

Пример 4. Побудувати фазові траєкторії для лінійної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 5y - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 5y - 8 = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 1 \end{cases} \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x' + 3y' \\ \frac{dy}{dt} = 3x' + 5y' \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda & 3 \\ 3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = -(3 + \lambda)(5 - \lambda) - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 24 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 6; -4$$

Точка $O_1(1;1)$ – особлива точка типу сідло.

$$y' = k_1 x' \quad y' = k_2 x' \quad \frac{dy'}{dx'} = k$$

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{3x' + 5y'}{-3x' + 3y'} = \frac{3x' + 5kx'}{-3x' + 3kx'} = \frac{3 + 5k}{-3 + 3k} = k$$

$$3 + 5k = -3k + 3k^2 \Rightarrow 3k^2 - 8k - 3 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 3; -\frac{1}{3}$$

$$\text{Рівняння прямих } y' = 3x' \qquad y' = -\frac{1}{3}x'$$

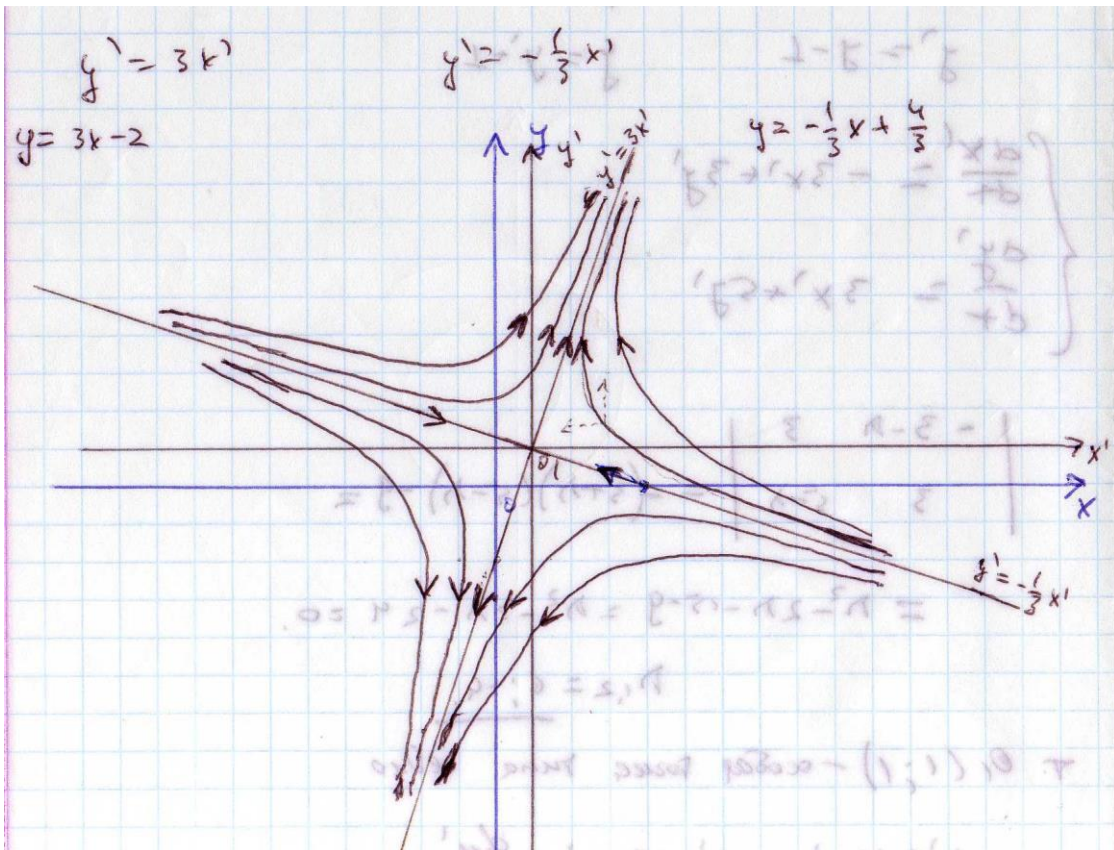
Запишемо рівняння прямих в початковій системі координат

