

Тема 1. Основні поняття теорії ймовірностей

1.1 Випадкові події

Основними поняттями теорії ймовірностей є поняття події та її ймовірності. Під випробуванням далі будемо розуміти здійснення певної сукупності умов. Подією називається результат, який може бути отриманий внаслідок здійснення деякого випробування. Найпростіший приклад випробування – підкидання монети. Результат цього випробування, наприклад, поява герба, є подією.

Розрізняють достовірні, неможливі та випадкові події. Подія називається вірогідною, якщо вона у результаті даного випробування обов'язково здійсниться. Подія називається неможливою, якщо вона не може відбутися в умовах даного випробування. Подія називається випадковою, якщо вона може відбутися або не відбутися внаслідок даного випробування.

Події називають несумісними, якщо настання однієї з них виключає можливість настання інших подій у тому ж випробуванні. Кілька подій утворюють повну групу, якщо у результаті випробування обов'язково настане хоча б одна з них. Якщо події, що утворюють повну групу, є попарно несумісними, то у результаті випробування з'явиться лише одна з цих подій. Далі будемо розглядати повні групи попарно несумісних подій.

Події називаються рівноможливими, якщо можна стверджувати, що жодна з них не є більш можливою, ніж інша подія.

Для кількісного порівняння між собою подій за мірою можливості їх настання вводиться поняття ймовірності.

Ймовірністю події називається кількісна міра об'єктивної можливості її настання.

Нехай випадкові події можуть багаторазово повторюватися при виконанні одних і тих же умов. Тоді їх називають масовими однорідними випадковими подіями.

Теорія ймовірностей – це наука, що вивчає закономірності масових однорідних випадкових подій.

1.2 Простір елементарних подій

Для математичного описання випадкових подій використовують поняття елементарної події. Подія, що може настати у результаті здійснення одного і лише одного випробування, називається елементарною. У результаті випробування може настати одна і лише одна елементарна подія.

Кожному випробуванню відповідає певна множина Ω елементарних подій ω_i , кожна з яких може настати у результаті здійснення цього випробування. Цю множину називають простором елементарних подій. Кожне випробування полягає у тому, що навмання (незалежно від спостерігача) вибирається окремий елемент з множини Ω . Простір елементарних подій утворює повну групу попарно несумісних подій.

Будь-яка підмножина A простору елементарних подій Ω визначає певну випадкову подію A . Цю підмножину називають також множиною можливих наслідків випробування, що сприяють події A . Неможливій події відповідає пуста множина $\emptyset$, вірогідній події відповідає множина Ω .

Якщо простір елементарних подій Ω є скінченним або зліченим, то він називається дискретним, інакше говорять про неперервний простір елементарних подій.

1.3. Операції над подіями

Оскільки події – це деякі підмножини простору елементарних подій, то для них можна ввести такі самі операції, як і для множин у теорії множин.

Говоритимемо, що подія A сприяє появі події B ($A \subset B$), якщо з настанням події A обов'язково відбувається і подія B . У цьому випадку множина елементарних подій, що визначає подію A , є підмножиною множини,

що визначає подію B . Якщо подія A сприяє появі події B і подія B сприяє появі події A , то події A та B називають еквівалентними (рівносильними) і пишуть $A=B$.

Сумою двох подій A та B називають таку подію C , що відбувається, коли відбувається принаймні одна з двох подій, A чи B . При цьому використовують позначення $C=A+B$ або $C=A \cup B$. Множина C , що відповідає події $C=A+B$, є об'єднанням множин елементів з простору елементарних подій Ω , що відповідають подіям A та B .

Добутком двох подій A та B називають таку подію C , що відбувається, коли одночасно відбуваються обидві події, A та B . При цьому пишуть: $C=AB$, або $C=A \cap B$. Добутку подій A і B відповідає множина C елементів простору елементарних подій, що є об'єднанням множин A та B .

Різницею подій A та B називають таку подію C , яка відбувається, коли відбувається подія A і не відбувається подія B . Використовують позначення: $C=A \setminus B$. Різниці подій $C=A \setminus B$ відповідає множина, що є різницею множин A та B (із множини A вилучаються елементи, що належать множині B).

Подією, протилежною до події A , називають подію $\bar{A}=\Omega \setminus A$, яка відбувається, коли не відбувається подія A . Подію $\bar{A}$ визначає множина, яка є доповненням множини A до множини Ω .

Для введених операцій над подіями виконуються співвідношення, що відповідають формулам теорії множин.

1 $\bar{\bar{A}} = A$	7 $A + A = A$	13 $A + \emptyset = A$
2 $A + B = B + A$	8 $A \cdot A = A$	14 $A + \Omega = A$
3 $AB = BA$	9 $A \cdot B + C = (A + C) \cdot (B + C)$	15 $A \cdot \emptyset = \emptyset$
4 $(A + B) + C = A + (B + C)$	10 $A + \bar{A} = \Omega$	16 $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$
5 $(A \cdot B)C = A(B \cdot C)$	11 $A \cdot \bar{A} = \emptyset$	17 $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$
6 $(A + B)C = AC + BC$	12 $A \cdot \Omega = A$	

1. 4 Аксиоматичне означення ймовірності

Будь-яка випадкова подія A , яка може з'явитися внаслідок випробування, відповідає певній підмножині простору елементарних подій Ω . Її елементами є елементарні події, що сприяють події A . Множина всіх подій, що можуть настати у результаті випробування – це множина всіх підмножин простору Ω . Кожній з цих подій можна поставити у відповідність дійсне число, що відображає міру можливості її появи, тобто ймовірність даної події. Видатний математик О.М. Колмогоров запропонував визначати поняття ймовірності події за допомогою наступної системи аксіом:

1. Кожній події A можна поставити у відповідність дійсне число $P(A)$, таке, що $0 \leq P(A) \leq 1$, яке називається ймовірністю події A .
2. Ймовірність вірогідної події дорівнює 1: $P(\Omega) = 1$.
3. Ймовірність появи хоча б однієї з n попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій: $P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$, де $A_1, A_2, \dots, A_n$ – попарно несумісні події.

Якщо простір елементарних подій є нескінченним, то система аксіом ймовірності 1 – 3 доповнюється аксіомою неперервності:

4. Для послідовності подій $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, такої, що $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ і $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, виконується рівність $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$.

Виходячи з даної системи аксіом, властивості ймовірностей та залежності між ними можна отримати у вигляді теорем.

1.5 Класичне означення ймовірності

Нехай деяке випробування визначає скінченний простір елементарних подій, що є рівноможливими, а n – кількість всіх елементарних подій ω_1 ,

$\omega_2, \dots, \omega_n$ цього простору. Оскільки елементарні події є попарно несумісними, то сума їх ймовірностей дорівнює 1, тому $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Нехай події A сприяють m елементарних подій (наслідків випробування) $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$, тобто $A = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_m$. Тоді за аксіомою 3 п. 1.4 маємо:

$$P(A) = P(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_m) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_m) = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}.$$

Таким чином, отримали формулу для визначення ймовірності події A у випадку коли простір елементарних подій є скінченним, а самі елементарні події – рівноможливими:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (1.1)$$

де n – загальна кількість всіх рівноможливих елементарних подій, m – кількість елементарних подій, що сприяють події A .

Формула (1.1) надає класичне означення ймовірності. Його можна сформулювати наступним чином.

Ймовірністю події A називають відношення кількості сприятливих для цієї події можливих елементарних подій (наслідків випробування) до загальної кількості всіх рівноможливих несумісних елементарних подій, що утворюють повну групу (простір елементарних подій).

З класичного означення ймовірності випливає, що ймовірність вірогідної події дорівнює 1 (у цьому випадку $m = n$), а ймовірність неможливої події дорівнює 0, оскільки у формулі (1.1) $m = 0$.

Приклад. Знайти ймовірність того, що кількість очок, що випали після кидання грального кубика на його верхній грані, ділиться націло на 3.

Розв’язання. Нехай подія A – {кількість очок, що випали на верхній грані кубика, ділиться націло на 3}. Випробування полягає у одноразовому киданні грального кубика. Його можливі наслідки (елементарні події) ω_i – {на верхній грані кубика з’явилося i очок}, $i = 1, 2, \dots, 6$ утворюють простір елементарних подій для цього випробування. Таким чином, $n = 6$. Сприятливими для події A

елементарними подіями є ω_3 та ω_6 , тобто кількість сприятливих для A елементарних подій $m = 2$. За формулою (1.1) $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

1.6 Основні формули комбінаторики

Розділ математики, у якому розглядаються задачі про кількість комбінацій, що задовольняють певним умовам, які можна скласти з заданих об'єктів, називається комбінаторикою. У цих задачах об'єктами дослідження є скінченні множини. При безпосередньому застосуванні класичного означення ймовірності правила та формули комбінаторики часто використовуються для безпосереднього підрахунку кількості всіх можливих та сприятливих наслідків випробування. Основними правилами комбінаторики є правила суми та добутку.

Правило суми. Якщо деякий об'єкт A може бути вибраний із деякої сукупності об'єктів k способами, а інший об'єкт B – s способами, то вибрати A або B можна $k + s$ способами.

Правило добутку. Якщо об'єкт A можна вибрати з сукупності деяких об'єктів k способами, а після кожного такого вибору об'єкт B можна вибрати з цієї ж сукупності s способами, то пара об'єктів (A, B) у вказаному порядку може бути вибраною $k \cdot s$ способами.

Приклад 1. Скільки існує двохзначних натуральних чисел, що діляться націло на 5?

Розв'язання. Першу цифру у запису такого числа можна вибрати $k = 9$ способами, а другу цифру – $s = 2$ способами (0 або 5). Всього існує $k \cdot s = 9 \cdot 2 = 18$ таких чисел.

Різні скінченні множини, що відрізняються між собою складовими елементами і (або) їх порядком, називаються комбінаціями. Розрізняють три види комбінацій: розміщення, перестановки, сполучення. Вони можуть бути

утвореними без повторення окремих елементів або з їх повторенням. Розглянемо різні типи комбінацій.

1. Розміщення.

Розміщеннями з n елементів по m називають комбінації, кожна з яких містить по m елементів, вибраних з n -елементної множини, та відрізняється від інших складовими елементами та порядком їх розташування. Кількість розміщень з n елементів по m без повторень позначається A_n^m та визначається за формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (1.2)$$

Приклад 2. Студентська група нараховує 25 студентів. Скільки існує способів вибрати у цій групі старосту та його заступника?

Розв'язання. Необхідно підрахувати кількість розміщень з 25 студентів по 2 без повторень, оскільки знаходимо кількість комбінацій з 2 елементів, що відрізняються не лише елементами, але й порядком їх розташування. Тому кількість таких способів $A_{25}^2 = \frac{25!}{(25-2)!} = 24 \cdot 25 = 600$.

Якщо при утворенні розміщень з n елементів по m включати у їх число і такі, що містять елементи, які повторюються, то маємо кількість розміщень з повтореннями

$$\bar{A}_n^m = n^m. \quad (1.3)$$

Приклад 3. Скільки можна утворити десятизначних телефонних номерів, у запису яких присутні лише цифри 1, 2, 4, 7?

