

Формула Тейлора

Формулу Тейлора використовують для наближення функції за допомогою многочлена. Вона має вигляд:

$$\begin{aligned} f(x) = P_n(x) + R_n(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \\ &+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x). \end{aligned} \quad (1)$$

Формула (1) – **формула Тейлора** для функції $f(x)$ у околі точки $x = a$.

Многочлен

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad (2)$$

називають **многочленом Тейлора**. Вираз $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ називають **залишковим членом формули Тейлора**. Для значень x , при яких залишковий член є достатньо малим, многочлен $P_n(x)$ є наближенням

функції $f(x)$. Формула (1) дає можливість замінити функцію $f(x)$ многочленом Тейлора $P_n(x)$ з точністю, що дорівнює значенню залишкового члена $R_n(x)$.

Залишковий член формули Тейлора $R_n(x)$ можна представити у вигляді:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (3)$$

де точка ξ знаходиться між точками x та a .

Формулу (3) для залишкового члена формули Тейлора називають *залишковим членом у формі Лагранжа*.

При $x \rightarrow a$ $R_n(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $(x-a)^n$, тому можна записати, що

$$R_n(x) = o((x-a)^n). \quad (4)$$

Такий запис залишкового члена формули Тейлора називають *залишковим членом у формі Пеано*.

Формулу Тейлора (1) при $a = 0$ називають **формулою Маклорена**. Формула Маклорена для функції $f(x)$ має вигляд:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x), \quad (5)$$

де $R_n(x)$ визначається за формулою:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}. \quad (6)$$

У формулі (6) точка ξ знаходиться між точками 0 та x , тобто $\xi = \theta x$, де $0 < \theta < 1$.

Формула (6) визначає залишковий член формули Маклорена у формі Лагранжа.

Залишковий член у формі Пеано:

$$R_n(x) = o(x^n). \quad (7)$$

Формула (4.17) означає, що при заміні функції $f(x)$ многочленом Тейлора у околі точки $x = 0$ похибка є нескінченно малою величиною більш високого порядку, ніж $|x^n|$.

Наведемо формулу Маклорена для наближення деяких основних елементарних функцій.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n). \quad (8)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n}). \quad (9)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}). \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n). \end{aligned} \quad (11)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n). \quad (12)$$

Приклад 1. Написати розвинення за цілими невід'ємними степенями $x-1$ до члена 5-го порядку для функції $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

Розв'язання. Функція визначена у околі точки $a=1$ і має у околі цієї точки похідні будь-якого порядку. Обчислимо значення функції та її похідних до 5-го порядку включно у цій точці.

$$f(1) = \frac{1}{1-2} = -1, \quad f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}, \quad f'(1) = -\frac{1}{(1-2)^2} = -1, \quad f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}, \quad f''(1) = \frac{2}{(1-2)^3} = -2,$$

$$f'''(x) = -\frac{2 \cdot 3}{(x-2)^4} = -\frac{6}{(x-2)^4}, \quad f'''(1) = -\frac{6}{(1-2)^4} = -6, \quad f^{(4)}(x) = \frac{6 \cdot 4}{(x-2)^5} = \frac{24}{(x-2)^5},$$

$$f^{(4)}(1) = \frac{24}{(1-2)^5} = -24, \quad f^{(5)}(x) = -\frac{24 \cdot 5}{(x-2)^6} = -\frac{120}{(x-2)^6}, \quad f^{(5)}(1) = -\frac{120}{(1-2)^6} = -120.$$

За формулою (1) отримуємо:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \\ &+ \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{f^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5 + o((x-1)^5) = -1 - (x-1) - \\ &- \frac{2}{2!}(x-1)^2 - \frac{6}{3!}(x-1)^3 - \frac{24}{4!}(x-1)^4 - \frac{120}{5!}(x-1)^5 + o((x-1)^5) = \\ &= -1 - (x-1) - (x-1)^2 - (x-1)^3 - (x-1)^4 - (x-1)^5 + o((x-1)^5). \end{aligned}$$

