

Логарифмічне диференціювання

Знайти похідні наступних показниково-степеневих функцій.

1. $y = (\cos x)^{\sin x}$.

Перший спосіб:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln(\cos x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln(\cos x) + \\ + \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \cos x \cdot \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

$$y' = \left(\cos x \cdot \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right) \cdot y = \\ = \left(\cos x \cdot \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right) \cdot (\cos x)^{\sin x} = \\ = \ln(\cos x) \cdot (\cos x)^{\sin x + 1} - \sin^2 x \cdot (\cos x)^{\sin x - 1}.$$

Другий спосіб:

$$y' = \ln(\cos x) \cdot (\cos x)^{\sin x} \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)^{\sin x - 1} \times \\ \times (-\sin x) = \ln(\cos x) \cdot (\cos x)^{\sin x + 1} - \sin^2 x \times \\ \times (\cos x)^{\sin x - 1}.$$

Похідні функцій, заданих неявно та параметрично.

Знайти похідну y'_x функцій, заданих у неявній формі.

1. $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.

Розв'язання. Диференціюємо рівність по змінній x , вважаючи $y=y(x)$.

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - 2x \cdot e^y - x^2 e^y \cdot y' = 0 .$$

$$3x^2 y + y' - 2xy \cdot e^y - x^2 e^y y \cdot y' = 0$$

Звідси знаходимо y' :

$$y'(1 - x^2 y e^y) = 2xy e^y - 3x^2 y .$$

$$y' = \frac{(2xy e^y - 3x^2 y)}{1 - x^2 y e^y} .$$

Отримали похідну $y' = y'_x = \frac{dy}{dx}$, виражену через змінні

x та y .

2. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Розв'язання. $3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0$.

$$3(y^2 - x)y' = 3(y - x^2) .$$

$$y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}.$$

$$3. x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 - 5x^2 + 15y^2 - 100 = 0.$$

Розв'язання.

$$4x^3 - 12xy^2 - 12x^2y \cdot y' + 36y^3y' - 10x + 30y \cdot y' = 0.$$

$$4x^3 - 12xy^2 - 10x = (12x^2y - 36y^3 - 30y) \cdot y'.$$

$$y' = \frac{2x(2x^2 - 6y^2 - 5)}{6y(2x^2 - 6y^2 - 5)} = \frac{x}{3y}.$$

$$4. x^2 \sin y + y^2 \cos x - 2x - 3y + 1 = 0.$$

Розв'язання.

$$2x \sin y + x^2 \cos y \cdot y' + 2y \cdot y' \cos x - \\ - y^2 \sin x - 2 - 3y' = 0.$$

$$(x^2 \cos y + 2y \cos x - 3)y' = 2 + y^2 \sin x - 2x \sin y.$$

$$y' = \frac{2 + y^2 \sin x - 2x \sin y}{x^2 \cos y + 2y \cos x - 3}.$$

5. Знайти значення y'_x у точці з координатами $x=y=1$, якщо $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо значення y'_x . Диференціюємо задану рівність по x :

$$3x^2 - 4xy^2 - 4x^2y \cdot y' + 5 + y' = 0.$$

$$3x^2 - 4xy^2 + 5 = (4x^2y - 1)y',$$

$$y' = \frac{3x^2 - 4xy^2 + 5}{4x^2y - 1}.$$

$$\text{При } x=y=1 \text{ отримуємо } y' = \frac{4}{3}.$$

Знайти похідну y'_x функцій, заданих у параметричній формі.

$$\text{Нехай } \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ t \in [\alpha; \beta]. \end{cases} \quad \text{— функція, задана у параметричній формі.}$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

$$1. \begin{cases} x = e^{-t} \sin t, \\ y = e^t \cos t, \\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\text{Розв'язання. } x'_t = -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t = e^{-t} (\cos t - \sin t),$$

$$y'_t = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t).$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t (\cos t - \sin t)}{e^{-t} (\cos t - \sin t)} = e^{2t}.$$

$$2. \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1-t^2), \\ t \in (-1; 1). \end{cases}$$

Розв'язання. $x'_t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, y'_t = -\frac{2t}{1-t^2},$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{2t}{1-t^2} \cdot \sqrt{1-t^2} = -\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

3. Знайти похідну y'_x функції $\begin{cases} x = t \ln t, \\ y = \frac{\ln t}{t}. \end{cases}$ у точці $t=1$.

