РОЗДІЛ 7. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Диференціальне числення — розділ математики, який вивчає поводження функції, зокрема швидкість її зміни, за допомогою поняття похідної та диференціала функції.

У розділі розглянуто також застосування похідної та диференціала до задач геометрії та фізики. Подано схему повного дослідження поводження функції і побудови її графіка.

Поданий матеріал використовується в розділах:

— Інтегральне числення функцій однієї змінної;

— Диференціальне числення функцій кількох змінних;

— Диференціальні рівняння;

— Теорія рядів;

— Теорія функцій комплексної змінної;

— Інтегральні перетворення.

Ключові поняття:

— похідна функції;

— диференціал функції;

— диференційовність функції;

— екстремум функції;

— многочлен Тейлора.

Опанувавши цей розділ Ви зможете:

— знаходити похідні й диференціали функцій за допомогою правил і формул диференціювання;

— застосовувати похідні й диференціали до розв'язання задач геометрії й фізики;

— знаходити границі засобами диференціального числення;

— наближати функції многочленами (формула Тейлора);

— досліджувати функції на монотонність та опуклість за допомогою похідних;

— знаходити локальні та глобальні екстремуми функцій;

— будувати графіки функцій за результатами повного дослідження функції.

Попередні знання та вміння з розділів:

— Функції однієї змінної;

— Теорія границь;

— Аналітична геометрія.

7.1. ПОХІДНА ТА ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

Вивчення швидкості перебігу будь-якого процесу, зокрема швидкості зміни функції, приводить до поняття похідної функції. Розділ математики, який присвячений не тільки розв'язанню цієї задачі в найзагальнішому випадку, але й висновкам, які випливають з її розв'язання, називають *диференціальним численням* функцій.

7.1.1. Похідна функції

1. Розгляньмо функцію f, означену в деякому околі $U(x_0)$ точки x_0. Надаємо фіксованому значенню аргументу x_0 приріст Δx такий, що точка $x = x_0 + \Delta x$ належить околу $U(x_0)$.

Означення 7.1 (похідної функції в точці).

Похідною функції f *у точці* x_0 називають границю відношення приросту функції

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля і позначають

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 використовують ще позначення:

$$y'(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

З означення похідної функції f у точці x_0 випливає, що

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Якщо для деякого значення x_0

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \infty \ (\text{або } -\infty \text{ чи } +\infty),$$

то кажуть, що в точці x_0 існує *нескінченна похідна*.

2. Знайдімо, приміром, похідну функції $f(x) = ax$ у точці $x = x_0$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax - ax_0}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a.$$

3. Покажімо, що функція $f(x) = \sqrt{x}$ у точці $x_0 = 0$ має нескінченну похідну:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\sqrt{0 + \Delta x} - \sqrt{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty.$$

4. Якщо значенню аргументу x функції f відповідає певне значення $f'(x)$, то означено функцію

$$f' : x \mapsto f'(x).$$

Кажуть, що функція f «*породжує*» функцію f', а функція f' «*походить*» від функції f.

Дію відшукання похідної функції f називають *диференціюванням*.

5. Означення 7.2 (однобічних похідних).

Лівобічною (*правобічною*) *похідною функції* f *у точці* x_0 називають

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right),$$

і позначають $f'(x_0 - 0)$ $(f'(x_0 + 0))$.

Праву та ліву похідні функції в точці називають *однобічними похідними* функції в цій точці.

Нехай функцію f означено в околі точки x_0.

Теорема 7.1 (критерій існування скінченної похідної).

Функція f, означена в околі точки x_0, має скінченну похідну $f'(x_0)$ тоді й лише тоді, коли існують скінченні й рівні між собою однобічні похідні $f'(x_0 - 0)$ та $f'(x_0 + 0)$, причому:

$$f'(x_0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0).$$

6. Приміром, знайдімо однобічні похідні функції $f(x) = |x|$ у точці $x_0 = 0$:

$$f'(-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x + 0| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1;$$
$$f'(+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x + 0| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Отже, функція $f(x) = |x|$ не має похідної в точці $x = 0$.