$$y = 3x - 2 \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

Розглянемо напрям вектору фазової швидкості в точці $(1;0)$

$$\frac{dx'}{dt} = -3 < 0$$

$$\frac{dy'}{dt} = 3 > 0$$



Приклад 5. Побудувати фазові траєкторії для лінійної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y - 2 \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 5y + 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - y - 2 = 0 \\ 5x + 5y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + 2 \end{cases} \begin{cases} x = x' \\ y = y' - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x' - y' \\ \frac{dy}{dt} = 5x' + 5y' \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 5 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(5 - \lambda) + 5 = \lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$$

Точка $O_1(0;-2)$ – особлива точка типу нестійкий фокус. Визначимо компоненти фазової швидкості в точці $(1;0)$

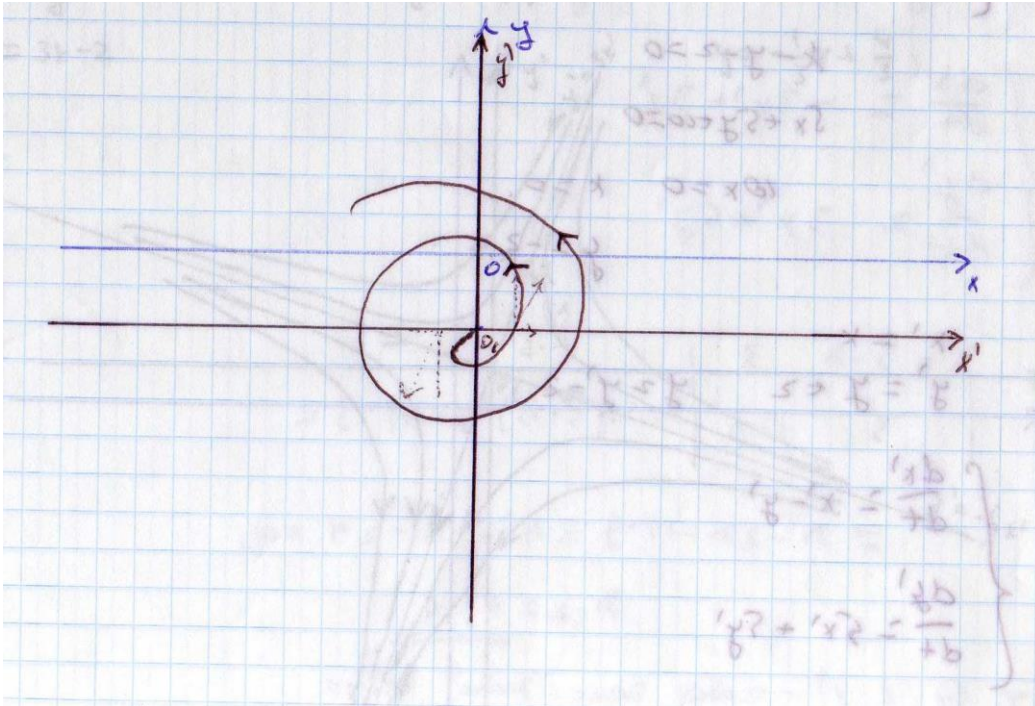
$$\frac{dx'}{dt} = 1 > 0$$

$$\frac{dy'}{dt} = 5 > 0$$

В точці $(-1;0)$

$$\frac{dx'}{dt} = -1 < 0$$

$$\frac{dy'}{dt} = -5 < 0$$



Приклад 6. Побудувати фазові траєкторії для лінійної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -9y - 9 \\ \frac{dy}{dt} = -9x + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y - 9 = 0 \\ -9x + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 1 \end{cases} \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 9y' \\ \frac{dy}{dt} = -9x' \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 9 \\ -9 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 81\lambda = 0$$

$$\lambda^2 = -81 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 9i$$

Точка $O_1(1;1)$ – особлива точка типу центр. Визначимо компоненти фазової швидкості в точці $(1;0)$

$$\frac{dx'}{dt} = 0$$

$$\frac{dy'}{dt} = -9 < 0$$

/