Розв'язання. Знайдемо похідну $y'_x(t) = \frac{y'_t}{x'_t}$. $x'_t = \ln t + 1,$

$$y'_t = \left(\frac{\ln t}{t} \right)' = \frac{1 - \ln t}{t^2}. \quad y'_x = \frac{1 - \ln t}{t^2} \cdot \frac{1}{\ln t + 1}. \text{ При } t=1 \text{ отримаємо:}$$

$$y'_t|_{t=1} = 1.$$

Домашнє завдання:

Обчислити похідні y'_x .

1. $x^4 + y^4 = x^2 y^2$. Відповідь: $y'_x = \frac{x(y^2 - 2x^2)}{y(2y^2 - x^2)}.$

2. $y^2 \cos x = \sin 3x$. Відповідь: $y'_x = \frac{3 \cos 3x + y^2 \sin x}{2y \cos x}$.

3. $y^2 - 2xy + 4 = 0$. Відповідь: $y'_x = \frac{y}{y - x}$.

4. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$ Відповідь: $y'_x = \frac{3t^2 - 1}{2t}$.

5. $\begin{cases} x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \frac{1}{t^2-1}. \end{cases}$ Відповідь: $y'_x = \frac{t^2 + 1}{t(2 + 3t - t^3)}$.

6. $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t. \end{cases}$ Відповідь: $y'_x = -\frac{3}{2} \operatorname{tg} t$.

7. Знайти y'_x у точці $t = 0$, якщо $\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3. \end{cases}$

Відповідь: $y'_x = 0$.

Практичне заняття на тему: «Похідні вищих порядків»

Знайти похідні другого порядку від наступних функцій.

1. $y = \operatorname{arctg}(x^2)$.

Розв'язання. $y' = \frac{2x}{1+x^4}$,

$$y'' = (y')' = \frac{2(1+x^4) - 2x \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}.$$

$$2. y = \log_2 \sqrt[3]{1-x^2}.$$

Розв'язання. $y = \log_2 \sqrt[3]{1-x^2} = \frac{1}{3} \log_2 (1-x^2) = \frac{1}{3 \ln 2} \ln (1-x^2).$

$$y' = \frac{1}{3 \ln 2} \cdot \frac{(-2x)}{1-x^2},$$

$$y'' = -\frac{2}{3 \ln 2} \cdot \frac{1-x^2 - x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = -\frac{2}{3 \ln 2} \cdot \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

$$3. y = e^{-x^2}.$$

Розв'язання. $y' = -2xe^{-x^2},$

$$y'' = -2e^{-x^2} - 2x \cdot (-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2} (-2 + 4x^2) = 2e^{-x^2} (2x^2 - 1).$$

$$4. y = x^{\sqrt{x}}.$$

Розв'язання. $\ln y = \sqrt{x} \cdot \ln x.$

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = (\sqrt{x} \cdot \ln x)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (2 + \ln x).$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} (2 + \ln x) x^{\sqrt{x}},$$

$$\begin{aligned}
y'' &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)' (2 + \ln x) x^{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} (2 + \ln x)' x^{\sqrt{x}} + \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{x}} (2 + \ln x) (x^{\sqrt{x}})' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{3}{2}} (2 + \ln x) x^{\sqrt{x}} + \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x} \cdot x^{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} (2 + \ln x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} (2 + \ln x) x^{\sqrt{x}} = \\
&= \frac{x^{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{2} (2 + \ln x) \right) + \frac{(2 + \ln x)^2}{4x} x^{\sqrt{x}} = \\
&= \frac{x^{\sqrt{x}-1}}{2} \left(\frac{-\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{(2 + \ln x)^2}{2} \right).
\end{aligned}$$

4. Знайти $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, якщо $y(x) = e^{2x} \sin 3x$.