7.1.2. Диференційовність функції

1. Розгляньмо функцію f, яку означено в деякому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}$.

Означення 7.3 (диференційовності функції в точці).

Функцію f називають *диференційовною* в точці x_0, якщо її приріст у цій точці

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

можна записати як

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \ \ \Delta x \to 0,$$

де $A = A(x_0)$ стала щодо Δx, $\alpha(\Delta x)$ — н. м. ф., коли $\Delta x \to 0$.

Теорема 7.2 (критерій диференційовності).

Функція f диференційовна в точці x_0 тоді й лише тоді, коли в точці x_0 існує скінченна похідна $f'(x_0) = A$.

Доведення. $\boxed{\Rightarrow}$ Нехай функція f диференційовна в точці x_0. Доведімо, що в цій точці існує скінченна похідна $f'(x_0) = A$. З диференційовності функції f у точці x_0 випливає, що приріст функції, відповідний приросту аргументу Δx, можна записати як

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

звідки

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

де A для заданої точки x_0 стала (не залежить від Δx), а $\alpha(\Delta x) \to 0$, коли $\Delta x \to 0$. Із властивості функції, що має скінченну границю, випливає, що

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Нехай у функції f у точці x_0 існує скінченна похідна $f'(x_0)$, тобто існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \Leftrightarrow \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

де $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$

Тому

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

А це і є умова диференційовності, причому $f'(x_0) = A.$ ■

2. Теорема 7.3. (необхідна умова диференційовності).

Якщо функція диференційовна в деякій точці, то вона неперервна в цій точці.

Зворотне твердження неправдиве: з неперервності функції f у деякій точці не випливає диференційовність її в цій точці.

Приміром, функція $y = |x|$ непрерервна в точці $x_0 = 0$, має в цій точці однобічні похідні, але не має похідної в ній, а, отже, не є диференційовною (рис. 7.1).

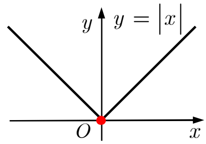


Рис. 7.1. Приклад неперервної недиференційовної функції в точці $x_0 = 0$

Множина диференційовних функцій є підмножиною множини неперервних функцій.

7.1.3. Правила диференціювання

Знаходити похідну функції безпосередньо за означенням досить складно й неефективно. На практиці функції диференціюють за допомогою низки правил і формул.

Нехай функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ диференційовні в деякому інтервалі $(a;b)$.

1. Сталий множник можна винести за знак похідної:

$$\boxed{(Cu)' = Cu'.}$$

2. Похідна суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) похідних цих функцій:

$$\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'.}$$

Правило працює для будь-якої скінченної кількості доданків.

3. Похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутку похідної першого множника на другий та добутку першого множника на похідну другого:

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'.}$$

Доведення. З диференційовності функцій u та v випливає існування скінченних похідних u' та v' і неперервність функції u та v.

За означенням

$$(u(x)v(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x) + u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} =$$
$$= u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \blacksquare$$

4. Похідна частки двох функцій дорівнює дробу, чисельник якого є різницею добутків знаменника дробу на похідну чисельника і чисельника дробу на похідну знаменника, а знаменник є квадрат дільника:

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \ (v \neq 0).}$$

5. Дифенціювання складеної функції. Розгляньмо складену функцію $y = f(\varphi(x))$ із *проміжним аргументом* $u = \varphi(x)$ і *основним аргументом* x.

Нехай функція $u = \varphi(x)$ має скінченну похідну u'_x у точці x, а функція $y = f(u)$ має скінченну похідну y'_u у відповідній точці $u = \varphi(x)$.

Похідна складеної функції за основним аргументом дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну цього аргументу за основним аргументом:

$$\boxed{y'_x = y'_u u'_x.}$$

Сформульоване правило працює також, якщо проміжних аргументів декілька.