Розв'язання. Цифри у запису кожного номера розрізняються між собою, розрізняється також їх порядок розташування і при цьому вони у запису номера можуть повторюватися. Тому кількість таких телефонних номерів дорівнює числу розміщень з 4 елементів по 10 з повтореннями: $\bar{A}_4^{10} = 4^{10}$.

2. Перестановки.

Перестановками з n елементів називають комбінації з n елементів, у кожен з яких входять всі елементи, що відрізняються між собою лише порядком розташування елементів. Кількість перестановок з n елементів без повторень знаходиться за формулою:

$$P_n = n! \quad (1.4)$$

Приклад 4. Скільки чотиризначних натуральних чисел, цифри у запису яких не повторюються, можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3?

Розв’язання. Оскільки запис чотиризначного числа не може починатися з нуля, то кількість таких чисел $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 18$.

Якщо серед n елементів перестановки перший елемент повторюється k_1 раз, другий елемент – k_2 рази, m -й елемент – k_m разів ($k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$), то кількість перестановок з повтореннями, складених з цих елементів, обчислюється за формулою:

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!} \quad (1.5)$$

Приклад 5. Скільки різних шестизначних чисел можна записати з допомогою трьох одиниць та трьох двійок?

Розв’язання. Кількість таких чисел $P_6(3, 3) = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$.

3. Сполучення.

Комбінації з n елементів по m , що відрізняються між собою хоча б одним елементом, називаються сполученнями. Сполучення, що містять однакові елементи, вважаються однаковими незалежно від порядку розташування цих елементів (на відміну від розміщень). Кількість сполучень з n елементів по m без повторень окремих елементів знаходимо за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n - m)!} \quad (1.6)$$

Приклад 6. Під час зустрічі 20 осіб потиснули один одному руку. Скільки всього було зроблено рукостискань?

Розв'язання. Кількість рукостискань $C_{20}^2 = \frac{20!}{2! \cdot (20-2)!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$.

Якщо при утворенні сполучень n елементів по m у їх число включаються сполучення, у яких окремі елементи повторюються, то кількість сполучень з n елементів по m визначається за формулою:

$$\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m. \quad (1.7)$$

Приклад 7. У асортименті кондитерської 7 видів тістечок. Покупець хоче замовити 4 тістечка. Скількома способами він це може зробити?

Розв'язання. Кількість способів дорівнює кількості сполучень з повтореннями з 7 елементів по 4: $\bar{C}_7^4 = C_{7+4-1}^4 = C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$ способів.

Розглянемо приклади застосування формул комбінаторики до знаходження ймовірностей випадкових подій за класичним означенням (класичною схемою).

Приклад 8. У ящику знаходиться 20 деталей, 8 з яких є бракованими. Знайти ймовірність того, що з взятих навмання трьох деталей одна буде бракованою.

Розв'язання. Випробуванням тут є виймання з ящика трьох деталей. Кількість n всіх можливих елементарних подій (результатів випробування) дорівнює числу способів, якими з 20 деталей можна вийняти 3. Оскільки порядок розташування вийнятих деталей не має значення, то $n = C_{20}^3$. Сприятливі наслідки випробування отримуємо при вийманні однієї бракованої та двох стандартних деталей. Одну браковану деталь можна вийняти з ящика 8 різними способами, дві стандартні деталі – $C_{20-8}^2 = C_{12}^2$ способами. За правилом добутку, кількість m способів, якими можна вийняти з ящика одну браковану та дві стандартні деталі, дорівнює $8 \cdot C_{12}^2$. За класичним означенням ймовірності маємо:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{8 \cdot C_{12}^2}{C_{20}^3} = \frac{8 \cdot 12!}{2! \cdot 10!} \cdot \frac{3! \cdot 17!}{20!} = \frac{44}{95}.$$

Приклад 9. З коробки, що містить картки з літерами «е», «и», «к», «т», «т», «м», «м», «а», «а», «а» навмання виймають одну картку за іншою та викладають у порядку виймання. Знайти ймовірність того, що у результаті отримаємо слово «математика».

Розв’язання. Кількість n всіх можливих наслідків випробування тут дорівнює кількості перестановок з 10 елементів з повтореннями, а саме $P_{10}(1, 1, 1, 2, 2, 3)$, з них сприятливих лише один, той, що відповідає потрібному слову. За класичним означенням ймовірності отримуємо:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{1}{P_{10}(1, 1, 1, 2, 2, 3)} = \frac{1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 3!}{10!} = \frac{1}{151200}.$$

1.7 Статистична ймовірність

До основних недоліків застосування класичного означення до обчислення ймовірностей випадкових подій відносяться:

- можливість нескінченної кількості наслідків у деяких випробуваннях;
- можливість того, що елементарні події, що можуть відбутися внаслідок випробування не будуть рівноймовірними;
- неможливість у деяких випадках представити подію, що цікавить дослідника, у вигляді множини елементарних подій.

З цих причин, поряд з класичною схемою, використовують також інші способи обчислення ймовірностей. При статистичному методі знаходження ймовірності вважають, що вона дорівнює відносній частоті появи події у серії з багатьох випробувань.

Відносною частотою (частістю) події A називають відношення кількості m випробувань, у яких ця подія відбулася, до загальної кількості n здійснених випробувань:

$$\nu(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.8)$$

Приклад. У серії з 100 пострілів стрілець 86 разів влучив у ціль. Відносна частота влучення у ціль даним стрільцем $\nu = 0,86$.

Якщо випробування здійснюються в однакових умовах у достатньо великих кількостях, то відносна частота появи події у цих дослідах виявляє властивість стійкості. Ця властивість полягає у тому, що при здійсненні кількох серій з великої кількості випробувань відносна частота події змінюється мало, коливаючись навколо деякої сталої величини, що дорівнює ймовірності даної події. Таким чином, статистичною ймовірністю події є відносна частота її появи у серії з достатньо великої кількості випробувань. Для існування статистичної ймовірності події A потрібна:

- можливість, хоча б принципова, здійснення необмеженого числа випробувань, у кожному з яких може з'явитися ця подія;
- стійкість відносних частот появи події A у різних серіях з достатньо великої кількості випробувань.

1.8 Геометрична ймовірність

Класичну схему обчислення ймовірностей не можна застосувати для випробувань з нескінченною кількістю можливих наслідків. Досить часто у подібних випадках можна використати геометричні ймовірності, тобто ймовірності потрапляння поставленої випадковим чином точки у деяку область (відрізок, фігуру на площині, просторове тіло тощо).

Нехай $mes G$ – міра області G (довжина, площа чи об'єм), що визначається у залежності від розмірності області. Якщо $g \subset G$, то ймовірність потрапляння випадкової точки у область g визначається за формулою:

$$P = \frac{mes g}{mes G} \quad (1.9)$$

У даному випадку вважається, що точка навмання наноситься у область G , сукупність точок якої утворює простір елементарних подій для цього

випробування. Область $g \subset G$ відповідає підмножині елементарних подій, що є сприятливими наслідками випробування.

Приклад 1. На площині накреслено два концентричні кола, радіуси яких відповідно дорівнюють 5см та 10см. Знайти ймовірність того, що точка, поставлена навмання у більшому крузі, потрапить при цьому у кільце, утворене накресленими колами.

Розв'язання. Для знаходження потрібної ймовірності використаємо формулу (1.9). Тут область G – це більший круг, g – кільце. Оскільки мірою області на площині є площа, то отримуємо: $mes G = S_g = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$, $mes g = S_g = \pi(10^2 - 5^2) = 75\pi$. Шукана ймовірність $P = \frac{mes g}{mes G} = \frac{75\pi}{100\pi} = 0,75$.

Приклад 2. (Задача про зустріч). Двоє студентів домовилися зустрітися у визначеному місці на протязі часу від 12.00 до 13.00. Кожний з них чекає іншого 20 хвилин, після чого йде. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожен з цих студентів з рівною ймовірністю може прийти у будь-який момент часу на протязі вказаної години незалежно від іншого.

Розв'язання. Нехай x та y – моменти появи відповідно першого та другого студента (у годинах від 12.00): $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Простором елементарних подій у даній задачі є множина всіх точок (x, y) квадрата $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Умову, за якої зустріч студентів відбудеться, запишемо у вигляді: $|x - y| \leq \frac{1}{3}$. Таким чином, множина точок $|x - y| \leq \frac{1}{3}$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ визначає множину сприятливих для зустрічі наслідків. Застосуємо формулу (1.9). Тут $mes G = S_G = 1^2 = 1$, $mes g = S_g = 1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$.

Підставивши ці значення у (1.9), отримуємо $P = \frac{5}{9}$.

Тема 2. Теорема множення та додавання ймовірностей і їх наслідки.

2.1. Ймовірність суми несумісних подій.

Аксіома 3 аксіоматичного означення ймовірності (п. 1.4) стверджує, що ймовірність суми скінченного числа несумісних подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (2.1)$$

З формули (2.1) випливає, що сума ймовірностей попарно несумісних подій, що утворюють повну групу подій, дорівнює одиниці, оскільки у результаті випробування обов'язково з'явиться хоча б одна з цих подій.

Протилежні події A та $\bar{A}$ утворюють повну групу несумісних подій, тому $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Звідси отримуємо:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (2.2)$$

Приклад 1. Мішень поділена на 3 сектори. Ймовірність влучення стрільцем у перший сектор мішені дорівнює 0,45, у другий сектор – 0,35, у третій – 0,15. Знайти ймовірність того, що при одному пострілі стрілець влучить: а) у перший або другий сектор; б) не влучить у мішень.

Розв'язання. Введемо позначення:

подія $A_1 = \{\text{влучення у перший сектор}\};$

подія $A_2 = \{\text{влучення у другий сектор}\};$

подія $A_3 = \{\text{влучення у третій сектор}\};$

подія $A_4 = \{\text{невлучення у мішень}\}.$

Тоді $P(A_1) = 0,45$, $P(A_2) = 0,35$, $P(A_3) = 0,15$.

а) Влучення у перший або другий сектор відповідає сумі подій A_1 та A_2 .

При одному пострілі події A_1 та A_2 є несумісними, тому за формулою (2.1)

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0,45 + 0,35 = 0,8.$$

б) Події A_1, A_2, A_3, A_4 попарно несумісні та утворюють повну групу випадкових подій. Тому $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 1$. Звідси знаходимо:

$$P(A_4) = 1 - P(A_1) - P(A_2) - P(A_3) = 1 - 0,45 - 0,35 - 0,15 = 0,05.$$

Приклад 2. У ящику знаходяться 20 деталей, з яких 15 деталей є стандартними. Знайти ймовірність того, що серед трьох навмання взятих деталей виявиться хоча б одна стандартна.

Розв'язання. Нехай подія $A = \{\text{серед взятих деталей виявиться хоча б одна стандартна деталь}\}$. Тоді протилежна подія $\bar{A} = A^c = \{\text{серед взятих деталей всі нестандартні}\}$. Спочатку знайдемо ймовірність протилежної події:

$$P(\bar{A}) = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{1}{114}. \text{ Звідси, за формулою (2.2) } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{114} = \frac{113}{114}.$$

2.2 Умовна ймовірність. Теорема множення ймовірностей.

Умовною ймовірністю події A відносно події B називають ймовірність події A , обчислену за умови, що подія B відбулася. Для такої ймовірності використовують позначення $P_B(A)$ або $P(A/B)$.

