Практичне заняття

Диференціювання алгебраїчних функцій

Теоретичні відомості

Означення. Похідною $y' = \frac{dy}{dx}$ від функції $y = f(x)$ у точці x за аргументом x називається границя відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, коли Δx прямує до нуля, отже $y' = \frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, якщо ця границя існує.

Основні правила знаходження похідної

Якщо C – стала і $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ - функції, що мають похідну, то:

$$1. (C)' = 0$$
$$2. (x)' = 1$$
$$3. (u \pm v)' = u' \pm v'$$
$$4. (C \cdot u)' = C \cdot u'$$
$$5. (u \cdot v)' = u'v + uv'$$
$$6. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \qquad (v \neq 0)$$
$$7. \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}, \qquad (v \neq 0)$$
$$8. (u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'.$$

Правило диференціювання складеної функції

Нехай дана складна функція $y = f(x)$, тобто така, що її можна представити в наступному виді:

$$y = F(u), \; u = \varphi(x)$$

або $y = F\left|\varphi(x)\right|$, де *u* проміжний аргумент.

Похідна складної функції дорівнює добуткові даної функції по проміжному аргументі u на похідну проміжного аргументу по x:, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, або $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Це правило розповсюджується на ланцюг з будь-якого кінцевого числа диференціалів.

Таблиця похідних основних функцій

$1. (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

$2. (\sqrt{n})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

$3. (\sqrt[n]{u})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \cdot u'$

$4. (a^n)' = a^n \cdot \ln a \cdot u'$

$5. (e^n)' = e^n \cdot n'$

$6. (\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$

$7. (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

$8. (\sin u)' = \cos u \cdot u'$

$9. (\cos u)' = -\sin u$ [illegible]

$10. (tg\, u)' =$ [illegible]

$11. (ctg\, u)' =$ [illegible]

$12. (\arcsin u)' =$ [illegible]

$13. (\arccos u)' =$ [illegible]

$14. (arctg\, u)' =$ [illegible]

$15. (arcctg\, u)' =$ [illegible]

$$16. (u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.$$

Практична частина

Диференціювання алгебраїчних функцій

Приклад 1. Знайти похідну функції: 1) $y = x^5$, 2) $y = \sqrt{x}$, 3) $y = \sqrt[4]{x^3}$.

Розв'язок. Використовуємо формулу (1) таблиці, те що $(x)' = 1$.

1) В цьому прикладі показник степеня $n = 5$, тому $y' = 5x^4$.

2) Тут $n = \frac{1}{2}$, тому $y' = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

При рішенні цього прикладу можна було використати формулу (2).

3) Тут $n=\frac{3}{4}$, тому $y'=(\sqrt[4]{x^3})'=(x^{\frac{3}{4}})'=\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4\sqrt{x}}$.

Приклад 2. Знайти похідну функцій 1) $y=5x^3$, 2) $y=-\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Розв'язок. Враховуємо правило знаходження похідної 4 та формулу таблиці (1).

1) Тут $n=3$

$y'=(5x^3)'=5(x^3)'=5\cdot 3x^2=15x^2;$

2) Тут $n=-2/3$

$$y'=\left(-\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'=-4\cdot\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'=-4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot x^{-\frac{2}{3}-1}=\frac{8}{3}x^{\frac{-5}{3}}=\frac{8}{3\sqrt[3]{x^5}},$$

В прикладі 2) можна було використати правло знаходження похідної 7.

Приклад 3. Знайти похідну функції $y=27x^3-\frac{81}{2}x^2\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}-11$.

Розв'язок. Надана функція є алгебраїчна сума декількох функцій, тому використаємо правило 3 наряду з (1); насамперед переходячи до дробових показників степенів:

$$y'=\left(27x^3-\frac{81}{2}x^{\frac{8}{3}}+6x^{-\frac{1}{3}}-11\right)'=27(x^3)'-\frac{81}{2}\left(x^{\frac{8}{2}}\right)'+6\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'-(11)'=27\cdot 3x^{3-1}-\frac{81}{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot x^{\frac{8}{3}-1}+$$

$$+6\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1}-0=81x^2-108\cdot x^{\frac{5}{3}}-2x^{-\frac{4}{3}}=81x^2-108x\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{x\sqrt[3]{x}}.$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y=(5x^2+7x+2)^3$.

Розв'язок. Тут ми маємо справу зі складною функцією. Нехай $u = 5x^2 + 7x + 2,$

Тоді
$$y' = 3u^2 \cdot u' = 3(5x^2 + 7x + 2)^2 \cdot (5x^2 + 7x + 2)' = 3(5x^2 + 7x + 2)^2 (10x + 7).$$

Але можна і не використовувати проміжні записи, тобто введення змінної u.

