

§4.2. Похідна неявної функції. Параметричне завдання функції. Диференціювання функції, заданої параметрично. Похідні вищих порядків

4.2.1. Похідна неявної функції

Якщо незалежна змінна x і функція y зв'язані рівнянням виду $f(x, y) = 0$, яке не розв'язане відносно y , то y називається **неявною функцією x** .

Незважаючи на те, що рівняння $f(x, y) = 0$ не розв'язане відносно y , можна знайти похідну від y по x . Прийом для знаходження похідної в цьому випадку полягає в тому, що обидві частини рівняння $f(x, y) = 0$ диференціюємо по x з врахуванням, що y є функцією x , і із одержаного рівняння визначаємо y' .

Приклад 4.5. Знайти похідну y' функції x :

а) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$;

б) $x^y = y$.

Розв'язок.

а) $(x^3)' + (y^3)' - (3axy)' = 0'$,

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3a(x' y + x y') = 0,$$

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3ay - 3ax y' = 0,$$

$$y^2 y' - ax y' = ay - x^2,$$

$$y' (y^2 - ax) = ay - x^2,$$

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

б) $x^y = y^x$.

Прологарифмуємо обидві частини даного рівняння (за основою e), потім продиференціюємо по x , розглядаючи y як функцію x .

$$\ln x^y = \ln y^x,$$

$$y \ln x = x \ln y,$$

$$(y \ln x)'_x = (x \ln y)'_x,$$

$$y' \ln x + y(\ln x)' = x' \ln y + x(\ln y)',$$

$$y' \ln x + y \frac{1}{x} = 1 \ln y + x \frac{1}{y} y',$$

$$\frac{y'x \ln x + y}{x} = \frac{y \ln y + xy'}{y},$$

$$y' xy \ln x + y^2 = xy \ln y + x^2 y',$$

$$y' xy \ln x - x^2 = xy \ln y - y^2,$$

$$y' (xy \ln x - x^2) = xy \ln y - y^2,$$

$$y' = \frac{xy \ln y - y^2}{xy \ln x - x^2} = \frac{y(x \ln y - y)}{x(y \ln x - x)}.$$

4.2.2. Параметричне завдання функції

В геометрії часто вживається так званий параметричний спосіб задання рівняння кривої. Криву лінію можна розглядати як геометричне місце послідовних положень рухомої точки, а координати x і y цієї точки виразити в вигляді неперервної функції допоміжної змінної t , яка називається *параметром*. Плоска крива в такому випадку визначається двома рівняннями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Наприклад. Крива задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \text{ є еліпс.}$$

Похідна функції

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

що задана параметричними рівняннями, знаходяться за формулою:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Похідна другого порядку визначається за формулою:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Приклад 4.6. Знайти при $t = \frac{\pi}{4}$ похідні $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2 y}{dx^2}$ функції

$$\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$1) \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Знайдемо

$$x'_t = (\cos t + t \sin t)'_t = -\sin t + \sin t + t \cos t = t \cos t,$$

$$y'_t = (\sin t - t \cos t)'_t = \cos t - \cos t + t \sin t = t \sin t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t \sin t}{t \cos t} = \operatorname{tg} t,$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t = \frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

$$2) \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d(y')}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(\operatorname{tg} t)}{t \cos t} = \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{t \cos t} = \frac{1}{t \cos^3 t}.$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t = \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\pi}{4} \cos^3 \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\pi}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3} = \frac{1}{\frac{\pi}{4} \frac{2\sqrt{2}}{8}} = \frac{16}{\pi\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi}.$$

4.2.3. Похідні вищих порядків

Похідна y' від функції y в загальному випадку є функцією x . Якщо від цієї функції y' знайти похідну, то одержимо похідну другого порядку, або другу похідну функції $y = f(x)$, і вона позначається

$$y'' \text{ або } f''(x), \text{ або } \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Аналогічно визначаються похідні будь-якого порядку:

Похідна третього порядку:

$$(y'')' = y''' = f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3}.$$

Похідна четвертого порядку:

$$(y''')' = y^{IV} = f^{IV}(x) = \frac{d^4 y}{dx^4}.$$

Похідна n -го порядку:

$$(y^{n-1})' = y^n = f^n(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Для знаходження похідної будь-якого вищого порядку від заданої функції потрібно послідовно знаходити всі її похідні нижчих порядків.