Доведення. Надаємо незалежному аргументу x приріст Δx. Тоді функція $u = \varphi(x)$ одержує приріст Δu, а це для $\Delta u \neq 0$ викликає приріст Δy функції $y = f(u)$.

З диференційовності функції $y = f(u)$ в точці u випливає, що

$$\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u,$$

де $\alpha(\Delta u) \to 0$, коли $\Delta u \to 0$.

Уважаємо, що $\alpha(0) = 0$. Тоді записана рівність зберігається і для $\Delta u = 0$ (маємо $0 = 0$).

Ділячи рівність почленно на Δx, дістаємо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta u \to 0$ (з неперервності функції $u = \varphi(x)$ у точці x) і $\alpha(\Delta u) \to 0$. Отже, існує границя

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x. \blacksquare$$

6. Диференціювання оберненої функції. Розгляньмо дві взаємно обернені функції $y = f(x)$ та $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$. Нехай функція f диференційовна.

Похідна оберненої функції дорівнює оберненій величині похідної заданої функції:

$$\boxed{x'_y = \frac{1}{y'_x}, y'_x \neq 0.}$$

Зауважмо, що після диференціювання треба у праву частину рівності замість x підставити $\varphi(y)$.

Доведення. Нехай функція $y = f(x)$ строго монотонна в інтервалі $(a;b)$ і має похідну $f'(x) \neq 0, x \in (a;b)$. Розгляньмо обернену функцію $x = \varphi(y)$. Надаємо аргументу y приріст $\Delta y \neq 0$. Йому відповідає приріст Δx оберненої функції, причому $\Delta x \neq 0$ на підставі строгої монотонності (оскільки $f'(x_0) \neq 0$) функції $y = f(x)$. Тому можна записати

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Якщо $\Delta y \to 0$, то завдяки неперервності оберненої функції приріст $\Delta x \to 0$. Оскільки

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0,$$

то звідси випливають рівності

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)},$$

тобто

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \blacksquare$$

7.1.4. Основні формули диференціювання

1. Нехай $u = u(x)$ — диференційовна функція, C — стала.

Функція	Похідна	Функція	Похідна
C	0	$u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$
$a^u, 0 < a \neq 1$	$a^u \ln a \cdot u'$	e^u	$e^u \cdot u'$
$\log_a u$, $0 < a \neq 1$	$\dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$	$\ln u$	$\dfrac{1}{u} \cdot u'$
$\sin u$	$\cos u \cdot u'$	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
$\operatorname{tg} u$	$\dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	$\operatorname{ctg} u$	$-\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$\arcsin u$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	$\arccos u$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$\operatorname{arctg} u$	$\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$	$\operatorname{arcctg} u$	$-\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$\operatorname{sh} u$	$\operatorname{ch} u \cdot u'$	$\operatorname{ch} u$	$\operatorname{sh} u \cdot u'$
$\operatorname{th} u$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$	$\operatorname{cth} u$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$

Доведення. Виведімо деякі формули таблиці похідних, користуючись визначними границями та наслідками з них.

1. Нехай $f(x) = C = \text{const}, x \in \mathbb{R}$. Тоді

$$f'(x) = C' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0.$$

2. Для функції $f(x) = a^x, 0 < a \neq 1, x \in \mathbb{R}$, маємо:

$$f'(x) = (a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Зокрема,

$$(e^x)' = e^x.$$

3. Для функції $f(x) = \log_a x, 0 < a \neq 1, x > 0$. маємо:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Зокрема,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

4. Формулу диференціювання для функції $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}, \alpha \in \mathbb{R}, x > 0,$ можна одержати за правилом диференціювання складеної функції:

$$(x^\alpha)' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

5. Для функції $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R},$ маємо:

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Так само одержують і похідну функції $f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}.$

6. Для функції $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z},$ скористаємось правилом диференціювання частки:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Так само одержують і похідну функції $f(x) = \operatorname{ctg} x, x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

7. Похідну функції $y = \arcsin x, x \in (-1;1)$ одержують за правилом диференціювання оберненої функції.