Приклад 5. Знайти похідну $y = \left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)^4.$

Розв'язок.

$$y' = \left(\left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)^4\right)' = 4\left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)^3 \cdot \left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)' = 4\left(1 + 2\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right)^3 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= 4\left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}\right).$$

Приклад 6. Знайти $1) y = \sqrt{x^2 + 2}; \quad 2) y = \frac{2}{(3x^2 - 5)^5}.$

Розв'язок.

1) $y' = (\sqrt{x^2 + 2})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2}} \cdot (x^2 + 2)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}.$

Використали формулу таблиці (2) та правило диференціювання складної функції.

2) $y' = \left(\frac{2}{(3x - 5)^3}\right)' = -\frac{2}{(3x^2 - 5)^6} \cdot \left((3x^2 - 5)^3\right)' = -\frac{2}{(3x^2 - 5)^6} \cdot 3(3x^2 - 5)^2 \cdot (3x^2 - 5)' =$

$$= -\frac{6}{(3x - 5)^4} \cdot 6x = -\frac{36x}{(3x^2 - 5)^4}.$$

Тут використали правило 7, формулу таблиці (2) і правило диференціювання складної функції.

Приклад 7. Знайти похідну функції $y=(3x^2+5ax-2a^2)\sqrt{a^2+3x^2}$.

Розв'язок. Тут треба продиференціювати добуток двох функцій використовуючи правило 5.

$$y'=(3x^2+5ax-2a^2)'\cdot\sqrt{a^2+3x^2}+(3x^2+5ax-2a^2)\cdot(\sqrt{a^2+3x^2})'=$$

$$=(6x+5a)\sqrt{a^2+3x^2}+(3x^2+5ax-2a^2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2+3x^2}}\cdot 6x=(6x+5a)\sqrt{a^2+3x^2}+$$

$$+(3x^2+5ax-2a^2)\cdot\frac{3x}{\sqrt{a^2+3x^2}}.$$

Приклад 8. Знайти похідну $y=\dfrac{5+3x+x^2}{5-3x+x^2}$.

Розв'язок. Тут слід використати правило 6 – диференціювання дробу.

$$y'=\frac{(5+3x+x^2)'(5-3x+x^2)-(5+3x+x^2)(5-3x+x^2)'}{(5-3x+x^2)^2}=$$

$$=\frac{(3+2x)(5-3x+x^2)-(5+3x+x^2)(-3+2x)}{(5-3x+x^2)^2},$$

а після спрощень $y'=\dfrac{6(5-x^2)}{(5-3x+x^2)^2}$.

Приклад 8. Знайти похідну

$$1)\ y=\sin 15x,\ \ 2)\ y=\cos 2x^2\ \ 3)\ y=tg\frac{1+x}{x};\ \ 4)\ y=ctg\sqrt{\frac{1}{1+x}}.$$

Розв'язок.

Використовуємо формули (8), (9), (10), (11) і правило диференціювання складеної функції.

1) $y'=(\sin 15x)'=\cos 15x\cdot(15x)'=\cos 15x\cdot 15=15\cdot\cos 15x;$

2) $y'=(\cos 2x^2)'=-\sin 2x^2(2x^2)'=-\sin 2x^2\cdot 4x=-4x\cdot\sin 2x^2;$

3) $y' = \left(tg\frac{1+x}{x} \right)' = \frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{x}} \cdot \left(\frac{1+x}{x} \right)' = \frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{x}} \cdot \frac{(1+x)'x - (1+x)(x)'}{x^2} =$

$= \frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{x}} \cdot \frac{1\cdot x - (1+x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1}{\cos^2\frac{1+x}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1+x}{x};$

4) $y' = \left(ctg\sqrt{\frac{1}{1+x}} \right)' = -\frac{1}{\sin^2\sqrt{\frac{1}{1+x}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{1+x}} \right)' = -\frac{1}{\sin^2\sqrt{\frac{1}{1+x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{1+x}}} \cdot \left(\frac{1}{1+x} \right)' =$

$= -\frac{1}{\sin^2\sqrt{\frac{1}{1+x}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{(1+x)^2} \right) = \frac{1}{\sin^2\sqrt{\frac{1}{1+x}}} \frac{\sqrt{1+x}}{2(1+x)^2} = \frac{\operatorname{cosec}^2\sqrt{\frac{1}{1+x}}}{2\sqrt{(1+x)^3}}.$

Приклад 9. Знайти похідну $1) y = 3\sin^2 x,\ 2) y = \sqrt{tgx},\quad 3)\ y = \frac{1}{\cos^3 x}.$

Розв'язок. 1) Запишемо приклад у вигляді $y = 3U^2$ при $U = \sin x,$ і тоді $y' = 6U \cdot U' = 6\sin x \cdot (\sin x)' = 6\sin x \cdot \cos x = 3\sin 2x.$

Тепер покажемо, як розв'язати задачу, не вводячи U. Насамперед продиференцюємо степінь, а так як у степінь підноситься $\sin x,$ то продиференцюємо і $\sin x.$ Знайдені похідні перемножуємо, постійний множник 3 винесемо за знак похідної.