Приклад. В урні знаходяться 3 білі та 3 чорні кулі. З неї двічі виймають по одній кулі, не повертаючи їх в урну. Знайти ймовірність того, що другою з'явиться біла куля, якщо першого разу вийняли білу кулю.

Розв'язання. Нехай подія $A = \{\text{першого разу з'явилась біла куля}\}$, подія $B = \{\text{другою з'явилась біла куля}\}$. Знайдемо умовну ймовірність $P(B/A)$, тобто ймовірність того, що другою з'явиться біла куля, якщо першого разу вийняли білу кулю. Після виймання першої кулі (білої) в урні залишилось 2 білі та 3 чорні кулі. Тому ймовірність $P(B/A) = \frac{3-1}{3+3-1} = \frac{2}{5}$.

Теорема 2.1 (Теорема множення ймовірностей). Ймовірність добутку подій A та B дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність другої події відносно першої:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B). \quad (2.3)$$

Доведення. Доведемо цю теорему для класичної схеми визначення ймовірності, коли у результаті випробування може відбутися одна з скінченного числа n рівноможливих елементарних подій. Нехай з цих n подій сприяють події A m подій, з яких k подій сприяють також події B . Маємо $P(A) = \frac{m}{n}$,

$P(B/A) = \frac{k}{m}$. Добутку подій AB сприяють лише такі випадки з сприятливих для події A , що є сприятливими і для події B . Отримуємо:

$$P(AB) = \frac{k}{n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{m} = P(A) \cdot P(B/A).$$

Аналогічним чином можна отримати формулу $P(AB) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Формула (2.3) розповсюджується також на випадки, коли класична схема обчислення ймовірностей є незастосовною, наприклад, у випадках, коли простір елементарних подій є нескінченним, або елементарні події не є рівноможливими.

З формули (2.3) знайдемо формулу для обчислення умовної ймовірності:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (2.4)$$

Формулу (2.4) часто використовують як означення умовної ймовірності події, альтернативне наведеному на початку п.2.2.

Приклад 1. Серед 25 електроламп 4 несправні. Знайти ймовірність того, що дві взяті навмання електролампи будуть несправними.

Розв'язання. Нехай подія $A = \{\text{перша взята лампа виявилася несправною}\}$, подія $B = \{\text{друга взята електролампа – несправна}\}$. Подія $AB = \{\text{обидві взяті електролампи є несправними}\}$. Обчислимо ймовірність добутку подій AB за формулою (2.3):

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{4}{25} \cdot \frac{3}{24} = 0,02.$$

Зауважимо, що цю задачу можна розв'язати також, використовуючи класичну схему обчислення ймовірності та формули комбінаторики.

Події A та B називають незалежними, якщо ймовірність однієї з них не залежить від настання іншої, інакше ці події є залежними.

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називають попарно незалежними, якщо незалежними між собою є будь-які дві з них. Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називають незалежними у сукупності, якщо вони є попарно незалежними, а також незалежними є кожна подія та всі можливі добутки інших подій. Далі незалежними подіями будемо називати події, незалежні у сукупності.

Оскільки для незалежних подій A та B $P(B \setminus A) = P(B)$, то у цьому випадку формула (2.3) набуває вигляду:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (2.5)$$

Формула (2.5) виражає теорему множення ймовірностей для незалежних подій:

Теорема 2.2 (Теорема множення ймовірностей для незалежних подій).

Ймовірність добутку незалежних подій дорівнює добутку їх ймовірностей.

Приклад 2. Ймовірність влучення у ціль для першого стрільця становить 0,7, для другого ця ймовірність дорівнює 0,9. Вони одночасно стріляють по ціль. Знайти ймовірність того, що ціль буде вражена двічі.

Розв'язання. Нехай подія $A = \{\text{перший стрілець вразив ціль}\}$, подія $B = \{\text{другий стрілець вразив ціль}\}$. Тоді подія $AB = \{\text{обидва стрільці вразили ціль}\}$. Оскільки події A та B є незалежними, то для знаходження ймовірності їх добутку використаємо формулу (2.5):

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,9 = 0,63.$$

Теорему множення ймовірностей можна узагальнити на випадок добутку довільної скінченної кількості подій.

Теорема 2.3. Ймовірність добутку скінченної кількості подій дорівнює добутку їх умовних ймовірностей відносно добутку попередніх по відношенню до кожної з них подій:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / (A_1 A_2)) \cdot \dots \cdot P(A_n / (A_1 A_2 \dots A_{n-1})). \quad (2.6)$$

Доведення. Здійснимо доведення методом математичної індукції. Теорема виконується для двох подій (теорема 2.1). Нехай вона виконується для $n-1$ подій, тобто

$$P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \dots P(A_{n-1} / (A_1 A_2 \dots A_{n-2})). \quad (2.7)$$

Нехай подія $B = A_1 A_2 \dots A_{n-1}$. Згідно з теоремою множення ймовірностей для двох подій:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(B A_n) = P(B) \cdot P(A_n / B) = P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) \cdot P_{A_1 \dots A_{n-1}}(A_n). \quad (2.8)$$

З (2.8) та (2.7) випливає формула (2.6).

З даної теореми випливає, що для незалежних подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ ймовірність добутку цих подій дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n). \quad (2.9)$$

Приклад 3. На 10 картках надруковані цифри від 0 до 9. Знайти ймовірність того, що навмання взяті і розміщені у ряд в послідовності виймання картки утворять число 125.

Розв'язання. Нехай подія $A = \{\text{утворення числа 125}\}$, подія $A_1 = \{\text{поява 1 при першому вийманні картки}\}$, $A_2 = \{\text{поява 2 при другому вийманні}\}$, $A_3 = \{\text{поява 5 при третьому вийманні}\}$. Маємо $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Події A_1, A_2 та A_3 є залежними. Тому за формулою (2.6) $P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3)$. Оскільки $P(A_1) = \frac{1}{10}$, $P_{A_1}(A_2) = \frac{1}{9}$, $P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{1}{8}$, то $P(A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{720}$.

Приклад 4. Робітник обслуговує три однотипні верстати. Ймовірність того, що на протязі зміни відбудеться аварійна зупинка будь-якого верстата, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що на протязі зміни відбудеться аварійна зупинка: а) на всіх трьох верстатах; б) хоча б на одному верстаті.

Розв'язання. Нехай подія $A_i = \{\text{аварійна зупинка виникне на } i\text{-ому верстаті}\}$, $i = 1, 2, 3$. Події A_1, A_2 та A_3 є незалежними.

а) Подія $B = \{\text{аварійна зупинка відбудеться на всіх трьох верстатах}\}$ відповідає добутку подій $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

$$P(B) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = (0,6)^3 = 0,216.$$

б) Нехай подія $C = \{\text{аварійна зупинка відбудеться хоча б на одному верстаті}\}$. Тоді протилежна подія $\bar{C} = \{\text{аварійної зупинки не відбудеться на жодному верстаті}\}$, $\bar{C} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$,

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = (1 - 0,6)^3 = 0,064,$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0,064 = 0,936.$$

У цьому прикладі була знайдена ймовірність настання хоча б однієї події з кількох незалежних подій. Для цього було знайдено ймовірність протилежної події – {жодна з кількох незалежних подій не з'явилась}.

Теорема 2.4. Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, незалежних у сукупності:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n, \quad (2.10)$$

де $q_1 = P(\bar{A}_1)$, $q_2 = P(\bar{A}_2)$, ..., $q_n = P(\bar{A}_n)$.

Доведення. Нехай A – подія, що полягає у появі хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, тобто $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$. Тоді $\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n$. Оскільки події A_i , відповідно, $\bar{A}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, є незалежними у сукупності, то за формулою (2.9) маємо: $P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n) = q_1 q_2 \dots q_n$. Оскільки $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, тог отримуємо формулу (2.10).

Якщо події $A_1, A_2, \dots, A_n$ є незалежними та їх ймовірності рівні між собою та дорівнюють p , то ймовірність появи хоча б однієї з цих подій $P(A) = 1 - q^n$, де $q = 1 - p$.

Приклад 5. Ймовірність того, що стрілець при трьох пострілах влучить у ціль хоча б один раз, дорівнює 0,936. Знайти ймовірність влучення стрільцем у ціль у одному пострілі.

Розв’язання. Нехай подія $A = \{\text{стрілець влучив у ціль хоча б один раз}\}$.

За умовою $P(A) = 0,936 = 1 - q^3$, де $q = 1 - p$, p – ймовірність влучення у ціль при одному пострілі. $q^3 = 1 - 0,936 = 0,064$, $q = \sqrt[3]{0,064} = 0,4$. Тоді $p = 1 - q = 1 - 0,4 = 0,6$.

2.3 Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Теорема 2.5. Ймовірність настання хоча б однієї з двох сумісних подій, A чи B , дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх спільної появи:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (2.11)$$

Доведення. Нехай A та B – сумісні події. Їх суму можна записати у вигляді: $A + B = A\bar{B} + \bar{A}B + AB$. Оскільки події AB , $\bar{A}B$ та $A\bar{B}$ є несумісними, то за формулою (2.1) отримуємо:

$$P(A + B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB). \quad (2.12)$$

Оскільки $A = AB + A\bar{B}$, то для ймовірності події A можна записати:

$$P(A) = P(AB + A\bar{B}) = P(AB) + P(A\bar{B}).$$

$$\text{Звідси } P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB). \quad (2.13)$$

Аналогічно, з врахуванням несумісності подій BA та $B\bar{A}$ та комутативності множення подій, для ймовірності події B отримуємо:

$$P(B) = P(BA + B\bar{A}) = P(AB) + P(\bar{A}B). \text{ Звідси маємо:}$$

$$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB). \quad (2.14)$$

Підставивши (2.13) та (2.14) у (2.12), отримаємо:

$P(A + B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$, що й треба було довести.

Приклад. Для виконання завдання замовник звернувся до двох виконавців. Ймовірність виконання завдання першим виконавцем дорівнює 0,8, другим – 0,9. Знайти ймовірність того, що завдання буде виконано.

Розв’язання. Нехай подія $A_1 = \{\text{завдання виконано першим виконавцем}\}$, подія $A_2 = \{\text{завдання виконано другим виконавцем}\}$. За умовою ймовірності цих подій $P(A_1) = 0,8$, $P(A_2) = 0,9$. Завдання буде виконано, якщо матиме місце сума сумісних подій A_1 та A_2 . Використовуючи формулу (2.11), знаходимо: $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$. Події A_1 та A_2 є незалежними, тому $P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$. Остаточню, підставляючи задані значення ймовірностей подій A_1 та A_2 , отримуємо:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0,8 + 0,9 - 0,8 \cdot 0,9 = 0,98.$$

Використавши метод математичної індукції, формулу (2.11) можна узагальнити на випадок знаходження ймовірності суми довільного скінченного числа сумісних подій $A_1, A_2, \dots, A_n$. У даному випадку формула (2.11) набуває вигляду:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - \dots - P(A_{n-1} A_n) + P(A_1 A_2 A_3) + \dots + P(A_{n-2} A_{n-1} A_n) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \dots A_n).$$

При великих значеннях n замість останньої формули доцільно знаходити спочатку ймовірність протилежної події $\overline{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_n}$. Тоді

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_n}).$$

2.4 Формула повної ймовірності

Нехай деяка подія B може настати лише за умови настання однієї з попарно несумісних подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, що утворюють повну групу. Ймовірності цих подій $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$ є відомими, відомі також умовні ймовірності $P(B/A_i)$ події B відносно подій $A_i, i = 1, 2, \dots, n$. Потрібно знайти ймовірність події B .

