Практичне заняття

Дослідження на екстремум за першим та другим правилом.

Теоретичні відомості

Функція *y = f (x)* називається зростаючою (спадаючою) в околі даної точки, якщо при двох різних довільних значеннях аргументу, що належить до даного околу, більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції.

Для зростаючої функції: $f(x_1)<f(x_2)$, якщо $x_1<x_2$

Для спадаючої функції: $f(x_1)<f(x_2)$, якщо $x_1>x_2$

Проміжки спадання (зростання) функції називаються проміжками *монотонності.*

Значення функції *f (x)* в точці x_0 називається *максимумом* (мінімумом), а точки x_0 – точкою максимуму (мінімуму), якщо воно є найбільшим (найменшим) в порівнянні з її значенням у всіх достатньо близьких точках праворуч і ліворуч від x_0.

Критичними є точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує.

Необхідна ознака існування екстремуму.

Якщо функція *f (x)* неперервна на якомусь інтервалі та диференційована на ньому та має в точці x_0 цього інтервалу екстремум, то похідна функції в цій точці або дорівнює нулю, або не існує.

Перша достатня умова існування екстремуму.

Нехай функція *f (x)* неперервна на відрізу *[a;в],* диференційована на інтервалі *(a;в)* за виключенням можливо самої точки x_0, тоді якщо при переході зліва направо через критичну точку x_1 похідна:

1) змінює знак з „плюс” на „мінус”, то функція в точці x_0 має максимум;

2) змінює знак з „мінус” на „плюс” , то функція в точці x_0 має мінімум;

3) не змінює знак, то в цій точці функція не має екстремуму.

Перше правило дослідження функції на екстремум.

1) знайти область визначення функції;
2) знайти першу похідну функції;
3) знайти всі критичні точки, нанести їх точками розриву (якщо вони є) на числову вісь; визначити знак похідної в кожному з отриманих інтервалів;
4) знайти екстремум функції, тобто $y_{мак}$, $y_{мін}$.

Друге правило дослідження функції на екстремум.

1) знайти область визначення функції;
2) знайти першу похідну функції $f`(x)$;
3) знайти другу похідну функції $f''(x)$;
4) обчислити $f''(x)$ в кожній критичній точці, якщо:

а) $f''(x_0)\rangle 0,$ то точка x_0 – точка максимуму;

б) $f''(x_0)‹0,$ то точка x_0 – точка мінімуму;

в) $f''(x_0)=0,$ то друге правило не знаходить екстремуму (треба використати 1 правило).

5) знайти екстремум функції: $y_{мак}$, $y_{мін}$

Практична частина

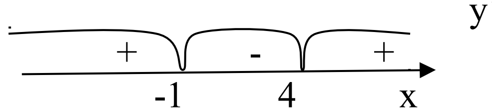
Знайти проміжки зростання, спадання функції:

1) $y=2x^3-9x^2-24x+7$, $ОДЗ : x \in R$

$y'=6x^2-18x-24=6(x^2-3x-4)$ $\quad y'=0; \quad x_1=4; x_2=-1$ - критичні точки;

(-∞;-1), (4;∞) – інтервал зростання;

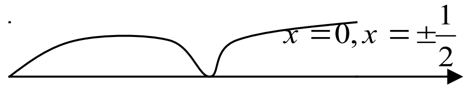
(-1;4) – інтервал спадання



2) $y = 2x^2 - \ln x$, *ОДЗ : x >0*

$y' = 4x - \frac{1}{x}$; $y' = 0$; $4x - \frac{1}{x} = 0$; $\frac{4x^2 - 1}{x} \rangle 0$;

