Практичне заняття

Пряма на площині

Теоретичні відомості

Загальне рівняння прямої лінії на площині: $Ax + By + C = 0$,

де A, B, C – довільні числа; при цьому A і B не можуть бути одночасно рівними нулю.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y = kx + b$,

де κ - кутовий коефіцієнт: $\kappa = tg\,\phi$, ϕ - кут, який утворює пряма з додатнім напрямком осі OX.

Рівняння прямої, що проходить у заданному напрямку: $y - y_0 - ¿\frac{A}{B}(x - x_0)$

.

позначимо- $\frac{A}{B} = k$, тоді маємо

$\boldsymbol{y - y_0 = k(x - x_0)}$ - рівняння прямої, що проходить через точку (x_0, y_0) у напрямку k

Рівняння прямої, що проходить через дві точки M_1 та M_2:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Кут між двома прямими: $\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$

Умова паралельності прямих: $k_1 = k_2$

Умова перпендикулярності прямих: $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ або $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Практична частина

Приклад

Відомі координати вершин трикутника ABC: $A(-2;9)$, $B(7;-3)$, $C(13;14)$.

Знайти:

1) Довжину сторони AB;
2) Рівняння сторін AB і AC та їх кутові коефіцієнти;
3) Рівняння медіан, що проведені з вершин A і B, точку перетину медіан;
4) Кут A трикутника в радіанах з точністю до двох знаків;
5) Рівняння висоти CT, що проведена з вершини C на сторону AB і довжину цієї висоти;
6) Координати точки M, що симетрична до точки A відносно прямої CT.

Розв'язання.

1) Відстань d між двома точками $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ визначають за формулою:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

Застосуємо (3.1) для визначення довжини сторони AB:

$$AB = \sqrt{(7 - (-2))^2 + (-3 - 9)^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15.$$

2) Рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ має вигляд:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (2)$$

Для того, щоб одержати рівняння сторони AB, підставимо у (2) координати точок A і B:

$$\frac{y-9}{-3-9}=\frac{x+2}{7+2};\quad \frac{y-9}{-12}=\frac{x+2}{9};\quad \frac{y-9}{-4}=\frac{x+2}{3};$$

$$3y-27=-4x-8;\qquad 4x+3y-19=0. \qquad (3)$$

Для визначення кутового коефіцієнта сторони AB розв'яжемо знайдене рівняння AB відносно змінної y:

$$3y=-4x+19;\quad y=-\frac{4}{3}x+\frac{19}{3}.$$

звідси кутовий коефіцієнт $k_{AB}=-\dfrac{4}{3}$.

Підставимо тепер у (2) координати точок A і C, знайдемо рівняння прямої AC та її кутовий коефіцієнт:

$$\frac{y-9}{14-9}=\frac{x+2}{13+2};\quad \frac{y-9}{5}=\frac{x+2}{15};\quad \frac{y-9}{1}=\frac{x+2}{3};$$

$$3y-27=x+2;\qquad x-3y+29=0;$$

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{29}{3};\qquad k_{AC}=\frac{1}{3}.$$

3) Нехай точка D є серединою відрізка BC, а точка E – середина відрізка AC. Для визначення координат точок D і E застосуємо формули для ділення відрізка навпіл:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2};\quad \bar{y}=\frac{y_1+y_2}{2};\ (4)$$

$$x_D=\frac{7+13}{2}=10;\quad y_D=\frac{-3+14}{2}=5,5;\quad D(10;5,5);$$

$$x_E=\frac{-2+13}{2}=5,5;\quad y_D=\frac{9+14}{2}=11,5;\quad E(5,5;11,5).$$

Підставимо у (2) координати точок A і D, отримаємо рівняння медіани AD:

$$\frac{y-9}{5{,}5-9}=\frac{x+2}{10+2};\quad \frac{y-9}{-3{,}5}=\frac{x+2}{12};\frac{y-9}{-7}=\frac{x+2}{24};$$
$$-7x-14=24y-216;\quad 7x+24y-202=0. \qquad (5)$$

Аналогічно, підставимо у (3.2) координати точок B і E і відшукаємо рівняння медіани BE:

$$29x+3y-194=0. \qquad (6)$$

Нехай точка N – точка перетину медіан. Для того, щоб знайти координати цієї точки, треба розв'язати систему з рівнянь (5) і (6):

$$\begin{cases}7x+24y-202=0;\\ 29x+3y-194=0.\end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $x=6$; $y=\dfrac{20}{3}$. Таким чином, $N\left(6;\dfrac{20}{3}\right)$ – точка перетину медіан.