Теорема 2.6. Ймовірність події B , поява якої можлива лише одночасно з однією з попарно несумісних подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, що утворюють повну групу,

дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з цих подій на відповідні умовні ймовірності події B :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B/A_i). \quad (2.15)$$

Формулу (2.15) називають формулою повної ймовірності.

Доведення. За умовою, подію B можна представити у вигляді:

$$B = A_1B + A_2B + \dots + A_nB,$$

при цьому події A_iB , $i=1, 2, \dots, n$, є попарно несумісними. Тому, за формулою додавання ймовірностей несумісних подій (2.1), маємо:

$$P(B) = P\left(\sum_{i=1}^n A_iB\right) = \sum_{i=1}^n P(A_iB) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B/A_i).$$

Таким чином, ми отримали формулу (2.15). При цьому була використана теорема 2.1 множення ймовірностей, згідно з якою ймовірність добутку подій A_iB $P(A_iB) = P(A_i)P(B/A_i)$. Теорему доведено.

Приклад. На першому заводі на кожні сто електролампочок виробляється у середньому 90 стандартних, на другому – 95, на третьому – 85 стандартних лампочок. Продукція цих заводів складає відповідно 50 %, 30 % та 20 % всіх лампочок, що надходять у місто. Знайти ймовірність придбання у цьому місті стандартної електролампочки.

Розв’язання. Нехай подія $B = \{\text{придбано стандартну електролампочку}\}$, події $A_i = \{\text{лампочку виготовлено на } i\text{-му заводі}\}$, $i=1, 2, 3$. Події A_i є несумісними та утворюють повну групу подій. $P(A_1) = 0,5$, $P(A_2) = 0,3$, $P(A_3) = 0,2$. Умовні ймовірності події B відносно подій A_i відповідно дорівнюють: $P(B/A_1) = 0,9$, $P(B/A_2) = 0,95$, $P(B/A_3) = 0,85$. Для знаходження ймовірності події B використаємо формулу повної ймовірності (2.15), згідно з якою отримуємо:

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3) = 0,5 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 0,85 = 0,905.$$

2.5 Формула Байєса

Нехай подія B може відбутися лише за умови настання однієї з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, що є попарно несумісними та утворюють повну групу подій. Оскільки невідомо, яка з подій $A_i, i=1, 2, \dots, n$ відбудеться, ці події називають гіпотезами. Нехай у результаті випробування з'явилася подія B . Визначимо нові значення ймовірностей гіпотез $A_i, i=1, 2, \dots, n$, з врахуванням появи події B , тобто знайдемо умовні ймовірності $P(A_i/B), i=1, 2, \dots, n$.

Знайдемо умовну ймовірність $P(A_1/B)$. За теоремою множення ймовірностей $P(BA_1) = P(A_1B) = P(B)P(A_1/B) = P(A_1)P(B/A_1)$. Звідси знаходимо: $P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(B)}$. Замінивши $P(B)$ за формулою повної ймовірності (2.15), остаточно отримуємо формулу для знаходження $P(A_1/B)$:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B/A_k)}.$$

Аналогічно можна знайти формули, що визначають ймовірність решти гіпотез A_i за умови настання події B :

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B/A_k)}. \quad (2.16)$$

Формулу (2.16) називають формулою Байєса, за прізвищем англійського математика, який вперше отримав її. Ця формула дозволяє переоцінити ймовірності гіпотез після того, як став відомим наслідок випробування – настання події B .

Приклад. Виготовлені у цеху деталі для перевірки їх якості потрапляють до одного з двох контролерів. Ймовірність потрапляння деталі до першого контролера дорівнює 0,6, до другого – 0,4. Ймовірність того, що якісна деталь буде визнана якісною, для першого контролера дорівнює 0,94, для другого –

0,98. При перевірці якісна деталь була визнана якісною. Знайти ймовірність того, що її перевірів другий контролер.

Розв’язання. Нехай подія $B = \{\text{якісну деталь було визнано якісною}\}$, події $A_i = \{\text{деталь перевірена } i\text{-м контролером}\}$, $i = 1, 2$. Маємо ймовірності $P(A_1) = 0,6$, $P(A_2) = 0,4$, $P(B/A_1) = 0,94$, $P(B/A_2) = 0,98$. За формулою Байєса (2.16) отримуємо ймовірність $P(A_2/B)$:

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)P(B/A_2)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2)} = \frac{0,4 \cdot 0,98}{0,6 \cdot 0,94 + 0,4 \cdot 0,98} \approx 0,41.$$

Тема 3. Повторні незалежні випробування.

3.1 Формула Бернуллі

Розглянемо задачу про багаторазове повторення випробування, у результаті якого може з’явитися або не з’явитися деяка подія A . Потрібно знайти ймовірність того, що у серії з n випробувань подія A настане m разів.

Якщо ймовірність настання події A у кожному випробуванні не залежить від результатів других випробувань, то такі випробування називають незалежними відносно цієї події. Якщо незалежні випробування здійснюються у однакових умовах, то ймовірність настання події A у цих випробуваннях є сталою.

Нехай здійснюється n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може настати з сталою ймовірністю p , або не настати з відповідною ймовірністю $q = 1 - p$. Розглянемо подію $B_m = \{\text{подія } A \text{ у } n \text{ випробуваннях настанала } m \text{ разів}\}$. Позначимо A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, появу події A у i -ому випробуванні. Тоді $P(A_i) = p$, $P(\overline{A_i}) = 1 - p = q$, $i = 1, 2, \dots, n$. Подія A може настати m разів у кожній з комбінацій результатів випробувань, що мають вигляд $A_1 A_2 \dots A_m \overline{A_{m+1}} \dots \overline{A_n}$. За теоремою множення ймовірностей незалежних подій, ймовірність кожної такої комбінації дорівнює $p^m \cdot q^{n-m}$. Подія B_m є

сумою всіх таких комбінацій. Їхня загальна кількість дорівнює кількості способів вибору з n випробувань m випробувань, у яких подія A настала, тобто C_n^m . Тому ймовірність настання події A у серії з n випробувань m разів визначається за формулою:

$$P(B_m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \quad (3.1)$$

Формулу (3.1) називають формулою Бернуллі, а випробування, що повторюються та задовольняють умовам незалежності та сталості ймовірності настання у кожному з них події A , називають випробуваннями за схемою Бернуллі.

Події B_m , $m = 0, 1, \dots, n$, є несумісними та утворюють повну групу подій, тому $\sum_{m=0}^n P(B_m) = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = 1$. Дійсно, вираз $\sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m}$ у цій рівності є розвиненням $(p + q)^n$ за формулою бінома Ньютона.

Приклад. Прилад складається з 10 блоків, ймовірність безвідмовної роботи кожного з яких дорівнює 0,8. Блоки виходять з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що відмовлять 2 блоки.

Розв'язання. Нехай подія $A = \{\text{відмова блока}\}$. Тоді, за умовою задачі. $P(A) = p = 1 - 0,8 = 0,2$, $P(\bar{A}) = q = 1 - p = 0,8$. За формулою Бернуллі (3.1) при значеннях $n = 10$, $m = 2$, знаходимо шукану ймовірність:

$$P_{10}(2) = C_{10}^2 p^2 q^{10-2} = \frac{10!}{2!8!} \cdot (0,2)^2 \cdot (0,8)^8 \approx 0,302.$$

Зауважимо, що ймовірність настання події A у серії з n випробувань за схемою Бернуллі хоча б один раз доцільно визначати за формулою

$$P = 1 - q^n. \quad (3.2)$$

3.2 Найімовірніше число появ події при випробуваннях за схемою Бернуллі

Знайдемо число m_0 появи події A у серії з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі, для якого ймовірність $P_n(m_0)$ появи події A m_0 разів є найбільшою (найімовірніше число появи події A).

Зі збільшенням кількості m появи події A у серії з n незалежних випробувань ймовірність $P_n(m)$ зростає до деякого значення $m = m_0$, а потім спадає. Число m_0 називають найімовірнішим числом появи події A у серії з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі. Знайдемо це число.

Для m_0 повинні виконуватися умови:

$$\begin{cases} P_n(m_0) \geq P_n(m_0 + 1); \\ P_n(m_0) \geq P_n(m_0 - 1). \end{cases} \quad (3.3)$$

З першої з цих нерівностей випливає, що $C_n^{m_0} p^{m_0} q^{n-m_0} \geq C_n^{m_0+1} p^{m_0+1} q^{n-m_0-1}$.

Звідси знаходимо наступну послідовність нерівностей:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{m_0!(n-m_0)!} &\geq \frac{n!}{(m_0+1)!(n-m_0-1)!} \cdot \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{q}{n-m_0} \geq \frac{p}{m_0+1} \Leftrightarrow (1-p)(m_0+1) \geq \\ &\geq p(n-m_0) \Leftrightarrow m_0 \geq np + p - 1 \Leftrightarrow m_0 \geq np - q. \end{aligned}$$

Виконаємо аналогічні перетворення для другої з нерівностей (3.3):

$$\begin{aligned} P_n(m_0) \geq P_n(m_0 - 1) &\Leftrightarrow C_n^{m_0} p^{m_0} q^{n-m_0} \geq C_n^{m_0-1} p^{m_0-1} q^{n-m_0+1} \Leftrightarrow \frac{n!}{m_0!(n-m_0)!} p^{m_0} q^{n-m_0} \geq \\ &\geq \frac{n!}{(m_0-1)!(n-m_0+1)!} p^{m_0-1} q^{n-m_0+1} \Leftrightarrow \frac{p}{m_0} \geq \frac{q}{n-m_0+1} \Leftrightarrow (n-m_0+1)p \geq m_0(1-p) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow m_0 \leq (n+1)p. \end{aligned}$$

Таким чином, отримали нерівність:

$$np - q \leq m_0 \leq np + p. \quad (3.4)$$

З нерівності (3.4) визначають найімовірніше число m_0 появи події A у серії з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі враховуючи при цьому, що m_0 є цілим невід'ємним числом.

Приклад. Підприємство виготовляє 85 % всієї продукції вищого сорту. Знайти найімовірніше число виробів вищого сорту у партії з 150 виробів.

Розв’язання. Маємо $n=150$, $p=0,85$, $q=0,15$. Визначимо найімовірніше число виробів вищого сорту m_0 з нерівності (3.4):

$$np - q \leq m_0 \leq np + p \Leftrightarrow 150 \cdot 0,85 - 0,15 \leq m_0 \leq 150 \cdot 0,85 + 0,85,$$

тобто $127,35 \leq m_0 \leq 128,35$. Оскільки m_0 є цілим числом, то $m_0 = 128$ виробів.

3.3 Локальна теорема Муавра – Лапласа

При обчисленні ймовірності $P_n(m)$ настання події A у серії з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі m разів безпосередньо використовувати формулу Бернуллі при великих значеннях n досить важко. У таких випадках доцільним є використання локальної асимптотичної теореми Муавра – Лапласа.