$(4x^2 - 1)x \rangle 0; \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)x \rangle 0$; $x = 0, x = \pm\frac{1}{2}$



y′

$\left(0; \frac{1}{2}\right)$ - функція спадає; $\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$ - функція зростає. 0 ½

x

Дослідити функцію на екстремум за першим правилом

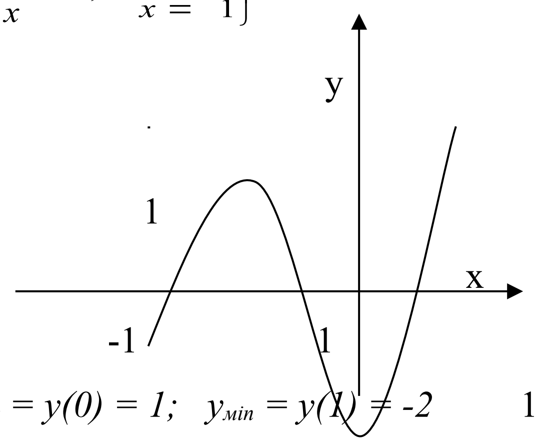
а) $y = 2\cdot\sqrt[3]{x^5} - 5\cdot\sqrt[3]{x^2} + 1$

1) *ОДЗ : x є R*

2) $y' = 2\cdot\frac{5}{3}\cdot x\frac{2}{3} - 5\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$; $y' = 0$; $\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}} = 0$; $\left.\begin{matrix} x = 0 \\ x = 1 \end{matrix}\right\}$

3)

x	(-∞;0)	0	(0;1)	1	(1;∞)
y′	+	∞	-	0	+
y	↗	max	↘	min	↗



4) $y_{max} = y(0) = 1$; $y_{min} = y(1) = -2$

Дослідити функцію на екстремум за другим правилом

а) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3$

1) *ОДЗ : x є R*

2) $y' = x^2 - 3x + 2$; $y' = 0$; $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1; x_2 = 2$ - критичні точки;

3) $y'' = 2x - 3; y''\big/_{x=1} = 2\cdot 1 - 3 = -1 < 0 \Rightarrow x = 1$ - точка максимуму;

$y''\big/_{x=2} = 2\cdot 2 - 3 = 1 > 0 \Rightarrow x = 2$ - точка мінімуму.

4) $y_{max} = f(1) = -\frac{13}{6}; y_{min} = f(2) = -\frac{7}{3}$

б) $y = \ln(x^2 + 1)$

1) *ОДЗ: x є R*

2) $y' = \frac{2x}{x^2+1}$; $y' = 0$; $x = 0$ - критична точка;

3) $y'' = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{2(x^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$;

$y''(0) > 0 \Rightarrow x = 0$ - точка мінімуму;

5) $y_{min} = 0$

Приклади для самостійного розв'язання

1. Знайти локальні екстремуми функції:

а) $f(x) = x\cdot\sqrt{1-x^2}$; б) $f(x) = \frac{(x-2)(3-x)}{x^2}$

Відповідь: а) $y_{min} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$; $y_{max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$; б) $y_{max} = f\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{1}{24}$.

2

Питання і завдання для самоконтролю.

1. Сформулювати і довести достатні умови строгої монотонності функції на інтервалі.
2. Які точки називають критичними?
3. Навести приклад функції, у якої критична точка не відділяє інтервали монотонності, тобто належить інтервалу монотонності.
4. У чому полягає правило знаходження інтервалів монотонності?
5. Знайти інтервали монотонності функції:
6. а) $f(x) = \ln(x^2+3)$; б) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

7. Відповідь: а) (-∞;0) – функція спадає; б) (0;+∞) – функція зростає.
8. Що називається точкою локального мінімуму та локальним мінімумом функції?
9. Що називається локальним екстремумом і чим він відрізняється від абсолютного екстремуму?
10. Сформулювати і довести необхідні умови локального екстремуму та першу і другу достатні умови.
11. У чому полягають правила знаходження екстремуму за першою та другою достатніми умовами?

Список використаної літератури.

1. Збірник задач за курсом математичного аналізу для втузов за редакцією Б.П.Демідовича. – М.: Наука, 1970. – 472 с.
2. Збірник задач за курсом математики для втузов за редакцією А.В.Єфімова, Б.П.Демідовича. Т.1. – М.: Наука, 1981. – 368 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Для втузов. Т.1.- М., Наука,1985