4) Відомо, що кут φ між двома прямими, кутові коефіцієнти яких відповідно дорівнюють k_1 і k_2, обчислюють за формулою:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \qquad (7)$$

Шуканий кут A утворюють прямі AB і AC, кутові коефіцієнти яких було знайдено у пункті (2). Застосуємо (3.7), матимемо:

$$\mathrm{tg}A=\frac{k_{AC}-k_{AB}}{1+k_{AC}k_{AB}}=\frac{\frac{1}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{9}}=3;$$
$$A=\mathrm{arctg}3=71^\circ34';\quad \text{або у радіанах}\quad A\approx1{,}249.$$

5) Рівняння прямої, що проходить у заданому напрямку через задану точку, має вигляд:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (8)$$

Висота CT перпендикулярна до сторони AB. Для знаходження кутового коефіцієнта висоти CT використаємо умову перпендикулярності прямих CT *і* AB. Оскільки $k_{AB} = -\frac{4}{3}$, то $-\frac{4}{3}k_{CT} = -1$; $k_{CT} = \frac{3}{4}$.

Підставимо у (3.8) координати точки C і знайдений кутовий коефіцієнт висоти CT, відшукаємо рівняння CT:

$$y - 14 = \frac{3}{4}(x - 13); \quad 4y - 56 = 3x - 39; \quad 3x - 4y + 17 = 0. \quad (9)$$

Для знаходження довжини висоти CT визначимо спочатку координати точки перетину прямих AB і CT, тобто координати точки T. Для цього розв'яжемо систему рівнянь (3) і (9):

$$\begin{cases} 4x + 3y - 19 = 0 \\ 3x - 4y + 17 = 0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $x = 1$; $y = 5$, тобто $T(1;5)$. Довжину висоти CT знаходимо за формулою (1):

$$d_{CT} = \sqrt{(13-1)^2 + (14-5)^2} = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15.$$

6) Оскільки пряма AB перпендикулярна до прямої CT, то шукана точка M, яка симетрична до точки $A(-2;9)$ відносно прямої CT, належить прямій AB. Крім того, точка $T(1;5)$ є серединою відрізка AM. Застосуємо формули (4) і знайдемо координати шуканої точки M:

$$1 = \frac{-2 + x_M}{2}, \text{ звідки } x_M = 4; \quad 5 = \frac{9 + y_M}{2}, \text{ звідки } y_M = 1.$$

Таким чином, $M(4;1)$ – шукана точка

Питання для самоперевірки

1. Запишіть загальне рівняння прямої на площині.
2. Які різновиди загального рівняння прямої існують?
3. Яке рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?
4. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку у заданному напрямку.
5. Запишіть рівняння прямої, що проходить через дві точки.
6. Запишіть умови паралельності, перпендикулярності.
7. Як знайти кут між прямими?

Розв'язати задачі.

1. Дано трикутник з вершинами $A(-1;2)$, $B(3;4)$ і $C(1;6)$. Обчислити відстань від вершини B до медіани, проведеної з вершини B. Зробити малюнок.
2. Через точку перетинання прямих $5x-2y-13=0$ і $x+3y-11=0$ провести пряму перпендикулярно до прямої $4x-7y+12=0$. Зробити малюнок.
3. Знайти точку, симетричну точці Q (2;1) відносно прямої $2x+5y-38=0$. Зробити малюнок.
4. На прямій $2x+y+6=0$ знайти точку, рівновіддаленну від двох даних точок $A(2;3)$ і $B(4;5)$. Зробити малюнок.
5. Обчислити відстань від точки $A(1;2)$ до прямої, що проходить через точки $B(3;8)$ і $C(5;-13)$. Зробити малюнок.
6. Знайти проекцію точки $P(-\frac{7}{5};3)$ на пряму $15x-5y-2=0$. Зробити малюнок.