Приклад 2. Написати розвинення за цілими невід'ємними степенями змінної x до члена вказаного порядку включно для наступних функцій

а) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ до x^5 ;

б) $f(x) = \cos(2x^2)$ до x^8 ;

$$\text{в) } f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+16x^2}} \text{ до } x^4;$$

$$\text{г) } f(x) = e^{2x-x^2} \text{ до члена з } x^5;$$

$$\text{д) } f(x) = \ln \frac{\sin x}{x} \text{ до члена з } x^6.$$

Розв'язання. а) Застосуємо стандартний розклад за формулою Маклорена (9) функції $\sin x$, підставивши туди замість x $\frac{x}{2}$. Отримуємо:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n}).$$

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{5!} + o(x^5) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^5}{3840} + o(x^5).$$

б) Застосуємо формулу Маклорена (10) для функції $\cos x$, підставивши туди замість x $2x^2$. Отримуємо:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$\cos(2x^2) = 1 - \frac{(2x^2)^2}{2!} + \frac{(2x^2)^4}{4!} + o(x^8) = 1 - 2x^4 + \frac{2x^8}{3} + o(x^8).$$

в) Застосуємо формулу Маклорена (11) для функції $(1+x)^\alpha$, $\alpha = -\frac{1}{4}$, підставивши туди замість x

$16x^2$:

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

$$f(x) = (1 + 16x^2)^{-\frac{1}{4}} = 1 + \frac{-\frac{1}{4} \cdot 16x^2}{1!} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4} - 1\right)(16x^2)^2}{2!} + o(x^4) = 1 - 4x^2 + 40x^4 + o(x^4).$$

г) Застосовуємо стандартне розвинення (8)

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n).$$

Для функції $f(x) = e^{2x-x^2}$ маємо $t = 2x - x^2$, $n = 5$, тому

$$e^{2x-x^2} = 1 + \frac{2x-x^2}{1!} + \frac{(2x-x^2)^2}{2!} + \frac{(2x-x^2)^3}{3!} + \frac{(2x-x^2)^4}{4!} + \frac{(2x-x^2)^5}{5!} + o(2x-x^2)^5.$$

Маючи на увазі властивості функцій $o(\beta)$, де $\beta(x)$ нескінченно мала функція, отримаємо $o(2x-x^2)^5 = o(x^5)$, а для многочленів $p_n(x)$ степеня $n > 5$ сума $p_n(x) + o(x^5) = o(x^5)$. Тому розкриваємо дужки, враховуючи тільки доданки зі степенями, що не перевищують 5. Одержимо:

$$e^{2x-x^2} = 1 + (2x - x^2) + \frac{1}{2}(4x^2 - 4x^3 + x^4) + \frac{1}{6}(8x^3 - 12x^4 + 6x^5 + \dots) + \frac{1}{24}(16x^4 - 32x^5 + \dots) + \\ + \frac{1}{120}(32x^5 + \dots) + o(x^5) = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5).$$

д) Для розвинення функції $\ln \frac{\sin x}{x}$ до члена з x^6 застосуємо другий спосіб, в якому застосовуються розвинення функцій із таблиці розвинень елементарних функцій за формулою Маклорена з залишковим членом у формі Пеано. У даному випадку – це два розвинення

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m}),$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + o(t^n).$$

$$\ln \frac{\sin x}{x} = \ln \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)}{x} = \ln \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + o(x^6) \right).$$

В розвиненні $\ln(1+t)$ покладемо $t = -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + o(x^6)$, а найвищу степінь розвинення $\ln(1+t)$ візьмемо

$n = 3$, щоб після піднесення до цього степеня мати найменший степінь x^6 , тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \ln \frac{\sin x}{x} &= -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + o(x^7) - \frac{\left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + o(x^7)\right)^2}{2} + \frac{\left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + o(x^7)\right)^3}{3} - \\ &\quad - o\left(\left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + o(x^7)\right)^3\right) = \\ &= -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^7) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{36} - \frac{x^6}{360} + \dots\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^6}{216} + \dots\right) - o(x^6) = \\ &= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + \underbrace{o(x^7) + o(x^6)}_{=o(x^6)} = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o(x^6). \end{aligned}$$