Розв'язання. Знайдемо $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$.

$$y'(x) = 2e^{2x} \sin 3x + 3e^{2x} \cos 3x = e^{2x} (2 \sin 3x + 3 \cos 3x).$$

$$\begin{aligned}
y''(x) &= 2e^{2x} (2 \sin 3x + 3 \cos 3x) + e^{2x} (6 \cos 3x - 9 \sin 3x) = \\
&= e^{2x} (-5 \sin 3x + 12 \cos 3x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y''' &= 2e^{2x} (-5 \sin 3x + 12 \cos 3x) + e^{2x} (-15 \cos 3x - 36 \sin 3x) = \\
&= e^{2x} (-46 \sin 3x + 9 \cos 3x).
\end{aligned}$$

Підставивши у отримані вирази для похідних $x = 0$, знаходимо:

$$y'(0) = 3, y''(0) = 12, y'''(0) = 9.$$

5. Знайти $y^{(4)}(1)$, якщо $y = x^3 \ln x$.

Розв'язання. Знайдемо перші чотири похідні від заданої функції. Отримуємо:

$$y' = 3x^2 \ln x + x^2, \quad y'' = 6x \ln x + 3x + 2x = 6x \ln x + 5x, \\ y''' = 6 \ln x + 6 + 5 = 6 \ln x + 11, \quad y^{(4)} = \frac{6}{x}. \quad y^{(4)}(1) = 6.$$

Формули для похідних n -го порядку деяких елементарних функцій.

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1)x^{m-n}. \quad (1)$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a. \quad (2)$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x. \quad (3)$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \quad (4)$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \quad (5)$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}. \quad (6)$$

Формула Лейбніца

$$\begin{aligned}
(u \cdot v)^{(n)} &= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \dots \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \dots + uv^{(n)} = \\
&= \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.
\end{aligned} \tag{7}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0! = 1.$$

6. Знайти $y^{(50)}(x)$, якщо $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

Розв'язання. Розкладемо задану дробову функцію на елементарні дробби.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-1) - (x-2)}{(x-1)(x-2)} = \\
&= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.
\end{aligned}$$

За формулою (1) отримуємо:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x}\right)^{(50)} &= (x^{-1})^{(50)} = (-1)(-2)\dots(-50) \cdot x^{-51} = \frac{(-1)^{50} 50!}{x^{51}} = \\
&= \frac{50!}{x^{51}}.
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(50)} = \frac{50!}{(x-2)^{51}}, \quad \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(50)} = \frac{50!}{(x-1)^{51}}.$$

$$y^{(50)} = 50! \left(\frac{1}{(x-2)^{51}} - \frac{1}{(x-1)^{51}} \right).$$

Знайти n -і похідні наступних функцій

7. $y = \frac{1}{2x+1}.$

Розв'язання. З формули (1) випливає, що при $y = \frac{1}{x}$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

Тоді $\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n! \cdot 2^n}{(2x+1)^{n+1}}.$

8. $y = x^n \sqrt{x}.$

Розв'язання. $y = x^n \sqrt{x} = x^{n+\frac{1}{2}}.$ За формулою (1)

отримуємо при $m = n + \frac{1}{2} :$

$$\left(x^{n+\frac{1}{2}}\right)^{(n)} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\dots\left(n+\frac{1}{2}-n+1\right) \times \\ \times x^{\frac{1}{2}} = \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\dots 5 \cdot 3}{\sqrt{x}}.$$

$$9. y = 5 - 3\cos^2 x.$$

$$\text{Розв'язання. } y = 5 - 3\cos^2 x = 5 - \frac{3}{2}(1 + \cos 2x).$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \quad (\cos 2x)^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$$y^{(n)} = -\frac{3}{2} \cdot 2^n \cdot \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$$10. y = 2^x + 2^{-x}.$$

Розв'язання. Використаємо формулу (2):

$$(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x.$$

$$y^{(n)} = (\ln 2)^n (2^x + (-1)^n 2^{-x}).$$

Застосувавши формулу Лейбніца, знайти похідні n -го порядку від вказаних функцій при заданому n .

