Практичне заняття

Обчислення границь функцій.
Розкриття невизначеностей виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $\{\infty - \infty\}$

Теоретичні відомості

Число a називається границею послідовності $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε знайдеться таке додатне число N, що $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$. У цьому випадку пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Число a називається границею змінної величини x, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке значення змінної x, що всі наступні значення змінної будуть задовольняти нерівності: $|x - a| < \varepsilon$. Пишуть

$x \to a$, або $\lim x = a$.

Змінну величину x називають нескінченно малою, якщо вона починаючи з деякого значення стає і залишається за абсолютною величиною меншою від як завгодно малого додатного числа ε $(|x| < \varepsilon)$.Змінну величину x називають нескінченно малою (н. м. в.), якщо її границя дорівнює 0, тобто $\lim x = 0$.

Змінну величину x називають нескінченно великою, якщо вона починаючи з деякого значення стає і залишається за абсолютною величиною більшою від як завгодно великого наперед заданого числа $E > 0$ ($|x| > E$).
Символічно пишуть
$x \to \infty$ або $\lim x = \infty$; якщо $x > 0$, $x \to +\infty$, *якщо* $x < 0$, $x \to -\infty$.

Зв'язок між нескінченно малими і нескінченно великими величинами:

Теорема 1. Якщо нескінченно мала величина α не приймає нульових значень, то обернена до неї величина є нескінченно великою.

Теорема 2. Величина обернена до нескінченно великої є величина нескінченно мала.

Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \to a$, якщо для будь-якого як завгодно малого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$. Це записують так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Аналогічно $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$, якщо $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N$.

Умовно записують $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, якщо $|f(x)| > M$ при $0 < |x - a| < \delta$, де M - будь-яке додатне число. У цьому випадку функція $f(x)$ називається нескінченно великою при $x \to a$.

Якщо $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, то функція $f(x)$ називається нескінченно малою при $x \to a$.

Практичне обчислення границь базується на наступних теоремах (якщо існують $\lim\limits_{x \to a} f_1(x)$ та $\lim\limits_{x \to a} f_2(x)$):

теорема 1. $\lim\limits_{x \to a} \left[f_1(x) + f_2(x) \right] = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) + \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$;

теорема 2. $\lim\limits_{x \to a} \left[f_1(x) \cdot f_2(x) \right] = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$;

теорема 3. $\lim\limits_{x \to a} \left[f_1(x) \div f_2(x) \right] = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) \div \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) \neq 0$;

Практична частина

Знайти границі функцій:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}=\left\{\dfrac{0^3-3\cdot 0+1}{0-4}=-\dfrac{1}{4}\right\}=-\dfrac{1}{4}$.

<u>Розкриття невизначеностей виду</u> $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}=\left\{\dfrac{9+3-12}{18-27+9}=\dfrac{0}{0}\right\}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\quad *$

Границю безпосередньо знайти не можна, оскільки отримали невизначеність виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

Щоб розкрити цю невизначеність потрібно чисельник і знаменник розділити на $(x - a)$, якщо $x\to a$ та знову перейти до границі. Для цього треба розкласти чисельник і знаменник дробу на множники.

У даному випадку розкладемо за формулою розкладу квадратного тричлену $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1, x_2 – корені відповідного квадратного рівняння:

$x^2+x-12=(x-3)(x+4)$

$D = 1 + 48=49 =7^2$ $\quad x_1=\dfrac{-1+7}{2}=3$ $\quad x_2=\dfrac{-1-7}{2}=-4$;

$2x^2-9x+9=2(x-3)(x-\dfrac{3}{2})=(x-3)(2x-3)$

$D = 81-72=9=3^2$ $\quad x_1=\dfrac{9+3}{4}=3$ $\quad x_2=\dfrac{9-3}{4}=\dfrac{3}{2}$

$*=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(2x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+4}{2x-3}=\dfrac{7}{3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\left\{\dfrac{8-8}{2-2}=\dfrac{0}{0}\right\}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$

4. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=*$

Границю безпосередньо знайти не можна, оскільки отримали невизначеність виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Щоб розкрити цю невизначеність потрібно чисельник і знаменник дробу помножити на спряжений вираз для виразу, який містить ірраціональність; спростити та знову перейти до границі.