Теорема (локальна теорема Муавра – Лапласа). Якщо ймовірність p настання події A у кожному випробуванні є сталою та відмінною від нуля та

одиниці, то $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, де $P_n(m)$ – ймовірність настання

події A у серії з n незалежних випробувань m разів, $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Локальна теорема стверджує, що при великих значеннях n ймовірність $P_n(m)$ може бути наближено обчислена за формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \quad (3.5)$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Гауса, таблиця значень якої наводиться у

підручниках з теорії ймовірностей та математичної статистики, $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Доведення. Нехай $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$, тоді $m = np + x\sqrt{npq}$, $n - m = np - x\sqrt{npq}$. З

цих рівностей отримуємо: $\frac{m}{np} = 1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}$, $\frac{n - m}{np} = 1 - x\sqrt{\frac{p}{np}}$. При досить великих значеннях n ($n \rightarrow \infty$) $m \approx np$, $n - m \approx np$. Далі скористаємось формулою Стірлінга

$$k! \approx \sqrt{2\pi k} \cdot k^k \cdot e^{-k}, \quad (3.6)$$

яка має місце при $k \rightarrow \infty$.

Підставляючи (3.6) у формулу Бернуллі, отримуємо:

$$\begin{aligned} P_n(m) &= \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \approx \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}}{\sqrt{2\pi m} \cdot m^m \cdot e^{-m} \sqrt{2\pi(n-m)} \cdot (n-m)^{n-m} e^{-n+m}} p^m q^{n-m} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} \cdot \left(\frac{m}{np}\right)^{-m} \left(\frac{n-m}{np}\right)^{-(n-m)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} \left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^{-m} \times \\ &\times \left(1 - x\sqrt{\frac{p}{np}}\right)^{-(n-m)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} \cdot \alpha, \\ \text{де } \alpha &= \left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)^{-m} \times \left(1 - x\sqrt{\frac{p}{np}}\right)^{-(n-m)}. \text{ При } n \rightarrow \infty \text{ маємо:} \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{n}{m(n-m)}} \approx \sqrt{\frac{n}{np \cdot np}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

З'ясуємо поведінку величини α при $n \rightarrow \infty$. Знайдемо $\ln \alpha$:

$$\ln \alpha = -m \cdot \ln \left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (n-m) \cdot \ln \left(1 - x\sqrt{\frac{p}{np}}\right). \quad (3.7)$$

Використовуючи розвинення у ряд Маклорена функції $\ln(1+t)$ та обмежившись двома першими членами цього ряду, з врахуванням рівностей $m = np + x\sqrt{npq}$, $n - m = np - x\sqrt{npq}$, отримаємо наближений вираз для $\ln \alpha$:

$$\ln \alpha = -\left(np + x\sqrt{npq}\right) \left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2} \frac{qx^2}{np}\right) - \left(np - x\sqrt{npq}\right) \left(-x\sqrt{\frac{p}{np}} - \frac{1}{2} \frac{px^2}{np}\right).$$

Після елементарних спрощень останній вираз набуває вигляду

$$\ln \alpha = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{q\sqrt{q}}{\sqrt{np}} - \frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{nq}} \right) x^3.$$

При $n \rightarrow \infty$ маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{q\sqrt{q}}{\sqrt{np}} - \frac{p\sqrt{p}}{\sqrt{nq}} \right) x^3 \right) = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow \alpha = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, що й треба було довести.

При обчисленні значень функції Гауса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ потрібно

враховувати, що вона є парною: $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Крім того, при розв'язанні задач можна прийняти, що при $|x| \geq 4$ $\varphi(x) \approx 0$.

Приклад. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться у серії з 400 випробувань 80 разів, якщо ймовірність її настання у одному випробуванні $p = 0,2$.

Розв'язання. Оскільки кількість випробувань $n = 400$ є досить великою, то можна використати локальну теорему Муавра – Лапласа. За умовою $m = 80$,

$$p = 0,2. \quad \text{Тоді} \quad q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 0.$$

таблицею значень функції Гауса знаходимо $\varphi(x) = \varphi(0) = 0,3989$. Шукана

$$\text{ймовірність } P_{400}(80) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{0,3989}{8} \approx 0,0499.$$

3.4. Інтегральна теорема Муавра – Лапласа

Розглянемо задачу знаходження ймовірності настання у серії з n випробувань деякої події A не менше k_1 та не більше k_2 разів. Далі будемо позначати таку ймовірність $P_n(k_1, k_2)$. При великих значеннях n для

розв'язування цієї задачі використовують інтегральну асимптотичну теорему Муавра – Лапласа.

Теорема (інтегральна теорема Муавра – Лапласа). Якщо ймовірність p настання події A у кожному випробуванні є сталою та відмінною від нуля і одиниці, то ймовірність $P_n(k_1, k_2)$ того, що ця подія настане у серії з n випробувань від k_1 до k_2 разів ($k_1 \leq m \leq k_2$) можна наближено знайти за асимптотичною формулою

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (3.8)$$

$$\text{де } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Формулу (3.8) можна записати також у вигляді:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (3.9)$$

$$\text{де } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \text{функція Лапласа.}$$

Доведення. Ймовірність того, що у результаті n випробувань подія A відбудеться від k_1 до k_2 разів можна знайти, використовуючи формулу Бернуллі (3.1) та формулу додавання ймовірностей несумісних подій:

$$P_n(k_1, k_2) = \sum_{m=k_1}^{k_2} P_n(m). \quad (3.10)$$

Згідно з локальною теоремою Муавра – Лапласа при великих значеннях n

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(t_m)}{\sqrt{npq}}, \quad \text{де } t_m = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \quad \text{Тому рівність (3.10) у цьому випадку можна}$$

записати у вигляді:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \sum_{m=k_1}^{k_2} \varphi(t_m) \cdot \Delta t_m, \quad (3.11)$$

$$\text{де } \Delta t_m = t_{m+1} - t_m = \frac{m+1 - np}{\sqrt{npq}} - \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(t) - \text{функція Гауса.}$$

Права частина рівності (3.11) є інтегральною сумою для інтеграла

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, тому при $n \rightarrow \infty$ отримуємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k_1, k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

звідки випливає, що при великих значеннях n виконується наближена рівність (3.8). Теорему доведено.

Оскільки розроблені детальні таблиці значень функції Лапласа

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, на практиці інтегральну теорему Муавра – Лапласа

використовують у вигляді (3.9). При цьому використовуються наступні властивості функції Лапласа.

1. $\Phi(x)$ є непарною функцією: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
2. $\Phi(0) = 0$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0,5$ (на практиці вважають, що при $x \geq 4$ $\Phi(x) \approx 0,5$).

Розглянемо приклад застосування інтегральної теореми Муавра – Лапласа.

Приклад. Ймовірність того, що виготовлена деталь не пройде контроль якості, дорівнює 0,2. За зміну було виготовлено 400 деталей. Знайти ймовірність того, що від 70 до 100 деталей не пройдуть контроль якості..

Розв’язання. Оскільки маємо велику кількість випробувань $n = 400$, то для розв’язування даної задачі доцільно застосувати інтегральну теорему Муавра – Лапласа, згідно з якою шукана ймовірність $P_{400}(70, 100) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$. Маємо $p = 0,2$, $q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8$, $k_1 = 70$, $k_2 = 100$.

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5.$$

За таблицею значень функції Лапласа $\Phi(x)$ знаходимо: $\Phi(2,5) = 0,4938$, $\Phi(-1,25) = -\Phi(1,25) = -0,3944$. За формулою (3.9) отримуємо:

$$P_{400}(70,100) \approx \Phi(2,5) + \Phi(1,25) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

3.5 Формула Пуассона

Точність асимптотичних формул для великої кількості n незалежних випробувань, визначених у локальній та інтегральній теоремах Муавра – Лапласа, знижується, якщо ймовірність p настання події при одному випробуванні близька до нуля або до одиниці. При великих значеннях n для ефективного застосування цих формул необхідним є виконання умови $npq > 10$. Якщо $npq \leq 10$, а величина p або q не перевищує 0,01, то для наближеного обчислення ймовірності появи випадкової події m разів у серії з n незалежних випробувань використовують асимптотичну формулу Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad (3.12)$$

де $a = np$.

Доведемо формулу (3.12). Оскільки $a = np$, то $p = \frac{a}{n}$, $q = 1 - p = 1 - \frac{a}{n}$.

Запишемо формулу Бернуллі (3.1) у наступному вигляді:

$$P_n(m) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-1))}{m!} \left(\frac{a}{n}\right)^m \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-m}. \quad (3.13)$$

Знайдемо $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m)$, вважаючи m та a сталими величинами. З

врахуванням того, що

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(m-1))}{n^m} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right),$$

а також рівності $\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-m} = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-m}$ отримуємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) = \frac{a^m}{m!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-m} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n.$$

Перші дві границі у правій частині цієї рівності дорівнюють одиниці, тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) = \frac{a^m}{m!} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = \frac{a^m}{m!} e^{-a}. \quad (3.14)$$

З рівності (3.14) випливає формула Пуассона (3.12).

Приклад. Завод відвантажив споживачеві 4000 якісних виробів. Ймовірність того, що окремий виріб буде пошкоджено на шляху до споживача, дорівнює 0,0005. Знайти ймовірність того, що до споживача дійде не більше трьох пошкоджених виробів.

Розв'язання. Маємо $n = 4000$, $p = 0,0005$, $q = 0,9995$. Оскільки $p < 0,01$, а величина $npq = 1,999 < 10$ для наближеного розв'язання даної задачі доцільно використати формулу Пуассона (3.12). Шукана ймовірність події $B = \{\text{якісну деталь було визнано якісною}\}$, $P(B) = P_{4000}(0) + P_{4000}(1) + P_{4000}(2) + P_{4000}(3)$. Оскільки $np = 4000 \cdot 0,0005 = 2 = m$, то формула Пуассона у нашому випадку набуває вигляду $P_{4000}(m) = \frac{2^m}{m!} e^{-2}$. Послідовно підставляючи сюди значення $m = 0, 1, 2, 3$, знаходимо:

$$P(B) = e^{-2} \left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3}\right) \approx 0,857.$$

3.6. Ймовірність відхилення відносної частоти настання події від її ймовірності у незалежних випробуваннях.

Нехай m – число настання події A при здійсненні достатньо великої кількості n незалежних випробуваннях за схемою Бернуллі, p – стала ймовірність настання цієї події у одному випробуванні. Якщо $k_1 \leq m \leq k_2$, то

$$\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \text{ де } q = 1 - p.$$

Нехай $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$. Запишемо інтегральну теорему Муавра –

Лапласа у вигляді:

$$P\left(x_1 \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq x_2\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (3.15)$$

Знайдемо ймовірність того, що відхилення відносної частоти $\nu = \frac{m}{n}$ настання події A у серії з n незалежних випробувань від її ймовірності p за абсолютною величиною не перевищить заданого числа $\varepsilon > 0$, тобто знайдемо ймовірність виконання нерівності

$$\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon. \quad (3.16)$$

З нерівності (3.16) випливає, що $-n\varepsilon \leq m - np \leq n\varepsilon$. Звідси знаходимо:

$$-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}} \Leftrightarrow -\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

З (3.15) випливає, що при великих значеннях n

$$P\left(-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Оскільки $\frac{m}{n} = \nu$, то при великих n ймовірність виконання нерівності

$\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon$ або $|\nu - p| < \varepsilon$ визначається за наближеною формулою:

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \quad (3.17)$$

Приклад. Ймовірність того, що виготовлена на заводі деталь є нестандартною, $p = 0,1$. Знайти ймовірність того, що серед випадково відібраних 400 деталей відхилення відносної частоти ν появи нестандартної деталі від її ймовірності за абсолютною величиною не перевищить 0,03.