$$11. y = (x^2 + x + 1)\sin x, \quad n = 15.$$

Розв'язання. Застосуємо формулу Лейбніца:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Виберемо $v = x^2 + x + 1$, $u = \sin x$. Тоді $v' = 2x + 1$, $v'' = 2$,

$$v''' = \dots = v^{(15)} = 0.$$

За формулою Лейбніца маємо:

$$y^{(15)} = C_{15}^0 (\sin x)^{(15)} (x^2 + x + 1) + C_{15}^1 (\sin x)^{(14)} (2x + 1) + \\ + C_{15}^2 (\sin x)^{(13)} \cdot 2.$$

$$C_{15}^0 = \frac{15!}{0! \cdot 15!} = 1, C_{15}^1 = 15, C_{15}^2 = \frac{15!}{2! \cdot 13!} = \frac{14 \cdot 15}{2} = 105.$$

$$(\sin x)^{(13)} = \sin \left(x + \frac{13\pi}{2} \right) = \sin \left(x + 6\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \\ = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos x.$$

$$(\sin x)^{(14)} = (\cos x)' = -\sin x, \quad (\sin x)^{(15)} = (-\sin x)' = -\cos x.$$

Підставивши знайдені похідні та коефіцієнти у формулу Лейбніца, отримуємо:

$$y^{(15)} = -\cos x \cdot (x^2 + x + 1) + 15 \cdot (-\sin x)(2x + 1) + \\ + 105 \cdot \cos x \cdot 2 = -(x^2 + x + 1)\cos x - 15(2x + 1)\sin x + \\ + 210\cos x.$$

12. $y = (x^2 - x)e^{-x}$, $n = 20$

Розв'язання. $u = e^{-x}$, $v = x^2 - x$, $v' = 2x - 1$, $v'' = 2$,

$$(e^{-x})^{(n)} = (-1)^n e^{-x}.$$

Застосуємо формулу Лейбніца.

$$\begin{aligned} y^{(20)} &= C_{20}^0 \cdot u^{(20)}v + C_{20}^1 \cdot u^{(19)}v' + C_{20}^2 \cdot u^{(18)}v'' = \\ &= e^{-x}(x^2 - x) - 20 \cdot e^{-x}(2x - 1) + 190 \cdot e^{-x} \cdot 2 = \\ &= e^{-x}(x^2 - 41x + 400). \end{aligned}$$

13. $y = x \ln x$, $n = 10$.

Розв'язання. $u = \ln x$, $v = x$, $v' = 1$, $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

$$(\ln x)^{(10)} = -\frac{9!}{x^{10}}, \quad (\ln x)^{(9)} = \frac{8!}{x^9}.$$

$$\begin{aligned} y^{(10)} &= C_{10}^0 \cdot u^{(10)}v + C_{10}^1 \cdot u^{(9)}v' = -\frac{9!}{x^9} + 10 \cdot \frac{8!}{x^9} = \\ &= \frac{8!}{x^9}. \end{aligned}$$

14. Знайти другу похідну y''_x функції $y(x)$, заданої у неявному вигляді:

$$x^3 + y^3 + 3x^2 + 2y = 0.$$

Розв'язання. Продиференціюємо цю рівність з врахуванням того, що $y = y(x)$. Отримаємо:

$$3x^2 + 3y^2 y' + 6x + 2y' = 0.$$

$$\text{Звідси визначимо } y' = -3 \cdot \frac{x^2 + 2x}{3y^2 + 2}.$$

Звідси визначаємо другу похідну, диференціюючи останню рівність:

$$\begin{aligned} y'' &= -3 \cdot \frac{(2x+2)(3y^2+2) - (x^2+2x) \cdot 6y \cdot y'}{(3y^2+2)^2} = \\ &= -6 \cdot \frac{(x+1)(3y^2+2) - 3y(x^2+2x) \cdot \left(\frac{-3(x^2+2x)}{3y^2+2} \right)}{(3y^2+2)^2} = \\ &= -6 \cdot \frac{(x+1)(3y^2+2)^2 + 9y(x^2+2x)^2}{(3y^2+2)^3}. \end{aligned}$$

Знайти похідні другого порядку від функцій, заданих параметрично.

$$15. \ x = \ln t, \ y = t^3, \ t \in (0; +\infty).$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку першу похідну

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2}{1/t} = 3t^3.$$

$$y''_x = (y'_x)_t : x'_t = 9t^2 : \frac{1}{t} = 9t^3.$$

$$16. x = \arctgt, \quad y = \ln(1+t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Розв'язання.

$$x'_t = \frac{1}{1+t^2}, \quad y'_t = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t}{1+t^2} : \frac{1}{1+t^2} = 2t.$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{2}{1/(1+t^2)} = 2(1+t^2).$$

$$17. x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t.$$

$$\text{Розв'язання. } x'_t = 3a \cos^2 t \cdot (-\sin t),$$

$$y'_t = 3a \sin^2 t \cdot \cos t, \quad y'_x = \frac{3a \sin^2 t \cdot \cos t}{-3a \cos^2 t \cdot \sin t} = -\operatorname{tg} t.$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = -\frac{1}{\cos^2 t \cdot (-3a \cos^2 t \sin t)} = \frac{1}{3a \sin t \cos^4 t}.$$

Домашнє завдання

1. Знайти похідну другого порядку функції $y = \sqrt{1+x^2}$.