Маємо $x = f^{-1}(y) = \sin y, y \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right).$ Отже,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(f^{-1}(y))'} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

У точках $x = \pm 1$ функція $y = \arcsin x$ не є диференційовною.

Так само можна одержати похідні функцій $y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x$ та $y = \operatorname{arcctg} x.$

8. Для функції $f(x) = \operatorname{sh} x, x \in \mathbb{R},$ скористаємось правилами диференціювання:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}(-1)) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Так само можна одержати похідну функції $y = \operatorname{ch} x.$ Похідні функцій $y = \operatorname{th} x$ та $y = \operatorname{cth} x$ дістають за правилом диференціювання частки.■

2. Логарифмічне диференціювання. Розгляньмо функцію $f(x) > 0$ й утворімо складену функцію $\ln f(x).$ Обчислімо похідну функції $\ln f(x),$ яку називають *логарифмічною похідною* функції $f(x),$

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x).$$

Звідси випливає **правило логарифмічного диференціювання**:

$$\boxed{f'(x) = f(x)(\ln f(x))'.}$$

Логарифмічне диференціювання спрощує знаходження похідної:

1) степенево-показникових функцій $(u(x))^{v(x)}$;

2) функцій, що мають велику кількість співмножників.

3. Приміром,

$$((\sin x)^x)' = (\sin x)^x(\ln(\sin x)^x)' = (\sin x)^x(x\ln\sin x)' =$$
$$= (\sin x)^x\left(1\cdot\ln\sin x + x\cdot\frac{(\sin x)'}{\sin x}\right) =$$
$$= (\sin x)^x\left(\ln\sin x + x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right) = (\sin x)^x\left(\ln\sin x + x\operatorname{ctg}x\right).$$

4. Диференціювання неявної функції. Нехай диференційовну функцію $y = y(x)$ задано неявно рівнянням

$$F(x,y) = 0.$$

Якщо в рівнянні $F(x,y) = 0$ під y розуміти функцію $y(x), x \in X$, то це рівняння перетворюється на тотожність за аргументом x:

$$F(x, y(x)) \equiv 0.$$

Диференціюючи цю тотожність за змінною x та вважаючи, що y є функцією x, дістаємо лінійне щодо y' рівняння, яке також містить змінні x та y.

Розв'язуючи його щодо y', знаходимо шукану похідну функції $y = f(x)$, заданої неявно:

$$y'_x = g(x,y).$$

5. Приміром, знайдімо похідну від функції $y = f(x)$, заданої рівнянням $x^2 + y^2 = a^2$.

Продиференціюємо рівняння за змінною x:

$$2x + 2yy' = 0.$$

Отже,

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

6. Диференціювання функцій, заданих параметрично. Нехай функцію $y(x)$ задано параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in T.$$

Припускаємо, що функції $x(t)$ та $y(t)$ диференційовні для будь-якого $t \in T$ й $x'(t) \neq 0$. Нехай функція $x = x(t)$ має диференційовну обернену функцію $t(x)$. Функцію $y = y(x)$, задану параметрично, можна розглядати як складену функцію

$$y = y(t), t = t(x),$$

де t — проміжний аргумент.

Тоді

$$y'_x = y'_t t'_x = y'_t \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Отже, похідна функції $y = y(x)$, заданої параметрично, також задається параметрично:

$$\boxed{\begin{cases} x = x(t), \\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \end{cases} t \in T.}$$

7. Приміром, якщо задано функцію $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} t \in [0; \pi]$, то її похідну задають рівняння:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y' = \dfrac{(\sin t)'}{(\cos t)'} = \dfrac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t, \end{cases} t \in [0; \pi].$$

7.1.5. Диференціал функції

1. Нехай функція f диференційовна в точці x_0, тобто має скінченну похідну $f'(x_0)$ і

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \ \Delta x \to 0.$$

Означення 7.4 (диференціала функції в точці).