Розв'язання. За умовою $p = 0,1$, $\varepsilon = 0,03$. Використаємо нерівність (3.17).

При $n = 400$ маємо:

$$\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} = 0,03 \cdot \sqrt{\frac{400}{0,1 \cdot 0,9}} = 2.$$

Тоді $P(|\nu - 0,1| \leq 0,03) \approx 2\Phi(2) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544$.

3.7. Схема випробувань Пуассона. Твірна функція.

Послідовність незалежних випробувань, у яких умова сталості ймовірності настання події A у окремому випробуванні не виконується, називають послідовністю випробувань за схемою Пуассона. Ця схема є узагальненням схеми Бернуллі.

Якщо ймовірність настання події A змінюється від випробування до випробування, то ймовірність $P_n(k)$ настання цієї події у n випробуваннях k разів дорівнює:

$$P_n(k) = p_1 p_2 \dots p_k q_{k+1} q_{k+2} \dots q_n + q_1 p_2 \dots p_k p_{k+1} q_{k+2} \dots q_n + \dots + q_1 q_2 \dots q_{n-k} p_{n-k+1} \dots p_n.$$

Тут p_i – ймовірність настання події A у i -ому випробуванні, $q_i = 1 - p_i$ – ймовірність того, що подія A не з'явиться.

При обчисленні ймовірностей можливого числа настання події A у n незалежних випробуваннях за схемою Пуассона використовують твірну функцію:

$$\varphi_n(x) = (q_1 + p_1 x) \cdot (q_2 + p_2 x) \cdot \dots \cdot (q_n + p_n x) = \prod_{i=1}^n (q_i + p_i x). \quad (3.18)$$

Після множення біномів у виразі для твірної функції (3.18) та зведення подібних доданків коефіцієнт при x^k дорівнює ймовірності $P_n(k)$:

$$\varphi_n(x) = \prod_{i=1}^n (q_i + p_i x) = \sum_{k=0}^n P_n(k) x^k. \quad (3.19)$$

При $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$, $q_1 = q_2 = \dots = q_n = q$ отримаємо схему Бернуллі, для якої твірна функція $\varphi_n(x) = (q + px)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k q^k p^{n-k} x^{n-k}$. Враховуючи відому властивість біноміальних коефіцієнтів $C_n^k = C_n^{n-k}$ після заміни $m = n - k$ отримаємо $\varphi_n(x) = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} x^m$, тобто для схеми Бернуллі отримуємо відому вже нам формулу: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.

Приклад. На заводі у кінці зміни на контроль надходять чотири партії однотипних деталей, що відрізняються лише якістю. Ймовірність того, що деталь з першої партії є якісною, $p_1 = 0,8$, для другої партії ця ймовірність $p_2 = 0,7$, для третьої – $p_3 = 0,9$, для четвертої – $p_4 = 0,95$. Контролер відбирає з кожної партії для перевірки по одній деталі. Знайти ймовірність того, що виготовлені за зміну деталі будуть прийняті контролером, якщо для цього необхідна наявність серед відібраних деталей не менш ніж трьох якісних.

Розв’язання. У даній задачі розглядається послідовність з чотирьох випробувань за схемою Пуассона. Запишемо твірну функцію (3.19):

$$\varphi_4(x) = (0,2 + 0,8x)(0,3 + 0,7x)(0,1 + 0,9x)(0,05 + 0,95x).$$

Розкривши дужки, після зведення подібних доданків отримуємо:

$$\varphi_4(x) = 0,0003 + 0,0103x + 0,1073x^2 + 0,4033x^3 + 0,4788x^4.$$

Звідси знаходимо значення ймовірностей $P_4(0) = 0,0003$, $P_4(1) = 0,0103$, $P_4(2) = 0,1073$, $P_4(3) = 0,4033$, $P_4(4) = 0,4788$. Для перевірки вірності обчислень знайдемо суму ймовірностей $P_4(k)$, $k = \overline{0, 4}$. Вона повинна дорівнювати одиниці. Маємо:

$$\sum_{k=0}^4 P_4(k) = 0,0003 + 0,0103 + 0,1073 + 0,4033 + 0,4788 = 1.$$

Нехай подія $B = \{\text{серед відібраних деталей не менше трьох – якісні}\}$. Тоді ймовірність цієї події:

$$P(B) = P_4(3) + P_4(4) = 0,4033 + 0,4788 = 0,8821.$$

Тема 4. Дискретні випадкові величини

4.1. Поняття випадкової величини

Випадковою величиною називають величину, яка у результаті випробування приймає одне і лише одне значення, наперед невідоме, залежне лише від випадкових, не передбачуваних наперед причин.

Прикладами випадкових величин є: кількість очок, що з'являються на верхній грані грального кубика внаслідок його відкидання, час безвідмовної роботи двигуна автомобіля, кількість пострілів, які зробить стрілець до влучення у ціль, зріст людини у певному віці тощо. Випадкову величину можна розглядати як дійсну функцію, визначену на просторі елементарних подій для даного випробування. Розрізняють дискретні та неперервні випадкові величини.

Дискретною називають випадкову величину, що приймає скінченну або нескінченну зліченну множину значень.

Приклади дискретної випадкової величини: кількість дзвінків, що надходить на телефонну станцію на протязі доби, кількість бракованих деталей у партії з n деталей, кількість підкидань грального кубика до появи на верхній грані п'яти очок тощо.

Неперервною називають випадкову величину, що може приймати будь-які значення з деякого, скінченного або нескінченного інтервалу.

Кількість можливих значень неперервної випадкової величини завжди є нескінченним. Приклади неперервної випадкової величини: час безвідмовної роботи верстата, похибка вимірювання деякої величини, вага людини у певному віці тощо.

Випадкові величини позначають великими латинськими літерами – X , Y , Z , ..., а їх можливі значення – відповідними малими латинськими літерами – x , y , z , Запис $P(X = x_1) = p_1$ означає: ймовірність того, що випадкова величина прийме значення x_1 , дорівнює p_1 .

4.2. Закон розподілу дискретної випадкової величини. Функція розподілу

Нехай X – дискретна випадкова величина, що може прийняти внаслідок випробування одне з можливих значень $x_1, x_2, \dots, x_n$ з відповідними ймовірностями $P(X = x_1) = p_1, P(X = x_2) = p_2, \dots, P(X = x_n) = p_n$. Події $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$ утворюють повну групу неsumісних подій, тому $\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Законом розподілу дискретної випадкової величини називають відповідність між її можливими значеннями та ймовірностями їх появи. Закон розподілу можна задати у вигляді таблиці, аналітично (у вигляді формули) або графічно.

При представленні закону розподілу дискретної випадкової величини у табличній формі задають таблицю, перший рядок якої містить всі можливі значення цієї випадкової величини, другий рядок – ймовірності отримання цих значень. Тут закон розподілу має наступний вигляд.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Приклад 1. Монету підкинули 3 рази. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини – кількості появ герба.

Розв’язання. Маємо серію з 3 випробувань за схемою Бернуллі. Ймовірність появи герба у одному випробуванні $p = 0,5$, $q = 1 - p = 0,5$, $n = 3$. $P(X = 0) = (0,5)^3 = 0,125$, $P(X = 1) = C_3^1 (0,5)(0,5)^2 = 3 \cdot 0,125 = 0,375$, $P(X = 2) = C_3^2 (0,5)^2 (0,5) = 0,375$, $P(X = 3) = (0,5)^3 = 0,125$.

Закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

Контроль: $0,125+0,375+0,375+0,125=1$.

Табличну форму запису закону розподілу дискретної випадкової величини називають також рядом розподілу.

При графічному зображенні дискретної випадкової величини у прямокутній системі координат xOy вздовж вісі абсцис наносять всі можливі значення випадкової величини, а вздовж вісі ординат – ймовірності, що їм відповідають. Далі будують точки (x_i, p_i) і з'єднують їх відрізками. Отримана фігура називається многокутником розподілу.

Закон розподілу дискретної випадкової величини може бути заданим також аналітично, у вигляді формули. Так, для дискретної випадкової величини з розглянутого прикладу аналітичний запис закону розподілу матиме вигляд: $P(X = k) = C_3^k \cdot (0,5)^3$, $k = \overline{0, 3}$.

Нехай дискретна випадкова величина може приймати n значень $x_1, x_2, \dots, x_n$ з рівними ймовірностями $\frac{1}{n}$. Таку величину називають розподіленою за рівномірним законом на скінченній множині з n елементів. Прикладом випадкової величини з таким законом розподілу є кількість очок, що випадають на верхній грані грального кубика після його підкидання. Цей закон розподілу у аналітичній формі матиме вигляд:

$$P(X = x_k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Найбільш загальною формою представлення випадкової величини є функція розподілу, що використовується для представлення як дискретних, так і неперервних випадкових величин.

Функцією розподілу випадкової величини називають функцію $F(x)$, яка кожному значенню аргументу x ставить у відповідність ймовірність

того, що дана випадкова величина прийме значення, менше за x :

$$F(x) = P(X < x).$$

Для дискретної випадкової величини X , яка може приймати значення $x_1, x_2, \dots, x_n$ з відповідними ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_n$, функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) = \sum_{x_i < x} p_i. \quad (4.1)$$

Нерівність $x_i < x$ під знаком суми означає, що підсумовування розповсюджується на значення x_i , що є меншими за x .

Приклад 2. Побудувати функцію розподілу для дискретної випадкової величини X з прикладу 1.

Розв'язання. При $x \leq 0$ маємо $F(x) = P(X < x) = 0$, при $x \in (0; 1]$ $F(x) = P(X = 0) = 0,125$, при $x \in (1; 2]$ знаходимо значення $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,125 + 0,375 = 0,5$, при $x \in (2; 3]$ отримуємо $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,875$, при $x > 3$ функція ймовірностей $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$.

Розглянемо основні властивості функції $F(x)$ розподілу випадкової величини, що безпосередньо впливають з її означення.

1. Функція розподілу $F(x)$ приймає значення з відрізка $[0; 1]$, що впливає з означення цієї функції як ймовірності.
2. Функція розподілу $F(x)$ є неспадною функцією на своїй області визначення $-\infty; \infty$. Дійсно, нехай $a \in R, b \in R, a < b$. Тоді $F(b) = F(a) + P(a \leq X < b) \geq F(a)$.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$. Ця властивість впливає з означення функції розподілу.
4. Ймовірність потрапляння випадкової величини X у проміжок $[a; b)$ дорівнює приросту її функції розподілу на цьому проміжку, тобто

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a). \quad \text{Ця рівність випливає з рівності}$$

$$F(b) = P(X < b) = P(X < a) + P(a \leq X < b) = F(a) + P(a \leq X < b).$$

4.3 Біноміальний розподіл

Випадкова величина X є розподіленою за біноміальним законом (має біноміальний розподіл), якщо вона відображає число появи події A у серії з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі. Ймовірність настання події A у кожному з випробувань є сталою: $P(A) = p$.