У даному випадку потрібно чисельник і знаменник дробу помножити на вираз $\sqrt{x-1}+3$.

$$*=\lim_{x\to 10}\frac{(\sqrt{x-1}-3)(\sqrt{x-1}+3)}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)}=\lim_{x\to 10}\frac{x-1-9}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)}= =\lim_{x\to 10}\frac{x-10}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)}=$$

$$\lim_{x\to 10}\frac{1}{\sqrt{x-1}+3}=\frac{1}{6}.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)(\sqrt{x^2+9}+3)}{(\sqrt{x^2+9}-3)(\sqrt{x^2+9}+3)(\sqrt{x^2+4}+2)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4-4)(\sqrt{x^2+9}+3)}{(x^2+9-9)(\sqrt{x^2+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}==\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{6}{4}=1{,}5$$

<u>Розкриття невизначеностей виду</u> $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+2x-3}{5x^2-4x+4}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=*$

Границю безпосередньо знайти не можна, так як отримали невизначеність виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Щоб розкрити цю невизначеність потрібно чисельник і знаменник розділити на *x* у найвищому степеню, зустрічаючому у членах дробу.

У даному випадку потрібно чисельник і знаменник дробу розділити на x^2:

$$* = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{7x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{4}{x^2}} = \frac{7}{5} = 1{,}4.$$

7. $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+4x+3}{x^2+3x+5} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{4x}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}+\frac{5}{x^3}} = \left\{\frac{2}{0}\right\} = \infty.$$

8. $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+4}{\sqrt{x^4+1}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4}+\frac{1}{x^4}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4}+\frac{1}{x^4}}} = \frac{2}{1} = 2.$$

<u>Розкриття невизначеності виду</u> $\{\infty-\infty\}$:

а) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right) = \{\infty-\infty\} = *$$

Безпосередньо знайти границю не можна, оскільки маємо невизначеність виду $\{\infty-\infty\}$. Щоб розкрити цю невизначеність треба даний вираз помножити і розділити на спряжений, спростити і знову перейти до границі. У даному випадку помножимо і розділимо на вираз $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)$:

$$*= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = 0.$$

б) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+6}-x\right) = \{\infty-\infty\} = *$$

Безпосередньо знайти границю не можна, оскільки маємо невизначеність виду $\{\infty-\infty\}$. Щоб розкрити цю невизначеність треба даний вираз помножити і розділити на спряжений, тобто на вираз$\left(\sqrt{x^2+5x+6}+x\right)$:

$$* = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+5x+6}-x\right)\left(\sqrt{x^2+5x+6}+x\right)}{\sqrt{x^2+5x+6}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5x+6-x^2}{\sqrt{x^2+5x+6}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x+6}{\sqrt{x^2+5x+6}+x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{5+\frac{6}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

Додаткові приклади

1. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ *Відповідь: -0,4;*

2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}$ *Відповідь:* $\frac{5}{12}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+5}{x^2+x-1}$ *Відповідь: 0.*

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$ *Відповідь: 2.*

Приклади для самостійного розв'язання

Знайти границю функції:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^2-4x-1}{\sqrt{10x-1}-3}$ *Відповідь: 3,6;*

2. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+9x+9}{\sqrt{1-x}-2}$ *Відповідь: 12;*

3. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2+7x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}$ *Відповідь: 7,5;*

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-x-10}{\sqrt{6-x}-2}$ *Відповідь: -44;*

5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-2x-8}{\sqrt{4x+1}-3}$ *Відповідь: 15;*

Питання і завдання для самоконтролю

1. Дати означення границі послідовності, змінnної величини.

2. Дати означення границі функції.

3. Що називають нескінченно великою величиною?

4. Що називають нескінченно малою величиною?

5. Зв'язок між нескінченно малими і нескінченно великими величинами.

6. Основні теореми про границю.

7. Правила розкриття невизначеності виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

8.Правила розкриття невизначеності виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

9. Правила розкриття невизначеності виду $\{\infty - \infty\}$.

10. Знайти границю функції:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1+3x}}{x} = 1$; 1) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}} = 3$; 1) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{x-1}\right) = 1$;

2) $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{2x^2+5x-7} = \frac{5}{9}$; 2) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; 2) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right) = 2$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cos2x}{sinx-cosx} = -\sqrt{2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+3x-6x^2}{\sqrt[3]{8x^6+4x^2-1}} = -3$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right) = 0$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2-\sqrt{x+4}} = -4$; 4) $\log_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt[5]{x-8}} = \infty$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx - secx) = 0$;

Список використаної літератури.

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Для ВТУЗов, т.1: Учебное пособие для ВТУЗов. – 12-е изд. – М.: Наука, 1978 – 456 с.
2. Высшая математика для экономистов: Ученик для вузов/ Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф.Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ,2002 – 471 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч. I. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1986 – 304 с., ил.