Для добутку двох функцій можна одержати похідну будь-якого n -го порядку, користуючись формулою Лейбніца:

$$\begin{aligned} (uv)^{(n)} &= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \dots + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \dots + nu'v^{(n-1)} + uv^{(n)}. \end{aligned}$$

Приклад 4.7. $y = 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 8$. Знайти $y^{(4)}$.

Розв'язок.

$$y' = 12x^3 + 15x^2 - 8x;$$

$$y'' = (y')' = 36x^2 + 30x - 8;$$

$$y''' = (y'')' = 72x + 30;$$

$$y^{(4)} = (y''')' = 72.$$

Приклад 4.8. $y = \sin^2 x$, знайти $y^{(5)}$.

Розв'язок.

$$y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x;$$

$$y'' = (y')' = 2\cos 2x;$$

$$y^{(3)} = (y'')' = -4\sin 2x;$$

$$y^{(4)} = (y^{(3)})' = -8\cos 2x;$$

$$y^{(5)} = (y^{(4)})' = 16\sin 2x;$$

Приклад 4.9. $y = x^m$. Знайти $y^{(k)}$.

Розв'язок.

$$y' = mx^{m-1};$$

$$y'' = (y')' = m(m-1)x^{m-2};$$

$$y''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3};$$

$$y^{(4)} = m(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4};$$

.....

$$y^{(k)} = m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)x^{m-k}.$$

4.2.4. Приклади для самостійного розв'язку

Приклад 4.10. Знайти похідні від неявно заданої функції:

1) $y \ln x - x \ln y = x + y$;

2) $x \sin y - y \cos x = 0$;

3) $e^{x+y} - xy = 0$;

4) $e^{xy} - (x + 3y) = 0$;

5) $y \sin x + \cos(x - y) = \cos y$;

6) $\ln \frac{x}{y} - x + 2y = 0$;

7) $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$.

Приклад 4.11. Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2y}{dx^2}$ від функцій, що задано параметрично.

$$1) \begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}; \quad 2) \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} x = \frac{t+1}{t} \\ y = \frac{t-1}{t} \end{cases}; \quad 4) \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases};$$

$$5) \begin{cases} x = \varphi(1 - \sin \varphi) \\ y = \varphi \cos \varphi \end{cases}; \quad 6) \begin{cases} x = \frac{1+t^2}{t^2-1} \\ y = \frac{t}{t^2-1} \end{cases};$$

$$7) \begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}.$$

Приклад 4.12. Знайти похідні другого порядку від функції

$$a) y = \frac{1}{1+x^2}; \quad б) y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x;$$

$$в) y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}); \quad г) y = \sqrt{a^2 - x^2};$$

$$д) y = \sqrt{1-x^2} \arcsin x.$$

§4.3. Механічний та геометричний зміст похідної. Рівняння дотичної та нормалі до кривої

4.3.1. Механічний та геометричний зміст похідної.

Джерелом диференційного числення стали, як відомо, два питання:

- 1) про відшукування швидкості в разі довільного закону руху;
- 2) про відшукування дотичної до довільної кривої.

Обидва вони привели до однієї й тієї задачі, яку було покладено в основу диференційного числення. Ця задача полягає в тому, щоб за даною функцією $f(x)$ відшукати іншу функцію $f'(x)$, яка дістала назву похідної і являє собою швидкість зміни функції $f(x)$ щодо зміни аргументу.

У механіці відповідна задача формулюється так: знайти швидкість тіла, що рухається за законом $S = f(t)$, у деякий момент часу t . Вважаємо, що відстань S і час t — фізичні величини, які можна виміряти.

Нехай за час від t до $t + \Delta t$ тіло пройшло шлях

$$S + \Delta S = f(t + \Delta t).$$

Тоді

$$\Delta S = f(t + \Delta t) - f(t).$$

Середня швидкість тіла, що рухається вздовж деякої лінії, визначається за формулою:

$$V_{\text{сер}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Щоб знайти миттєву швидкість V такого тіла, потрібно перейти до границі відношення $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t).$$

Миттєвою швидкістю тіла, що рухається вздовж лінії $S = f(t)$, називається похідна функції $S = f(t)$ за часом t :

$$V = \frac{dS}{dt} = f'(t).$$

Приклад 4.13. Точка рухається по кубічній параболі $12y = x^3$. Яка із її координат змінюється швидше?

Розв'язок. Вважаючи в рівнянні параболи y складною функцією від часу t і диференціюючи його по t , одержуємо:

$$12 \frac{dy}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}.$$

Звідси знаходимо відношення швидкості ординати і абсциси:

$$\frac{dy}{dx} : \frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{4}.$$

При $|x| < 2$ це відношення буде менше 1, при $|x| = 2$ — дорівнює 1 і при $|x| > 2$ воно буде більше 1.

