Практичне заняття

Визначники другого і третього порядків, методи обчислення.
Розв'язання систем лінійних рівнянь методом Крамера.

Теоретичні відомості

Числовою матрицею (або матрицею) називається прямокутна таблиця чисел.

Окремі числа цієї таблиці називаються елементами матриць, позначені символом a_{ij}, де i – номер рядка, j – номер стовпця, у якому коштує обраний елемент. Розмірність матриці позначається *(m x n),* де *m* – число рядків, *n* – число стовпців.

Матриці, у яких число рядків збігається з числом стовпців, називається квадратною. Квадратній матриці розмірності *n* відповідає число, визначником *n-го* порядку.

Так, матриці А = $\begin{pmatrix} a_1 & в_1 \\ a_2 & в_2 \end{pmatrix}$ відповідає визначник 2-го порядку, що позначається символом:

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & в_1 \\ a_2 & в_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot в_2 - a_2 \cdot в_1$$

Для системи двох лінійних рівнянь $\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 \\ a_2x + b_2y = d_2 \end{cases}$

формули Крамера мають вигляд:

$$\boxed{x = \frac{\Delta x}{\Delta}; y = \frac{\Delta y}{\Delta}}$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & в_1 \\ a_2 & в_2 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & в_1 \\ d_2 & в_2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} d_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}$

Для системи 3-х рівнянь з 3-мя невідомими:

$$\begin{cases} a_1x + в_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + в_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + в_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \qquad (2)$$

формули Крамера мають вигляд:

$$\boxed{x = \frac{\Delta x}{\Delta}; y = \frac{\Delta y}{\Delta}; z = \frac{\Delta z}{\Delta}} \qquad (3)$$

де Δ – головний визначник системи (2), Δ_x, Δ_y, Δ_z – допоміжні визначники.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & в_1 & c_1 \\ a_2 & в_2 & c_2 \\ a_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & в_1 & c_1 \\ d_2 & в_2 & c_2 \\ d_3 & в_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & в_1 & d_1 \\ a_2 & в_2 & d_2 \\ a_3 & в_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

1) Якщо $\Delta \neq 0$, то система має <u>єдине рішення</u>, яке знаходиться за формулою (3)

2) Якщо $\Delta=0$, а хоча б один з визначників Δ_x, Δ_y, Δ_z відмінний від нуля, то система (2) <u>не має</u> <u>рішень</u>.

3) Якщо $\Delta = 0$ і $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система (2) має <u>безліч рішень</u>.

Практична частина

Вирішити системи, застосовуючи правило Крамера.

1) $\begin{cases} 7x + 2y = 1 \\ 17x + 6y = -9 \end{cases}$

Рішення: головний визначник:

$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 17 & 6 \end{vmatrix} = 42 - 34 = 8 \neq 0 \Rightarrow$ система має єдине рішення.

Знайдемо допоміжні визначники системи:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -9 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 18 = 24; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} = -63 - 17 = -80$$

$$x = \frac{\Delta_ч}{\Delta} = \frac{24}{8} = 3; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-80}{8} = -10$$

Відповідь: (3;-10).

2) $\begin{cases} \frac{1}{5}x - \frac{1}{15}y = 1 \\ 6x - 2y = 35 \end{cases}$

Рішення: $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{2}{5} + \frac{6}{15} = -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 0$; $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{15} \\ 35 & -2 \end{vmatrix} = -2 + \frac{35}{15} = \frac{1}{3} \neq 0$

Відповідь: система не сумісна.

3) $\begin{cases} 0{,}2x - 5y = 11 \\ -x + 25y = -55 \end{cases}$

Рішення: Знайдемо головний визначник системи:

$\Delta = \begin{vmatrix} 0{,}2 & -5 \\ -1 & 25 \end{vmatrix} = 0;$

Знайдемо допоміжні визначники системи:

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 11 & -5 \\ -55 & 25 \end{vmatrix} = 0;$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} 0{,}2 & 11 \\ -1 & -55 \end{vmatrix} = 0$

Система має безліч рішень.

Відповідь: $x=25y+55$; де y– будь-яке дійсне число.

Приклад. Потрібно встановити, що система рівнянь має єдине рішення, і знайти його методом Крамера**:**

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 1 \\ -x + y = 2 \\ 2x + 3y + z = -2 \end{cases}$$

Рішення:

1. Обчислимо головний визначник системи розкладанням за методом трикутника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot1\cdot1 + (-1)\cdot(-1)\cdot3 + 0\cdot3\cdot4 - 2\cdot1\cdot(-1) - (-1)\cdot2\cdot1 - 0\cdot3\cdot4 = 11$$

Так як $\Delta = 11 \neq 0,$ то система має єдине рішення.