7. Скласти рівняння сторони AC ΔABC, якщо $A(5;-5)$ і $B(-3;1)$ – дві його вершини, а $D(2;5)$ – точка перетинання його висот. Зробити малюнок.

8. На прямій $2x+y+6=0$ знайти точку, рівновіддаленну від двох даних точок $A(-1;0)$ і $B(1;-1)$.

9. Знайти центр кола радіуса $R=8$, що стосується двох даних прямих $3x=4y+10=0$ і $3x+4y=0$. (Дати яке-небудь одне рішення).

10. Скласти рівняння бісектриси кута між прямими $2x-3y-5=0$ і $6x-4y+7=0$, суміжного з кутом, що містить точку $C(2;-1)$.

11. На осі ординат знайти таку точку M, відстань якої до точки $N(-8;13)$ було рівним 17.

12. Дано вершини трикутника: $A(3;-5); B(-3;3)$ і $C(-1;-2)$. Визначити довжину бісектрис його внутрішнього кута при вершині A.

13. Дано рівняння двох сторін квадрата $4x-3y+3=0$, $4x-3y-17=0$ і одна з його вершин $A(2;-3)$. Скласти рівняння двох сторін цього квадрата.

14. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку *(-2;5*) під кутом $\frac{\pi}{4}$ до прямої $4x+3y-1=0$. Зробити малюнок.

15. Дано трикутник з вершинами: $A(1;2), B(3;7), C(5;-13).$ Обчислити довжину висоти, яка проведена з вершини C на сторону AB. Зробити малюнок.

16. Відомі дві вершини трикутника *АВС: А(-4,4). В(4,-12*) та точка *М(4,2*) перетину його висот. Знайти вершину *С.*

17. Знайти рівняння прямої, яка відсікає на осі ординат відрізок, який дорівнює *2* та проходить паралельно прямій *2у-х=3.*

18. Довести, що чотирикутник *АВСД* – трапеція, якщо *А(3,6), В(5,2), С(-1,-3), Д(-5,5).*

19. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку *A(3,1)* перпендікулярно до прямої *BC,* якщо *B(2,5), C(1,0).*

20. Знайти точку *O* перетину діагоналей чотирикутника *ABCД,* якщо *A(-1,-3), B(3,5), C(5,2), Д (3,-5).*

21. Відомі рівняння сорони *AB* трикутника *ABC* $4x+y=12$, його висот *BH* $5x-4y=12$ та *AM* $x+y=6$. Знайти рівняння двоїх інших сторін трикутника *ABC.*

22. Відомі дві вершини трикутника *ABC: A(-6,2), B(2,-2)* та точка *H(1,2)* перетину його висот. Знайти координати точки *M* перетину сторони *AC* та висоти *BH.*

23. Знайти рівняння висот трикутника *ABC*, які проходять через вершини *A* і *B*, якщо *A(-4,2), B(3,-5), C(5,0).*

24. Знайти координати точки *M* перетину перпендикулярів, які проведено через середини сторін трикутника з вершинами *A(2,3), B(0,-3), C(6,-3).*

25. Знайти рівняння висоти трикутника *ABC,* яка проходить через вершину *A*, якщо відомі рівняння його сторін: $-2x-y-3=0$ *(AB)*, $-x+5y-7=0$ *(AC)*, $-3x-2y+13=0$*(BC).*

26. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку *O(0,0)* та проходить через точку перетину прямих $2x+5y+8=0$, $2x+3y=4=0$.

27. Відомі рівняння двох сторін ромбу $2x-5y-1=0$ та $2x-5y-34=0$ та рівняння однієї з його діагоналей $x+3y-6=0$. Знайти рівняння другої діагоналі.

28. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку *A(-2,1)* перпендікулярно до прямої *BC*, якщо *B(-3,-2), C(1,6).*

29. Знайти рівняння медіани *CM* та висоти *CK* трикутника *ABC*, якщо *A(4,6), B(-4,0), C(-1,-4).*