Отже:

- 1) при $-2 < x < 2$ ордината змінюється швидше абсциси;
- 2) при $x = \pm 2$ швидкість зміни абсциси і ординати однакові;
- 3) при $x < -2$ і $x > 2$ ордината змінюється швидше абсциси.

Геометричний зміст похідної

Нехай дано функцію $y = f(x)$, графік якої наведено на рис. 4.1.

Відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ дорівнює тангенсу кута β , утвореного січною, що проходить крізь точки P та Q , які мають відповідно абсциси x та $x + \Delta x$, із додатним напрямом вісі Ox .

Якщо приріст $\Delta x \rightarrow 0$, то точка Q прямує до точки P , а кут β — до кута α , утвореного дотичною

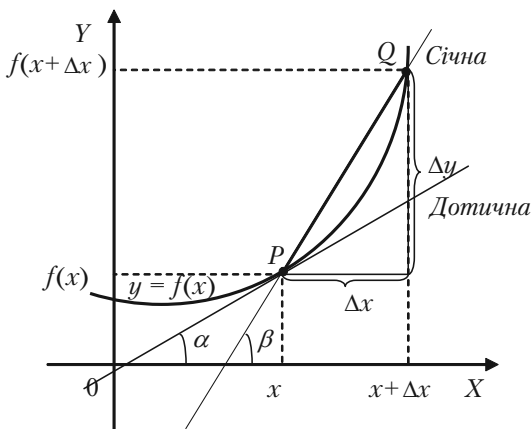


Рис. 4.1.

до розглянутої кривої в даній точці з додатним напрямом осі Ox . Отже, маємо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Значення похідної в деякій точці дорівнює тангенсу кута, утвореного дотичною до кривої в цій точці з додатним напрямком осі Ox — в цьому заключається геометричний зміст похідної.

4.3.2. Дотична та нормаль до кривої

Розглянемо рівняння кривої $y = f(x)$ (рис. 4.2).

Візьмемо на кривій точку $M_1(x_1; y_1)$ і складемо рівняння дотичної до цієї кривої в точці M_1 , припускаючи, що дотична не паралельна жодній координатній осі. Рівняння прямої, що має кутовий коефіцієнт k і проходить через точку M_1 має вигляд:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Для дотичної $k = f'(x_1)$, тому рівняння дотичної буде таке:

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).$$

Нормаллю до кривої в даній точці називається пряма, яка проходить через цю точку і перпендикулярна до дотичної в ній.

Із означення нормалі випливає, що її кутовий коефіцієнт $k_{\text{нормалі}}$ пов'язаний з кутовим коефіцієнтом $k_{\text{дотичної}}$ рівністю:

$$k_{\text{нормалі}} = -\frac{1}{k_{\text{дотичної}}},$$

тобто

$$k_{\text{нормалі}} = -\frac{1}{f'(x_1)}.$$

Отже, дістаємо рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_1(x_1; y_1)$:

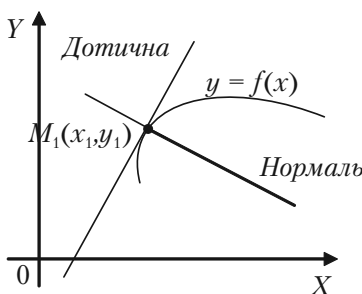


Рис. 4.2.

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1).$$

Приклад 4.14. Скласти рівняння дотичної та нормалі:

- 1) до параболи $y = x^2 - 4x$ в точці, де $x_1 = 1$;
- 2) до кривої $y = 3x^4 - 5x^2 + 4$ в точці $x_1 = -1$, $y_1 = 2$;
- 3) до кривої $4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$ в точці $M_1(-2; 3)$.

Розв'язок.