Можливими значеннями випадкової величини X , розподіленої за біноміальним законом, є значення $x_0 = 0, x_1 = 1, \dots, x_n = n$. Ймовірності цих можливих значень визначаються за формулою Бернуллі:

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \quad (4.2)$$

де $q = 1 - p, k = 0, 1, \dots, n$. Формула (4.2) є аналітичною формою біноміального закону розподілу. Цей закон розподілу називають біноміальним, оскільки права частина формули (4.2) є загальним членом розвинення бінома

$$\text{Ньютона } (p + q)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Приклад. Пристрій містить три елементи, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови кожного елемента за гарантійний термін роботи пристрою $p = 0,1$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості елементів, що відмовлять за гарантійний термін роботи пристрою.

Розв’язання. Можливими значеннями випадкової величини X є $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. Їх ймовірності при $p = 0,1, q = 1 - p = 0,9, n = 3$ знаходимо за формулою (4.2):

$$P(X = 0) = C_3^0 \cdot (0,1)^0 (0,9)^3 = 0,729, \quad P(X = 1) = C_3^1 \cdot (0,1)^1 (0,9)^2 = 0,243,$$

$$P(X = 2) = C_3^2 \cdot (0,1)^2 (0,9)^1 = 0,027, \quad P(X = 3) = C_3^3 \cdot (0,1)^3 (0,9)^0 = 0,001.$$

Закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

Контроль: $0,729+0,243+0,027+0,001=1$.

4.5. Розподіл Пуассона. Найпростіший потік подій

Розглянемо послідовність подій, що відбуваються у випадкові моменти часу. Прикладами таких подій є відмова обладнання, прихід клієнта у перукарню, телефонний дзвінок тощо. Послідовність подій що настають у випадкові моменти часу, називають потокот подій.

Найпростішим (пуассонівським) потоком подій називають потік подій, що характеризується наступними властивостями:

- 1) стаціонарність (ймовірність настання k подій за проміжок часу t залежить лише від величин k та t ;
- 2) відсутність післядії (ймовірність настання певного числа подій у майбутньому не залежить від числа їх настання у минулому);
- 3) ординарність (за нескінченно малий проміжок часу може з'явитися не більше однієї події).

Інтенсивністю потоку подій називають середнє число подій, що відбувається за одиницю часу.

Кількість k подій з найпростішого потоку, що відбувається за одиницю часу, є дискретною випадковою величиною, розподіленою за законом Пуассона. Ця випадкова величина може приймати нескінченне зліченне число значень $x_k = k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$. Ймовірності того, що випадкова величина набуде цих значень, визначаються за формулою Пуассона:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \quad (4.3)$$

де λ – інтенсивність потоку подій, $k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$

$$\text{При цьому } \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda} = 1.$$

Якщо інтенсивність λ найпростішого потоку подій є відомою, то ймовірність настання k подій з найпростішого потоку за час t визначається за формулою:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \quad (4.4)$$

Приклад. Середня кількість дзвінків, що надходять на телефонну станцію за одну хвилину, дорівнює 2. Знайти ймовірність того, що за 5 хвилин надійдуть 4 дзвінки.

Розв'язання. За умовою, маємо $\lambda = 2$, $k = 4$, $t = 5$. За формулою (4.4) знаходимо: $P_4(5) = \frac{(2 \cdot 5)^4 \cdot e^{-2 \cdot 5}}{4!} \approx 0,014$.

4.5. Геометричний та гіпергеометричний розподіли

Нехай X – дискретна випадкова величина, що дорівнює числу незалежних випробувань, які потрібно провести до настання деякої події A , причому ймовірність настання цієї події у кожному випробуванні є сталою: $P(A) = p$. Таку випадкову величину називають розподіленою за геометричним законом. Вона може приймати нескінченну кількість значень: $x_1 = 1$, $x_2 = 2, \dots, x_n = n, \dots$. Дана випадкова величина приймає значення $X = k$ у тому випадку, коли подія A відбулася у k -му випробуванні. За теоремою множення ймовірностей незалежних подій (п.2.2, теорема 2.2) ймовірність того, що випадкова величина X , розподілена за геометричним законом, прийме значення k визначається формулою

$$P(X = k) = q^{k-1} p, \quad (4.5)$$

де $q=1-p$. Дійсно, у цьому випадку у $k-1$ випробуваннях подія A не відбудеться, проте вона настане у k -му випробуванні. Формула (4.5) визначає аналітичну форму геометричного закону розподілу випадкової величини.

Приклад 1. Ймовірність влучення у ціль при одному пострілі $p=0,4$. Здійснюється стрільба по ціль до першого влучення. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості пострілів, зроблених для влучення у ціль. Знайти ймовірність того, що ціль буде вражена у п'ятому пострілі.

Розв'язання. За умовою $p=0,4$, $q=1-0,4=0,6$. $P(X=k)=(0,6)^{k-1} \cdot 0,4$. Отримали аналітичну форму шуканого закону розподілу. Ймовірність $P(X=5)$ знайдемо, підставивши у нього значення $k=5$: $P(X=5)=(0,6)^4 \cdot 0,4=0,05184$.

Розглянемо наступну задачу. Нехай у партії з n деталей m деталей є стандартними. З цієї партії навмання відбирають k деталей. Розглянемо випадкову величину X – кількість l стандартних деталей серед k відібраних. Тоді за класичною схемою обчислення ймовірності отримуємо:

$$P(X=l)=\frac{C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}}{C_n^k} \quad (4.6)$$

Розподіл дискретної випадкової величини, що визначається формулою (4.6), називають гіпергеометричним.

Приклад 2. З урни, що містить 6 білих та 4 чорних кулі, навмання виймають 3 кулі. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа чорних куль серед вийнятих.

Розв'язання. Випадкова величина X розподілена за гіпергеометричним законом. Вона може приймати значення 0, 1, 2 або 3. Знайдемо ймовірності отримання цих значень.

$$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}, \quad P(X=1)=\frac{C_6^2 \cdot C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}, \quad P(X=2)=\frac{C_6^1 \cdot C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10},$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}.$$

Контроль: $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = 1.$

Закон розподілу дискретної випадкової величини X матиме наступний вигляд.

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

4.6. Математичне сподівання дискретної випадкової величини

Однією з найбільш важливих числових характеристик випадкової величини є її математичне сподівання. Розглянемо дискретну випадкову величину X , що приймає свої можливі значення $x_1, x_2, \dots, x_n$ з відповідними ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають суму добутків всіх її можливих значень на їх ймовірності:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (4.7)$$

Для математичного сподівання випадкової величини X використовують позначення $M(X)$, m_x або m .

Якщо дискретна випадкова величина X може приймати нескінченне зліченне число значень, то її математичне сподівання визначається як сума

ряду: $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$

Якщо розглядати можливі значення $x_1, x_2, \dots, x_n$ випадкової величини X як координати точок на числовій прямій, а ймовірності $p_1, p_2, \dots, p_n$ – як ваги вантажів, підвішених у цих точках, то математичне сподівання $M(X)$ буде співпадати з координатою центра ваги даної системи. Цей факт відображає механічний зміст математичного сподівання випадкової величини.

Нехай здійснена велика кількість n випробувань, у яких випадкова величина X m_1 разів прийняла значення x_1 , m_2 рази прийняла значення $x_2, \dots, m_k$ разів прийняла значення x_k , причому $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$. Середнє арифметичне отриманих значень випадкової величини X

$$\bar{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_k m_k}{n} = x_1 \cdot \frac{m_1}{n} + x_2 \cdot \frac{m_2}{n} + \dots + x_k \cdot \frac{m_k}{n} = \sum_{i=1}^k x_i w_i.$$

Тут $w_i = \frac{m_i}{n}$ – відносна частота появи значення x_i , яка при достатньо великій кількості випробувань n наближено дорівнює ймовірності його появи: $w_i \approx p_i$. Таким чином, математичне сподівання випадкової величини наближено дорівнює середньому арифметичному її значень, отриманих у результаті великої кількості випробувань. Виходячи з цього, математичне сподівання випадкової величини називають також її очікуваним середнім значенням.

Приклад 1. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини X , що приймає значення $x_1 = -1$ з ймовірністю $p_1 = 0,3$, $x_2 = 0$ з ймовірністю $p_2 = 0,5$, $x_3 = 1$ з ймовірністю $p_3 = 0,2$.

Розв’язання. За формулою (4.7) отримаємо:

$$M(X) = (-1) \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,2 = -0,1.$$

Приклад 2. Знайти математичне сподівання випадкової величини X з біноміальним законом розподілу.

Розв’язання. Випадкова величина X може набувати значень $x_i = i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, де n – кількість випробувань, що здійснюються за схемою Бернуллі. Ймовірності $p_i = P(X = i)$ знаходимо за формулою Бернуллі, згідно з якою $p_i = C_n^i p^i q^{n-i}$, де p – ймовірність появи події у одному випробуванні,

$q = 1 - p$. За формулою (4.7) знаходимо, що $M(X) = \sum_{i=0}^n i \cdot C_n^i \cdot p^i \cdot q^{n-i}$. Для

обчислення цієї суми знайдемо похідну за параметром p від обох частин

$$\text{рівності } (p + q)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i p^i q^{n-i}. \quad \text{Отримаємо } n(p + q)^{n-1} = \sum_{i=0}^n i \cdot C_n^i \cdot p^{i-1} \cdot q^{n-i}.$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на p , з врахуванням того, що $p + q = 1$, знаходимо:

$$np = \sum_{i=0}^n i \cdot C_n^i \cdot p^i \cdot q^{n-i} = M(X).$$

Таким чином, математичне сподівання випадкової величини X з біноміальним законом розподілу $M(X) = np$.

Приклад 3. Знайти математичне сподівання для випадкової величини X з розподілом Пуассона.

Розв'язання. Для даного розподілу можливі значення випадкової величини X $x_k = k$, $k = 1, 2, \dots, n, \dots$. Ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення x_k , $p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, де λ – параметр розподілу, що дорівнює інтенсивності потоку подій. Математичне сподівання цієї випадкової величини

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda} = e^{\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda} = \lambda.$$

Таким чином, математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона $M(X) = \lambda$.

Приклад 4. Знайти математичне сподівання випадкової величини X з геометричним законом розподілу.

Розв'язання. Ця випадкова величина набуває можливих значень $x_k = k$, $k = 1, 2, \dots$. $p_k = P(X = k) = q^{k-1} p$, де p – ймовірність появи події у одному випробуванні, $q = 1 - p$. Математичне сподівання $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_k p_k$.

Підставивши сюди значення x_k та p_k , знаходимо:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} \cdot p = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1}.$$

Оскільки $0 < q < 1$, то за формулою нескінченно спадної геометричної прогресії $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$. Диференціюючи цю рівність за параметром q ,

отримаємо $\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}$. Тоді $M(X) = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$.

Таким чином, математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за геометричним законом, $M(X) = \frac{1}{p}$.

4.7. Добуток та сума незалежних випадкових величин

Означення 1. Добутком сталої величини C на дискретну випадкову величину X називають дискретну випадкову величину $Y = CX$, можливі значення якої дорівнюють добуткам сталої C на можливі значення величини X , а їх ймовірності дорівнюють ймовірностям відповідних можливих значень випадкової величини X .

Означення 2. Дві випадкові величини називають незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, якого значення набула інша величина.