Приклад 3. Застосовуючи таблицю розвинень елементарних функцій за формулою Маклорена з залишковим членом у формі Пеано, знайти такі границі

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x \sin^2 x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x});$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{6 \sin x - 6x + x^3}.$$

Розв'язання. а) Спочатку спростимо знаменник, застосовуючи еквівалентне перетворення, а саме: $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$, отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3},$$

тому розвивати функції чисельника потрібно до члена з x^3 . Застосуємо розвинення функцій e^x і $\sin x$ до членів з x^3 , а саме:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3); \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$

одержимо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - x(1+x)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x - x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3}{3x^3} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

При розв'язанні застосовано формулу $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$, що відповідає означенню «о-малого».

б) Спочатку зробимо такі перетворення:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2} \sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 2 \right) = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t} \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \left(\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} - 2 \right).\end{aligned}$$

Оскільки в знаменнику стоїть t^2 , то застосовувати будемо таке розвинення до члена з другим степенем:

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1!}z + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 + o(z^2).$$

Для функції $\sqrt{1+t}$ візьмемо в цьому розвиненні $m = \frac{1}{2}$, $z = t$, а для функції $\sqrt{1-t}$ покладемо

$m = \frac{1}{2}$, $z = -t$, тоді

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \left(\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t} - 2 \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \left(1 + \frac{1}{2}t + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)t^2}{2!} + o(t^2) + 1 - \frac{1}{2}t + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)t^2}{2!} + o(t^2) - 2 \right) = \\
&= \left| o(t^2) + o(t^2) = o(t^2) \right| = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \left(-\frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{4} + \frac{o(t^2)}{t^2} \right) = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

в) Для обчислення границі $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt{1-x^2}}{6\sin x - 6x + x^3}$ зазначеним умовою способом дізнаємося найменший степінь розвинення знаменника за формулою Маклорена, щоб потім до цього степеня розвивати чисельник. Маємо

$$6\sin x - 6x + x^3 = 6 \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m}) \right] - 6x + x^3 =$$

$$\begin{aligned}
&= 6x - x^3 + \frac{x^5}{20} - \frac{6x^7}{7!} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{6x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m}) - 6x + x^3 = \\
&= \underbrace{\frac{x^5}{20} - \frac{6x^7}{7!} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{6x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m})}_{=o(x^6)} = \frac{x^5}{20} + o(x^6).
\end{aligned}$$

Чисельник будемо розвивати до x^5 , застосовуючи розвинення функцій $(1+t)^m$ для $m = \frac{1}{3}$, $t = -x^2$ і

$\sin t$ спочатку для $t = x$, а потім для $t = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$:

$$x \cdot \sqrt[3]{1-x^2} = x \cdot \left[1 + \frac{1}{3}(-x^2) + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)(-x^2)^2}{2!} + o(x^4) \right] = x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{9} + o(x^5);$$

$$\sin(\sin x) = \sin\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right) - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right)^5 + o(x^6) =$$

$$\begin{aligned}
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) - \frac{1}{6} \left(x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \dots \right) + \frac{x^5}{120} + o(x^6) = \\
&= \left| o(x^6) + o(x^6) = o(x^6) \right| = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^6).
\end{aligned}$$

В результаті отримаємо

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{6\sin x - 6x + x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^6) - x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{9} + o(x^5)}{\frac{x^5}{20} + o(x^6)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{19x^5}{10} + o(x^5)}{\frac{x^5}{20} + o(x^6)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{19}{10} + \overbrace{\frac{o(x^5)}{x^5}}^{\rightarrow 0}}{\frac{1}{20} + \underbrace{\frac{o(x^5)}{x^5}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{x}_{\rightarrow 0}} = 38.
\end{aligned}$$