Відповідь: $y'' = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$

2. Знайти похідну третього порядку функції $f(x) = x^2 \ln x$

Відповідь: $f'''(x) = \frac{2}{x}.$

3. Знайти похідну другого порядку від функції

$$y = x \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \sqrt{x^2 + a^2}.$$

Відповідь: $y'' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$

4. Знайти похідну n -го порядку від функції $y = \frac{ax+b}{cx+d}.$

Відповідь: $y^{(n)} = \frac{n! \cdot (ad - bc) \cdot (-c)^{n-1}}{(cx + d)^{n+1}}.$

5. Знайти похідну n -го порядку $\frac{d^n y}{dx^n}$ функції, заданої у

параметричній формі:
$$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \frac{1}{t}. \end{cases}$$

Відповідь: $\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \cdot \frac{1}{t}.$

6. Знайти $y^{(100)}(x)$, якщо $y(x) = x \cdot \operatorname{sh} x$.

Відповідь: $y^{(100)}(x) = x \cdot \operatorname{sh} x + 100 \operatorname{ch} x$.

7. Використовуючи формулу Лейбніца, знайти п'яту похідну від функції $y = x^5 e^{\frac{x}{2}}$.

Відповідь:

$$y^{(5)}(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{x^5}{32} + \frac{25x^4}{16} + 25x^3 + 150x^2 + 300x + 120 \right).$$

Рівняння дотичної та нормалі до графіка функції

Геометричний зміст похідної функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ полягає у тому, що значення $f'(x_0)$ дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка цієї функції, проведеної у точці з абсцисою $x = x_0$, до додатного напрямку осі Ox , тобто кутовому коефіцієнту цієї дотичної. При цьому рівняння дотичної до графіка $y = f(x)$ у точці $P_0(x_0; f(x_0))$ має вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (1)$$

Нормалю до кривої називають пряму, що проходить перпендикулярно дотичній через точку дотику. Рівняння нормалі має вигляд:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (2)$$

Задача 10. Записати рівняння дотичної та нормалі до параболи $y = x^2 - 3x + 1$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

Розв'язання. Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x = x_0$ має вигляд (1):

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Маємо $x_0 = 2$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1$,
 $f'(x) = 2x - 3$, $f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$. Отже, за формулою (1),
отримуємо рівняння дотичної:

$$y + 1 = x - 2 \quad \text{або} \quad y = x - 3.$$

Рівняння нормалі у точці з абсцисою $x = x_0$ має вигляд (2):

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Отже, отримуємо: $y + 1 = -(x - 2)$ або $y = 1 - x$.

Задача 11. Обчислити довжину відрізка дотичної до кривої $y = e^x$ від точки дотику з абсцисою $x = 0$ до точки її перетину з віссю Ox .

Розв'язання. Знайдемо ординату точки дотику: $f(0) = e^0 = 1$. Оскільки $y'(x) = e^x$, $y'(0) = 1$, то рівняння дотичної набуває вигляду: $y - 1 = x$ або $y = x + 1$. У точці перетину дотичної з віссю Ox $y = 0$, тобто $x + 1 = 0$, $x = -1$. Точка A дотику має координати $(0; 1)$, координати точки B перетину дотичної з віссю Ox $(-1; 0)$. Довжина відрізка AB дорівнює:

$$AB = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{2}.$$

Задача 12. У якій точці дотична до кривої $y = \ln x$ паралельна прямій $y = x + 1$?