Диференціалом функції f у точці x_0 називають головну, лінійну щодо Δx, частину приросту цієї функції f і позначають

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

2. Знайдімо, приміром, диференціал функції $f(x) = x$.

Оскільки

$$f'(x) = x' = 1,$$

то

$$df(x) = dx = \Delta x,$$

тобто диференціал незалежної змінної дорівнює приросту цієї змінної і формулу для обчислення диференціала можна ще записати так:

$$\boxed{df(x) = f'(x)dx.}$$

З неї випливає рівність

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

Отже, позначення $\dfrac{df(x)}{dx}$ можна розглядати як відношення диференціалів $df(x)$ та dx.

7.1.6. Геометричний і механічний зміст похідної та диференціала

1. Дотична до кривої. Розгляньмо задачу побудови дотичної до довільної плоскої кривої. Нехай f неперервна функція, означена в деякому околі точки x_0. Розглядаємо дві точки

$$M_0(x_0;y_0) \text{ та } M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$$

графіка цієї функції (рис. 7.2).

Через них проходить єдина пряма — *січна*

$$M_0M : \frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + y_0,$$

Кутовий коефіцієнт січної

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

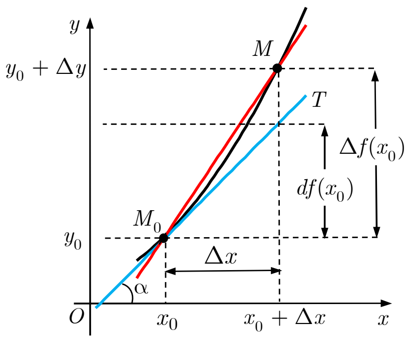


Рис. 7.2. Дотична до кривої

Якщо точка M рухається вздовж кривої до точки M_0, то січна повертається навколо точки M_0 і прямує до деякого граничного положення M_0T, яке називають *дотичною до кривої* в точці M_0.

Січна прямуватиме до граничного положення, відмінного від вертикальної прямої, тоді й лише тоді, коли існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

яка є *кутовим коефіцієнтом дотичної* до графіка функції f у точці x_0.

У разі скінченної похідної $f'(x_0)$ дотична до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ має рівняння

$$\boxed{y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).}$$

Кутом між двома кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ у точці їх перетину називають кут між дотичними до кривих, проведеними в цій точці.

З рівняння дотичної, позначаючи ординату дотичної через $y_{\text{дот}}$, дістаємо рівності:

$$y_{\text{дот}} - y_0 = f'(x_0)\Delta x = dy(x_0).$$

2. Похідна й диференціал функції в точці мають такий **геометричний зміст**:

1) похідна функції f у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; f(x_0))$, тобто

$$\boxed{f'(x_0) = k_{\text{дот}} = \operatorname{tg} \alpha,}$$

де α — кут нахилу дотичної до осі Ox.

2) диференціал функції f у точці x_0 дорівнює приросту ординати дотичної у точці $M_0(x_0; f(x_0))$.

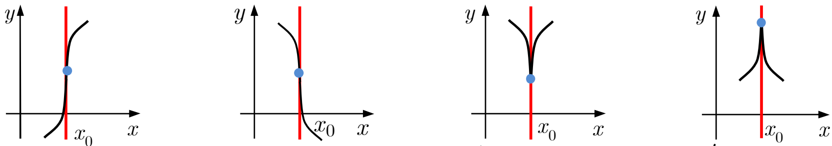
3. Перетворюючи рівняння січної до вигляду

$$\frac{y}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = x - x_0 + \frac{y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

і спрямовуючи Δx до нуля, дістаємо, що нескінченній похідній відповідає вертикальна дотична з рівнянням $x = x_0$.