$y' = 3 \cdot 2\sin x \cdot \cos x = 3\sin 2x.$

2) $y' = (\sqrt{tgx})' = \frac{1}{2\sqrt{tgx}} \cdot (tgx)' = \frac{1}{2\sqrt{tgx}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x};$

3) $y' = \left(\frac{1}{\cos^3 x} \right)' = -\frac{1}{(\cos^3 x)^2} \cdot (\cos^3 x)' = -\frac{1}{\cos^6 x} \cdot 3\cos^2 x(-\sin x) = \frac{3\sin x}{\cos^4 x}.$

Приклад 10. Знайти похідну від функції:

1. $y = 2\sqrt[4]{x} - 3\sin\frac{x}{3}.$ Використовуємо формулу $(u - v)' = u' - v'$

$y' = (2\sqrt[4]{x})' - \left(3\sin\frac{x}{3} \right)' = 2(x^{1/4})' - 3\left(\sin\frac{x}{3} \right)' = 2 \cdot \frac{1}{4}x^{-3/4} - 3\cos\frac{x}{3} \cdot \left(\frac{x}{3} \right)' = \frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{x^3}} - \cos\frac{x}{3}.$

2. $y = \ln^3 x \cdot tg 2x.$ Маємо добуток двох функцій, тому застосовуємо формулу $(uv)' = u'v + uv'.$

$$y' = (\ln^3 x)' \cdot tg 2x + \ln^3 x (tg 2x)' = 3\ln^2 x \cdot (\ln x)' \cdot tg 2x + \ln^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot (2x)' =$$

$$= 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} \cdot tg 2x + \frac{\ln^3 x}{\cos^2 2x} \cdot 2 = \frac{\ln^2 x}{x\cos^2 2x}(3tg 2x \cos^2 2x + 2x \ln x) =$$

$$= \frac{\ln^2 x}{x\cos^2 2x}(1{,}5 \sin 4x + 2x \ln x).$$

I. Знайти швидкість у момент *t=1c.,* якщо рух точки описується рівнянням: $S = 5t^2 - 3t + 4$

$v = \frac{dS}{dt} = 10t - 3;\ v|_{t=1} = 10 - 3 = 7$ (м/с)

II. Знайти кут, утворений дотичною до параболи: $y = x^2 - 3x + 5$; у крапці *M(2;3)*

$tg\varphi = y'(x); (x^2 - 3x + 5)' = 2x - 3; y'(x_0) = y'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1 \qquad tg\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 45^o$

III. Знайти похідні функцій:

1) $y = x^5 - 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2};$ $\qquad y' = 5x^4 - 12x^2 - 2x + \frac{1}{2}x$

2) $y = 2x^{-2} - x^{-1} + 5;$ $\qquad y' = -4x^{-3} + 2x^{-2} = \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}$

3) $y = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{6}{7x^4}$ $\qquad y' = -\frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{15}{x^4} + \frac{24}{7x^5}$

4) $y = 5\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}$ $\qquad y' = 5\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

5) $y = \left(6\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot (7x - 3)$ $\qquad y' = \left(\frac{6}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{x^3}\right) \cdot (7x - 3) + 7\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

6) $y = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + 1}$ $\qquad y' = \frac{-x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{(x^3 + 1)^2}$

7) $y = \frac{6}{x^3 - 4x + 8}$ $\qquad y' = -\frac{6 \cdot (3x^2 - 4)}{(x^3 - 4x + 8)^2}$

8) $y = (5x^2 + 2x - 1)^8;$ $\qquad y' = 8(5x^2 + 2x - 1)^7 \cdot (10x + 2)$

9) $y = \sqrt{(1 + x^2)^3}$ $\qquad y' = 3x\sqrt{1 + x^2}$

10) $y = \frac{x^3 + e^x}{e^x}$ $\qquad y' = \frac{3x^2 - x^3}{e^x}$

11) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$ $\qquad y' = 2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{\ln x + 1}{\ln^2 x}$