Розв'язання. Нехай ця точка має координати $(x_0; y_0)$. Тоді кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює значенню похідної у точці дотику, тобто $k = f'(x_0)$, $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$. Оскільки дотична паралельна прямій

$y = x + 1$, кутовий коефіцієнт якої дорівнює 1, то

$$f'(x_0) = \frac{1}{x_0} = 1. \text{ Звідси } x_0 = 1, y_0 = f(x_0) = \ln 1 = 0.$$

Отже, шуканою точкою є $(1; 0)$.

Задача 13. Під яким кутом перетинаються параболи $y = x^2$ та $x = y^2$?

Розв'язання. Дві прямі з кутовими коефіцієнтами k_1 та k_2 перетинаються під кутом, що визначається з рівності

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

Кут між двома кривими визначають як кут між дотичними до цих кривих, проведеними у точці перетину кривих. Знайдемо координати точки перетину кривих $y = x^2$ та $x = y^2$. Для цього розв'яжемо систему

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2. \end{cases}$$

З неї отримуємо рівняння $x = x^4$, звідки знаходимо абсциси точок перетину $x_1 = 1$ та $x_2 = 0$. У точці з абсцисою $x_1 = 1$ ордината точки перетину $y_1 = x_1^2 = 1$.

Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до кривих $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$ у цій точці. Маємо $k_1 = (x^2)' \Big|_{x=1} = 2x \Big|_{x=1} = 2$,

$k_2 = (\sqrt{x})' \Big|_{x=1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$. Підставивши ці значення у вираз

для $\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$, знаходимо:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.$$

Отже, $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$.

У початку координат дотичною до параболи $y = x^2$ є вісь абсцис, до параболи $y = \sqrt{x}$ – вісь ординат, між якими маємо прямий кут.

Задача 14. Знайти абсцису точки, у якій дотичні до графіків функцій $y = x^2$ та $y = x^3$ є паралельними.

Розв'язання. $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$. Оскільки дотичні до графіків у шуканій точці є паралельними, то їх кутові

коефіцієнти у цій точці рівні. Маємо $2x = 3x^2$, звідки знаходимо $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

Задача 15. Крива задана рівнянням $y = x^2 + 5x + 3$. Визначити кут між дотичними до кривої у точках з абсцисами $x_1 = -2$ та $x_2 = 0$.

Розв'язання. Похідна $y' = 2x + 5$. У точці з абсцисою $x_1 = -2$ кутовий коефіцієнт дотичної $k_1 = 2 \cdot (-2) + 5 = 1$, у точці з абсцисою $x_2 = 0$ $k_2 = 2 \cdot 0 + 5 = 5$. Тангенс кута між дотичними

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}.$$

Підставивши сюди значення кутових коефіцієнтів між дотичними, отримуємо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5 - 1}{1 + 5 \cdot 1} = \frac{2}{3}$. Отже, кут

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2}{3}.$$

Задача 16. На кривій $y = x^3 - 3x + 5$ знайти точки, у яких дотична: 1) паралельна до прямої $y = -2x$; 2) перпендикулярна до прямої $y = -\frac{x}{9}$; 3) утворює з додатним напрямом осі Ox кут 45° .

Розв'язання. У точці дотику кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює похідній $y' = 3x^2 - 3$, обчислений у цій точці.

1) З умови паралельності маємо $3x^2 - 3 = -2$, звідси $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2) З умови перпендикулярності прямих (добуток їх кутових коефіцієнтів дорівнює -1) знаходимо: $3x^2 - 3 = 9$, звідки $x_1 = -2, x_2 = 2$.

3) Оскільки $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, то отримуємо рівність:

$$3x^2 - 3 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Домашнє завдання

1. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^3 - 3x + 2$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

Відповідь: $y = 9x - 14, y = -\frac{1}{9}x + \frac{38}{9}$.

2. Записати рівняння дотичних та нормалей до кривої $y = x^4 + 3x^2 - 16$ у точках її перетину з параболою $y = 3x^2$.

Відповідь: рівняння дотичних мають вигляд:
 $y - 12 = -44(x + 2), y - 12 = 44(x - 2),$ рівняння нормалей
 $y - 12 = \frac{1}{44}(x + 2), y - 12 = -\frac{1}{44}(x - 2).$

3. Знайти кути між кривими $y = 4 - x$ та $y = 4 - \frac{x^2}{2}$ у точках їх перетину.

Відповідь: $\alpha_1 = 45^\circ, \alpha_2 = \arctg \frac{1}{3}.$