Якщо в точці x_0 існують однобічні нескінченні похідні функції, то в цій точці графік функції має вертикальну дотичну (рис. 7.3) з рівнянням

$$\boxed{x = x_0.}$$



$f'_-(x_0) = +\infty$, $f'_+(x_0) = +\infty$ $f'_-(x_0) = -\infty$, $f'_+(x_0) = -\infty$ $f'_-(x_0) = -\infty$, $f'_+(x_0) = +\infty$ $f'_-(x_0) = +\infty$, $f'_+(x_0) = -\infty$

Рис. 7.3. Вертикальні дотичні до графіків функції

4. Якщо в точці x_0 не існує скінченної чи нескінченної похідної функції, то точка $M_0(x_0;y_0)$ є кутовою точкою графіка функції і в такій точці не можна провести дотичну (рис. 7.4).

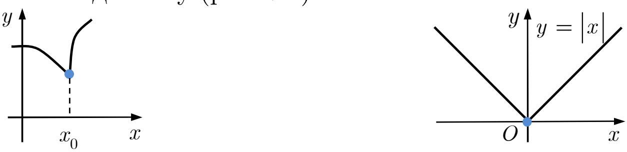


Рис. 7.4. До графіка функції у кутовій точці не можна провести дотичну

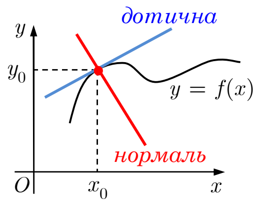


Рис. 7.5. Нормаль до кривої

5. *Нормаллю до кривої* $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0;y_0)$ називають пряму, що перпендикулярна до дотичної в цій точці (рис. 7.5).

Оскільки кутові коефіцієнти перпендикулярних прямих зв'язані співвідношенням

$$k_1 k_2 = -1 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1},$$

то

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{f'(x_0)},$$

за умови, що $k_{\text{дот}} = f'(x_0) \neq 0$.

Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_0;y_0)$ має вигляд

$$\boxed{y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).}$$

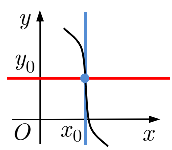


Рис. 7.6. Горизонтальна нормаль

6. Якщо дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0;f(x_0))$ є вертикальною прямою $x = x_0$, то нормаль до графіка є горизонтальною прямою (рис. 7.6)

$$\boxed{y = y_0;}$$

а в разі горизонтальної дотичної $y = y_0$ нормаль має рівняння (рис. 7.7)

$$\boxed{x = x_0.}$$

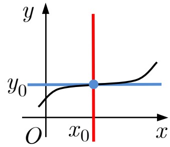


Рис. 7.7. Вертикальна нормаль

7. Швидкість прямолінійного руху. Розгляньмо матеріальну точку M, що рухається вздовж деякої прямої за законом

$$s = s(t),$$

де s — довжина шляху, який пройшла точка від початкової точки M_0; t — час. Нехай M — положення точки в момент t, а M' — у момент $t + \Delta t$ і Δs — віддаль між точками M та M' (рис. 7.8), тобто

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t).$$

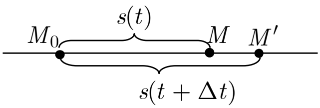


Рис. 7.8. Прямолінійний рух

Відношення

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v_{\text{сер}}$$

називають *середньою швидкістю* руху на ділянці від M до M', а границю

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$$

називають *швидкістю* (миттєвою швидкістю) руху в момент t. Отже,

$$\boxed{v(t) = \frac{ds}{dt}.}$$

Диференціал

$$ds = v\Delta t$$

дорівнює шляху, який би пройшла точка за проміжок часу Δt, починаючи з моменту t, якби рух на цій ділянці був би рівномірний зі швидкістю v. Цей шлях відрізняється від справжнього шляху Δs на нескінченно малу вищого порядку мализни, ніж Δt, коли $\Delta t \to 0$.