12) $y = 10^{\sqrt{1+x}}$ $\qquad y' = 10^{\sqrt{1+x}} \cdot \ln 10 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + x}}$

13) $y = (4^x + x^4)^5$ $\qquad y' = 5(4^x + x^4)^5 \cdot (4^x \ln 4 + 4x^3)$

14) $y = \ln^2 x$ $\qquad y' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$

15) $y = \ln\left(x^2 - 4x - 4^x\right)$ $\qquad$ $y' = \dfrac{2x - 4 - 4^x \ln 4}{x^2 - 4x - 4^x}$

16) $y = 2\ln\ln x - \ln 2x$ $\qquad$ $y' = \dfrac{2}{x\ln x} - \dfrac{1}{x}$

17) $y = \ln\dfrac{5x - 3}{2x + 7}$ $\qquad$ $y' = \dfrac{5}{5x - 3} - \dfrac{2}{2x + 7} = \dfrac{41}{(5x - 3)(2x + 7)}$

18) $y = \dfrac{(x+1)^3 \cdot \sqrt[4]{x - 2}}{\sqrt[5]{(x - 3)^2}}$ $\qquad$ $y' = \dfrac{(x+1)^3 \cdot \sqrt[4]{x - 2}}{\sqrt[5]{(x - 3)^2}} \cdot \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{1}{4(x - 2)} - \dfrac{5}{2(x - 3)}$

19) $y = e^{-\ln^3(1 - 3x)}$ $\qquad$ $y' = \dfrac{9xe^{-\ln^3(1 - 3x)} \cdot \ln^2(1 - 3x)}{1 - 3x}$

20) $y = \left(\ln^3 x - e^{x^2}\right)^4$ $\qquad$ $y' = 4\left(\ln^3 x - e^{x^2}\right)^3 \cdot \left(3\ln^2 x \cdot \dfrac{1}{x} - e^{x^2} \cdot 2x\right)$

Приклади для самостійного розв'язання

Знайти похідні функцій:

1) $y = \dfrac{5}{\sqrt[4]{x^3}} + \dfrac{\sqrt[6]{x^5}}{8} - \dfrac{3}{x};$

2) $y = \left(1 + 2\sqrt{x} - \dfrac{4}{x^2}\right)^4;$

3) $y = (2x^4 - 3x\sqrt{x})^2 \cdot \sin 5x;$

4) $y = \dfrac{\cos 7x}{\sqrt{2x^5 - 1}};$

5) $y = \dfrac{4}{\sqrt[3]{ctg^2 x}}.$

1) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 7x\sqrt{x} + 3x^2 - x;$

2) $y = \sqrt{8x^2 - 4x + \sqrt[3]{x}};$

3) $y = \sqrt[3]{2x^2 + 10x} \cdot tg\dfrac{x}{4};$

4) $y = \dfrac{3\operatorname{cosec} x - 2\sin x}{5\cos^5 x} - \dfrac{16}{5} ctg^5 2x;$

5) $y = \left(\dfrac{2}{\cos^4 x} + \dfrac{3}{\cos^2 x}\right) \cdot \sin x.$

Питання і завдання для самоконтролю

1. Що називається похідною функції?
2. Який аналітичний зміст похідної?
3. Який механічний зміст похідної?
4. Який геометричний зміст похідної?
5. Запишіть основні правила диференціювання
6. По яких формулах диференціюється степеневої, показникової, логарифмічної функції?
7. Вивести правило диференціювання складної функції.
8. У чому суть логарифмічного диференціювання?
9. Знайти похідні функцій:

а) $u(x) = (1 + x^3)\left(5 - \frac{1}{x^2}\right)$, $u'(1) - ?$ Відповідь: $u' = 3x^2(5 - x^{-2}) + 2x^{-3}(1 + x^3)$

$u'(1) = 16$

б) $\varphi(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}$; $\varphi' = \frac{3x^2 + 8x}{(x+2)^{\frac{3}{2}}}$

в) $v(x) = \ln^8(5^{\ln x} + 2x - 1)$ Відповідь:

$$v' = 8\ln^7(5^{\ln x} + 2x - 1) \cdot \left(5^{\ln x} \ln 5 \times \frac{1}{} + 2\right) \cdot \frac{1}{5^{\ln x} + 2x - 1}$$

Список використаної літератури.

1. Збірник задач за курсом математичного аналізу за редакцією Г.Н.Бермана
2. Збірник задач за курсом математичного аналізу для втузів за редакцією Б.П.Демідовича. – М.: Наука, 1970. – 472 с.
3. Пискунів Н.С. Диференціальне й інтегральне вирахування. Для втузів. Т.1.- М., Наука,1985