2. Обчислимо допоміжні визначники системи методом Сарруса:

$$\Delta_x = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{matrix} \quad = 1\cdot1\cdot1 + 2\cdot0\cdot(-2) + (-1)\cdot2\cdot3 - (-2)\cdot1\cdot(-1) - 3\cdot0\cdot1 - 1\cdot2\cdot2 = -11$$

3. Методом мінорів, розкладаючи по елементах *3-го* рядка:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 2\cdot(1\cdot0 - (-1)\cdot2)) + 2\cdot(4\cdot0 - (-1)\cdot(-1)) + (8+1) = 11$$

4. Методом мінорів, розкладаючи по елементах *3-го* стовпця:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -33$$

5. За формулами Крамера знаходимо:

$$x = \frac{-11}{11} = -1; \quad y = \frac{11}{11} = 1; \quad z = \frac{-33}{11} = -3$$

Відповідь: *(-1;1;-3)*

Знайти всі рішення системи.

1) $\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$

Рішення:

Знаходимо визначник системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 - 6 + 12 = 0$$

$\Delta = 0 \Rightarrow$ система або не має рішень, або має їх нескінченно багато.

Знаходимо допоміжні визначники: $\Delta_x = 0$

Система має нескінченно багато рішень.

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$$

$$\begin{cases} x + 2y = 4z + 1 \\ 2x + y = 5z - 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4z+1 & 2 \\ 5z-1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4z + 1 - 10z + 2}{1 - 4} = \frac{-6z + 3}{-3} = 2z - 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4z+1 \\ 2 & 5z-1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{5z - 1 - 8z - 2}{-3} = \frac{-3z - 3}{-3} = z + 1$$

Відповідь: *x = 2z – 1, y = z +1, z –* будь-яке дійсне число

2) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ 5x - 8y + 9z = 3 \\ 2x + y - 3z = -1 \end{cases}$

Рішення:

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & 9 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_x = 10 \neq 0 \Rightarrow$ система рішень не має (несумісна)

Приклади для самостійного розв’язання

1. $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$ Відповідь: (3;1;1)

2. $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$ Відповідь: (1;2;-2)

3. $\begin{cases} x - 3y - z = 1 \\ 2x + y + z = -7 \\ 2x - y - 3z = 5 \end{cases}$ Відповідь: (-2;0;-3)

4. $\begin{cases} 3x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + 3z = 5 \\ 2x + 3y - z = -4 \end{cases}$ Відповідь: (1;-2;0)

Питання і завдання для самоконтролю

1. Що називається матрицею? Визначником?
2. Як визначається розмірність матриці (визначника)?
3. Сформулюйте правило обчислення визначників *2-го* порядку
4. Які існують способи обчислення визначників *3-го* порядку.
5. Що називається мінором довільного елемента? Алгебраїчним доповненням?
6. Сформулюйте теорему Крамера для системи *n*-лінійних рівнянь.
7. Запишіть формули Крамера для систем *2-х* і *3-х* лінійних рівнянь.
8. Як досліджувати систему лінійних рівнянь за допомогою визначників?
9. Сформулюйте властивості визначників.
10. У якому випадку систему лінійних рівнянь можна вирішувати методом Крамера?
11. Записати властивості визначників.
12. Навчитися використовувати них при обчисленні визначників.
13. Вирішити завдання:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

Відповіді: а) –16; б) –26.

<u>Зразок виконання завдань.</u>

1) Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

Приклад виконання:

а) скористаємося властивостями визначників, утворимо в якому-небудь рядку або стовпці (наприклад, у третьому стовпці) нулі

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 7 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -(18-21) = 3$$

б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$

$= (-2)\cdot(+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2\cdot(4+3) = -14$

2) Не розкриваючи визначників, довести справедливість рівностей:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} \beta \text{в}_1 + \gamma c_1 & \text{в}_1 & c_1 \\ \beta \text{в}_2 + \gamma c_2 & \text{в}_2 & c_2 \\ \beta \text{в}_3 + \gamma c_3 & \text{в}_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0$

Зауваження: При рішенні задач скористатися відповідними властивостями визначників.

Варіанти завдань поточного контролю за темою: «Рішення систем лінійних рівнянь методом Крамера ».

Дослідити систему рівнянь, якщо є рішення, знайти їх методом Крамера.

1. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ x + 2y + z = 2 \\ x - 3y + 4z = -1 \end{cases}$

Відповідь: (3;0;-1)

2. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 6z = -1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$

Відповідь: (1;-1;1)

3. $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$

Відповідь: (1;1;1)

4. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$

Відповідь: (2;-2;3)

5. $\begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}$

Відповідь: (3;4;5)

6. $\begin{cases} 3x + 2y - z = -3 \\ x + 3y + 2z = 6 \\ 2x - y + 3z = 3 \end{cases}$

Відповідь: (-1;1;2)

Список використаної літератури.

1. Збірник задач за курсом математики для втузов за редакцією А.В.Єфімова, Б.П.Демідовича. Ч.1. – М.: Высш.шк., 1981. – 304 с.
2. П.Е.Данко, А.Г.Попов и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высш.шк., 1986. – 304 с.
3. В.П. Дубовик, І.І. Юрик. Вища математика. - К., А.С.К., 2006. – 648 с.