- 1) Підставимо в рівняння параболи задану абсцису точки дотику $x_1 = 1$ і знайдемо її ординату:

$$y_1 = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3.$$

Для визначення кутового коефіцієнту дотичної знайдемо похідну y' із рівняння параболи та обчислимо значення похідної в точці $x_1 = 1$.

$$y' = (x^2 - 4x)' = 2x - 4,$$

$$y'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2.$$

Підставляючи в рівняння дотичної x_1 , y_1 , $y'(1)$, одержуємо рівняння дотичної:

$$y - (-3) = -2(x - 1)$$

або

$$2x + y + 1 = 0,$$

і рівняння нормалі

$$y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

або

$$x - 2y - 7 = 0.$$

- 2) Перевіримо, чи задана точка $M_1(-1; 2)$ є точкою дотику:

$$3(-1)^4 - 5(-1)^2 + 4 = 3 - 5 + 4 = 2$$

Знаходимо кутовий коефіцієнт дотичної:

$$y' = 12x^3 - 10x,$$

$$k = y'(-1) = 12(-1)^3 - 10(-1) = -12 + 10 = -2.$$

Рівняння дотичної:

$$\begin{aligned}y - 2 &= -2(x + 1), \\ 2x + y &= 0.\end{aligned}$$

Рівняння нормалі:

$$\begin{aligned}y - 2 &= \frac{1}{2}(x + 1), \\ 2y - 4 &= x + 1, \\ x - 2y + 5 &= 0.\end{aligned}$$

3) Перевіривши, що задана точка $M_1(-2; 3)$ лежить на кривій, тобто є точкою дотику, знаходимо кутовий коефіцієнт дотичної. Рівняння кривої задане в непевному виді. Знаходимо похідну за правилом диференціювання непевної функції.

$$12x^2 - 3y^2 - 6xy y' + 12x - 5y - 5x y' - 16y y' + 9 = 0,$$

$$6xy y' + 5x y' + 16y y' = 12x^2 - 3y^2 + 12x - 5y + 9,$$

$$y' = \frac{12x^2 - 3y^2 + 12x - 5y + 9}{6xy + 5x + 16y},$$

$$y'(-2; 3) = \frac{12(-2)^2 - 3(3)^2 + 12(-2) - 5 \cdot 3 + 9}{6(-2)3 + 5(-2) + 16 \cdot 3} = -\frac{9}{2}.$$

Рівняння дотичної:

$$\begin{aligned}y - 3 &= -\frac{9}{2}(x + 2), \\ 2y - 6 &= -9x - 18, \\ 9x + 2y + 12 &= 0.\end{aligned}$$

Рівняння нормалі:

$$\begin{aligned}y - 3 &= \frac{2}{9}(x + 2), \\ 9y - 27 &= 2x + 4, \\ 2x - 9y + 31 &= 0.\end{aligned}$$

Приклад 4.15. Знайти рівняння дотичної та нормалі до кривої:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t + 3 \sin t; \\ y = \cos t + 3 \sin t. \end{cases}$$

в точці, де $t = \frac{\pi}{2}$.

Для того щоб скористатися формулами рівнянь дотичної та нормалі, необхідно визначити $x_1, y_1, y'(t)$, при $t = \frac{\pi}{2}$. Спочатку визначимо x_1 і y_1 :

$$x_1 = 2 \cos \frac{\pi}{2} + 3 \sin \frac{\pi}{2} = 3,$$

$$y_1 = \cos \frac{\pi}{2} + 3 \sin \frac{\pi}{2} = 2.$$

Після цього знаходимо y'_x похідну в точці $t = \frac{\pi}{2}$.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(\cos t + 3 \sin t)'_t}{(2 \cos t + 3 \sin t)'_t} = \frac{-\sin t + 3 \cos t}{-2 \sin t + 3 \cos t},$$

$$y'_x(t = \frac{\pi}{2}) = \frac{-\sin \frac{\pi}{2} + 3 \cos \frac{\pi}{2}}{-2 \sin \frac{\pi}{2} + 3 \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Рівняння дотичної:

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 3),$$

$$\begin{aligned} 2y - 4 &= x - 3, \\ x - 2y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Рівняння нормалі:

$$\begin{aligned} y - 2 &= 2(x - 3), \\ y - 2 &= -2x + 6, \\ 2x + y - 8 &= 0. \end{aligned}$$

4.3.3. Задачі для самостійного розв'язку

Задача 4.16. Знайти рівняння дотичних і нормалей до заданих кривих в указаних точках і побудувати криві, дотичні та нормалі:

а) до параболи $y = 4 - x^2$ в точці, де $x_1 = -1$;

б) до гіперболи $y^2 - 2x^2 = 1$ в точках, де $x_1 = 2$;

в) до еліпса
$$\begin{cases} x = 2\sqrt{3} \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$
 в точці, де $t = \frac{\pi}{6}$.

Задача 4.17. На колі $x^2 + y^2 = 25$ знайти точки дотику, де дотична паралельна прямій $3x + 4y - 12 = 0$. скласти рівняння дотичних. Побудувати коло, пряму та дотичні.