Означення 3. Добутком незалежних випадкових величин X та Y називають випадкову величину XY , можливі значення якої дорівнюють добуткам кожного можливого значення величини X на кожне можливе значення величини Y , а ймовірності можливих значень добутку XY дорівнюють добуткам ймовірностей можливих значень співмножників.

Приклад 1. Знайти закон розподілу випадкової величини XY , якщо незалежні випадкові величини X та Y задані своїми законами розподілу.

x_i	0	1	2		y_j	1	2	3
p_i	0,4	0,5	0,1		p_j	0,3	0,2	0,5

Розв’язання. Випадкова величина X може приймати можливі значення x_i з відповідними ймовірностями p_i , величина Y може приймати можливі значення y_j з ймовірностями p_j . Нехай $XY = Z$. Випадкова величина Z приймає можливі значення $x_i y_j$ з ймовірностями $p_i p_j$. Можливими значеннями $Z \in z_1 = 0$ (при $X = 0, Y = 1 \vee Y = 2 \vee Y = 3$), $z_2 = 1$ (при $X = 1 \wedge Y = 1$), $z_3 = 2$ (при $(X = 1 \wedge Y = 2) \vee (X = 2 \wedge Y = 1)$), $z_4 = 3$ (при $X = 1 \wedge Y = 3$), $z_5 = 4$ (при $X = 2 \wedge Y = 2$), $z_6 = 6$ (при $X = 2 \wedge Y = 3$). Знайдемо ймовірності набуття випадковою величиною Z цих значень. $P(Z = z_1) = 0,4(0,3 + 0,2 + 0,5) = 0,4$, для $z_2 = 1$ $P(Z = z_2) = 0,5 \cdot 0,3 = 0,15$, при значенні $z_3 = 2$ отримуємо $P(Z = z_3) = 0,5 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,13$, для $z_4 = 3$ $P(Z = z_4) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$, при $z_5 = 4$ маємо $P(Z = z_4) = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02$, при $z_6 = 6$ $P(Z = z_6) = 0,1 \cdot 0,5 = 0,05$.

Таким чином, отримали закон розподілу випадкової величини Z , який наведемо у наступній таблиці.

z_k	0	1	2	3	4	6
p_k	0,4	0,15	0,13	0,25	0,02	0,05

Контроль: $0,4 + 0,15 + 0,13 + 0,25 + 0,02 + 0,05 = 1$.

Означення 4. Сумою випадкових величин X та Y називають випадкову величину $Z = X + Y$, можливі значення якої дорівнюють сумах кожного можливого значення величини X та кожного можливого значення величини Y . Ймовірності можливих значень величини $Z = X + Y$ для незалежних X та Y дорівнюють добуткам ймовірностей відповідних доданків, для залежних X та Y – добуткам ймовірності одного з доданків на умовну ймовірність другого відносно першого.

Приклад 2. Знайти закон розподілу випадкової величини $Z = X + Y$ для незалежних випадкових величин X та Y з попереднього прикладу.

Розв’язання. Знайдемо всі можливі значення випадкової величини $Z = X + Y$ та ймовірності їх отримання. $z_1 = 0 + 1 = 1$, $z_2 = 0 + 2 = 1 + 1 = 2$, $z_3 = 0 + 3 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3$, $z_4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 4$, $z_5 = 2 + 3 = 5$.

$$P(Z = 1) = P(X = 0) \cdot P(Y = 1) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12,$$

$$P(Z = 2) = P(X = 0) \cdot P(Y = 2) + P(X = 1) \cdot P(Y = 1) = 0,4 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,3 = 0,23,$$

$$P(Z = 3) = P(X = 0) \cdot P(Y = 3) + P(X = 1) \cdot P(Y = 2) + P(X = 2) \cdot P(Y = 1) = \\ = 0,4 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,33,$$

$$P(Z = 4) = P(X = 1) \cdot P(Y = 3) + P(X = 2) \cdot P(Y = 2) = 0,5 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,27,$$

$$P(Z = 5) = P(X = 2) \cdot P(Y = 3) = 0,1 \cdot 0,5 = 0,05.$$

Закон розподілу випадкової величини Z має наступний вигляд.

z_i	1	2	3	4	5
p_i	0,12	0,23	0,33	0,27	0,05

Контроль: $0,12 + 0,23 + 0,33 + 0,27 + 0,05 = 1$.

4.9. Властивості математичного сподівання

З означення математичного сподівання дискретної випадкової величини випливають його основні властивості.

1. Математичне сподівання сталої величини C дорівнює цій сталій:
 $M(C) = C$.

2. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання:
 $M(CX) = C \cdot M(X)$, $C - const$.

3. Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань: $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.

4. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань: $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

4.10. Дисперсія дискретної випадкової величини

У більшості випадків математичне сподівання не може у достатній мірі характеризувати випадкову величину. Для оцінки відхилень її можливих значень від математичного сподівання використовують дисперсію та середнє квадратичне (стандартне) відхилення.

Нехай дискретна випадкова величина X може приймати свої можливі значення x_i з відповідними ймовірностями p_i , $i=1, 2, \dots, n$. Відхилення можливих значень x_i випадкової величини X від її математичного сподівання можна оцінити за допомогою різниць $x_i - M(X)$, проте середнє значення цих різниць для будь-якої випадкової величини дорівнює нулю: $M(X - M(X)) = M(X) + M(-M(X)) = M(X) - M(X) = 0$. Тому замість відхилень $x_i - M(X)$ розглядають їхні квадрати $(x_i - M(X))^2$. Їх можна охарактеризувати як значення випадкової величини $(X - M(X))^2$, які вона приймає з тими ж ймовірностями, що й випадкова величина X значення x_i .

Означення 1. Дисперсією дискретної випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата її відхилення від математичного сподівання:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \cdot p_i. \quad (4.8)$$

Для позначення дисперсії поряд з $D(X)$ використовують також символи σ_x^2 або σ^2 .

Означення 2. Середнім квадратичним або стандартним відхиленням дискретної випадкової величини X називають квадратний корінь з її дисперсії:

$$\sigma_x = \sigma = \sqrt{D(X)}. \quad (4.9)$$

На практиці для обчислення дисперсії часто використовують формулу, більш зручну, ніж (4.8). За означенням дисперсії маємо:

$$\begin{aligned} D(X) &= M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2X \cdot M(X) + (M(X))^2) = M(X^2) - \\ &- 2M(X) \cdot M(X) + M((M(X))^2) = M(X^2) - 2(M(X))^2 + (M(X))^2 = \\ &= M(X^2) - (M(X))^2. \end{aligned}$$

Таким чином, дисперсія випадкової величини X дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата цієї випадкової величини та квадратом її математичного сподівання:

$$\sigma_x^2 = M(X^2) - (M(X))^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i p_i \right)^2. \quad (4.10)$$

Приклад. Випадкова величина X приймає значення $x_1 = 1$ з ймовірністю $p_1 = 0,2$, $x_2 = 2$ з ймовірністю $p_2 = 0,6$, $x_3 = 3$ з ймовірністю $p_3 = 0,2$. Знайти її дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання. Для знаходження дисперсії заданої випадкової величини використаємо формулу (4.10), згідно з якою отримуємо:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i p_i \right)^2 = 1^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,6 + 3^2 \cdot 0,2 - (1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,2)^2 = \\ &= 0,4. \end{aligned}$$

Середнє квадратичне відхилення знаходимо за формулою (4.9):

$$\sigma_x = \sqrt{0,4} \approx 0,63.$$

4.11. Властивості дисперсії

1. Дисперсія сталої величини дорівнює нулю.

Доведення. Нехай C – стала величина. За означенням дисперсії маємо:

$$D(C) = M(C - M(C))^2 = M(C - C)^2 = M(0) = 0.$$

2. Сталій множник можна винести за знак дисперсії, піднісши його до квадрата: $D(cX) = c^2 D(X)$.

Доведення.

$$D(cX) = M(cX - M(cX))^2 = M(cX - cM(X))^2 = M(c^2(X - M(X))^2).$$

Виносячи сталій множник c^2 за знак математичного сподівання, отримаємо:

$$D(cX) = c^2 M(X - M(X))^2 = c^2 D(X).$$

3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює їх сумі дисперсій.

Доведення. Оскільки дисперсія випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням її квадрата та квадратом її математичного сподівання, то $D(X + Y) = M((X + Y)^2) - (M(X + Y))^2$. Математичне сподівання квадрата $(X + Y)^2$: $M((X + Y)^2) = M(X^2) + 2M(XY) + M(Y^2)$.

Квадрат математичного сподівання:

$$(M(X + Y))^2 = (M(X) + M(Y))^2 = (M(X))^2 + 2M(X)M(Y) + (M(Y))^2.$$

$$D(X + Y) = [M(X^2) - (M(X))^2] + [M(Y^2) - (M(Y))^2] = D(X) + D(Y).$$

Наслідок 1. Дисперсія суми кількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій.

Наслідок 2. Дисперсія суми сталої та випадкової величин дорівнює дисперсії випадкової величини.

4. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій.

Доведення.

$$D(X - Y) = D(X + (-Y)) = D(X) + D(-Y) = D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y).$$

Теорема. Дисперсія випадкової величини, розподіленої за біноміальним законом, дорівнює добутку числа випробувань n на ймовірності p та q настання та ненастання події A у одному випробуванні: $D(X) = npq$.

Доведення. Нехай випадкова величина X – це кількість появ події A у n незалежних випробуваннях, тобто це випадкова величина, розподілена за біноміальним законом. Загальна кількість появ події A у n незалежних випробуваннях дорівнює сумі появ цієї події у кожному з випробувань:

$X = \sum_{i=1}^n X_i$, де X_i – кількість появ події A у i -му випробуванні. Випадкова величина X_i може приймати значення 1 з ймовірністю p , або значення 0 з ймовірністю q . $M(X_i) = p$, тоді дисперсія X_i :

$$D(X_i) = M(X_i^2) - (M(X_i))^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

$$D(X) = D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n D(X_i) = \sum_{i=1}^n pq = npq. \quad (4.11)$$

4.12 Початкові та центральні моменти дискретної випадкової величини. Асиметрія та ексцес

Узагальненням основних числових характеристик випадкових величин – математичного сподівання та дисперсії, є поняття моментів цих величин.

Означення 1. Початковим моментом k -го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання випадкової величини X^k :

$$\nu_k = M(X^k) = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i. \quad (4.12)$$

Означення 2. Центральним моментом k -го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання випадкової величини $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M(X - M(X))^k = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^k p_i. \quad (4.13)$$

Центральний момент третього порядку μ_3 характеризує асиметрію розподілу випадкової величини X . Коефіцієнт асиметрії обчислюють за формулою:

$$A_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} \quad (4.14)$$

Центральний момент четвертого порядку характеризує гостровершинність багатокутника розподілу випадкової величини X . Для такої характеристики використовують показник, який називають ексцесом:

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3. \quad (4.15)$$

Числовими характеристиками випадкової величини є також її мода та медіана.

Означення 3. Модою дискретної випадкової величини називають її найбільш ймовірне значення.

Зустрічаються одномодальні та багатомодальні розподіли.

Означення 4. Медіаною випадкової величини X називають її значення Me , при якому $P(X < Me) = P(X > Me)$.

Медіану звичайно обчислюють для неперервних випадкових величин.