda) \pm B(\lambda) = (A_0 \pm B_0)\lambda^m + (A_1 \pm B_1)\lambda^{m-1} + \ldots + (A_m \pm B_m)$$

2. Якщо маємо два многочлени одного порядку, але різних степенів m і p

$$A(\lambda) = A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \ldots + A_m,$$

$$B(\lambda) = B_0\lambda^p + B_1\lambda^{p-1} + \ldots + B_p,$$

тоді *добутком многочленів* буде многочлен

$$A(\lambda)B(\lambda) = A_0B_0\lambda^{m+p} + (A_0B_1 + A_1B_0)\lambda^{m+p-1} + \ldots + A_mB_p.$$

На відміну від скалярних многочленів, взагалі кажучи, $A(\lambda)B(\lambda) \neq B(\lambda)A(\lambda)$.

3. Нехай задані два многочлени $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ одного порядку, причому $B(\lambda)$ - регулярний многочлен:

$$A(\lambda) = A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \ldots + A_m, \ (A_0 \neq 0)$$

$$B(\lambda) = B_0\lambda^p + B_1\lambda^{p-1} + \ldots + B_p, \ (|B_0| \neq 0).$$

Матричні многочлени $Q(\lambda)$ і $R(\lambda)$ називають *правою часткою* і *правою остачею* при діленні $A(\lambda)$ на $B(\lambda)$, якщо

$$A(\lambda) = Q(\lambda)B(\lambda) + R(\lambda)$$

і степінь $R(\lambda)$ менший за степінь $B(\lambda)$.

Якщо

$$A(\lambda) = B(\lambda)\tilde{Q}(\lambda) + \tilde{R}(\lambda)$$

і степінь $\tilde{R}(\lambda)$ менший за степінь $\tilde{B}(\lambda)$, то многочлени $\tilde{Q}(\lambda)$ і $\tilde{R}(\lambda)$ називають *лівою часткою* і *лівою остачею* при діленні $A(\lambda)$ на $B(\lambda)$.

Операції лівого та правого ділення матричних многочленів одного і того ж порядку завжди виконувані і однозначні, якщо дільник – регулярний многочлен.

Введемо поняття значення многочлена від матриці. Розглянемо матричний многочлен степені m порядку n від скалярної змінної λ:

$$V(\lambda) = V_0\lambda^m + V_1\lambda^{m-1} + \ldots + V_{m-1}\lambda + V_m, \qquad (*)$$

V_i, $i = \overline{1,m}$ - $n \times n$-матриці з числовими коефіцієнтами.

Матричний многочлен можна записати також і у вигляді

$$V(\lambda) = \lambda^m V_0 + \lambda^{m-1}V_1 + \ldots + \lambda V_{m-1} + V_m. \qquad (**)$$

Якщо λ - скалярна величина, то значення матричного многочлена, отримані з формул (*) і (**) співпадають. Якщо ж в ці формули замість λ підставити матрицю A, то отримаємо різні результати

$V(A) = V_0A^m + V_1A^{m-1} + \ldots + V_{m-1}A + V_m$ – праве значення матричного многочлена від матриці

$\tilde{V}(A) = A^m V_0 + A^{m-1}V_1 + \ldots + AV_{m-1} + V_m$ – ліве значення матричного многочлена від матриці

Нехай $V(\lambda)$ – довільний многочлен n-го порядку

$$V(\lambda) = V_0\lambda^m + V_1\lambda^{m-1} + \ldots + V_{m-1}\lambda + V_m, \; |V_0| \neq 0.$$

Поділимо його на лінійний двочлен $(\lambda E - A)$ із правого боку і з лівого боку:

$$V(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda E - A) + R, \qquad V(\lambda) = (\lambda E - A)\tilde{Q}(\lambda) + \tilde{R}$$

Якщо в останніх тотожностях замінимо скаляр λ на матрицю A, то отримаємо

$$V(A) = V_0A^m + V_1A^{m-1} + \ldots + V_{m-1}A + V_m = R$$

$$\tilde{V}(A) = A^m V_0 + A^{m-1}V_1 + \ldots + AV_{m-1} + V_m = \tilde{R}$$

Частки від ділення запишуться у вигляді

$$Q(\lambda) = V_0\lambda^{m-1} + (V_0A + V_1)\lambda^{m-2} + (V_0A^2 + V_1A + V_2)\lambda^{m-3} + \ldots + (V_0A^{m-1} + V_1A^{m-2} + \ldots + V_{m-1})$$

$$\tilde{Q}(\lambda) = \lambda^{m-1}V_0 + \lambda^{m-2}(AV_0 + V_1) + \lambda^{m-3}(A^2V_0 + AV_1 + V_2) + \ldots + (A^{m-1}V_0 + A^{m-2}V_1 + \ldots + V_{m-1})$$

Приклад. Поділити матрицю $A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^2+2\lambda-1 & \lambda^2-2\lambda-5\\ 2\lambda^2-\lambda+3 & \lambda^2+6\end{pmatrix}$ з лівого боку на матрицю $B-\lambda E$, якщо $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 4\end{pmatrix}$

4.3 Теорема про подібність матриць

Нехай матриця $A=\{a_{ij}\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$ - матриця з числовими елементами з поля K. Її характеристична матриця $A-\lambda E$ є λ-матрицею рангу n і тому має n інваріантних многочленів.

Теорема. Для того, щоб матриці A і B з елементами з поля K були подібними, необхідно і достатньо, щоб їх характеристичні матриці $A-\lambda E$ і $B-\lambda E$ були еквівалентними, тобто мали однакові інваріантні многочлени.

Твердження. Якщо матриці A і B подібні, тобто $B=T^{-1}AT$, то за матрицю перетворення T можна взяти матрицю $T=V(B)=[\tilde{U}(B)]^{-1}$, де $U(\lambda)$ і $V(\lambda)$ - унімодулярні матриці, які описують перехід матриці $A-\lambda E$ до еквівалентної їй матриці $B-\lambda E$:

$$B-\lambda E=U(\lambda)(A-\lambda E)V(\lambda),$$

$V(B)$ - праве значення многочлена $V(\lambda)$, $\tilde{U}(B)$ - ліве значення многочлена $U(\lambda)$ від матриці B.

Приклад. З'ясувати подібність матриць $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}-8 & 6\\ -15 & 11\end{pmatrix}$. У разі подібності побудувати матрицю переходу від A до B.